目　　录

第一章 概　　论

§1-1 概　　述

过去十几年间最优化理论与方法发展十分迅速。最优化方法在数学上是一种求极值的方法，它是应用数学的一个分支，现在它已渗透到科学、技术、工程、经济各领域。

实际上人们做任何一件事，不管是分析问题，还是进行综合、作出决策，都要用一种标准衡量一下是否达到了最优。在科学实验、生产技术改进、工程设计，和在生产计划管理、社会经济问题中，人们总希望采取种种措施，以便在有限的资源条件下或规定的约束条件下得到最满意的效果。

在进行一项工作时（例如产品设计、物资运输或分配等等）应用最优化技术，可以帮助我们较快地选择出最优方案，或作出最优决策。因此最优化方法在各种工程技术、自动控制、系统工程、运筹学以及经济计划、企业管理各方面都被广泛应用。

数学家们研究最优化问题，已有很多年历史。古希腊数学家毕达哥拉斯早在公元前 500 年就已发现了所谓黄金长方形，即长方形的长与宽的最佳比例为 1.618，称为黄金分割比。古希腊和欧洲的建筑师、美术家认为在建筑、人像雕塑和绘画中应用这个比例将使建筑和艺术最优美、协调。

1.618 是一个很有趣的数字，例如下述一组数字间，存在着奇妙的关系。

$$\alpha = 0.618,$$

$b=1,\qquad\qquad b-a=0.382$

$c=1.618,\qquad\qquad c-b=0.618$

$d=2.618,\qquad\qquad d-c=1$

$e=4.236,\qquad\qquad e-d=1.618$

$$\frac{e}{d}=\frac{d}{c}=\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=1.618,\quad \frac{e-d}{d-c}=\frac{d-c}{c-d}=\frac{c-b}{b-a}=1.618$$

$$a+b=c,\qquad b+c=d,\qquad c+d=e。$$

1.618 的倒数 0.618 现在还在优选法中广泛应用着，而 0.618 法是一种有效的一维搜索最优化方法。 1.618 恰好是 $x^2+x-2=0$ 的正数解，而 0.618 则是 $x^2-x-2=0$ 的正数解。

在微积分出现以前，已有许多人开始研究用数学方法解决最优化问题。例如欧洲古代城堡几乎都是圆形的。因为公元前 187 年-212 年，阿基米德已证明，给定周长，圆所包围的面积最大，数学上称为等周问题。中国古代城堡却是方形的，这是因为给定周长时，正方形是包围面积最大的四边形；反之给定面积时，正方形是周长最短的四边形，这两个问题是对偶的。

著名的捷线问题，或称最短时间问题是这样提出的：如果有一个质量为m的小球受到重力的作用，在垂直平面内沿金属丝无摩擦地下滑到某一点，为了使下滑时间最短，则金属丝应当具有什么形状？这是一个求泛函极值问题，要用变分法来解算。伽利略曾猜测金属丝形状是圆弧，但 1694 年贝努里证明这种金属丝是一条摆线，与变分法所得结果一致。

科学和工程技术发展史上也有许多最优化问题的重要结论。例如“自由能量”最小时化学系统达到平衡；光在两点间行进时间为最小；高斯的最小二乘设想是使试验数据和拟合曲线间的误差平方和为最小；维纳（Wiener）对控制系统的设计思想是误差平方的时间积分为最小；网络图论中极大流-极小割集定理说明信息流(运

输流）的极大值等于切割网络通道的极小容量，对于解决信息网络（包括计算机网络）或运输网络（包括电力系统输电网络）极大流问题来说，是很重要的。最短路径问题也很早就用网络拓扑解决了。

在电工技术中最优化方法的应用也是很广泛的。电路理论中的基本定理之一是最大功率传输定理，用古典最优化方法——求导数的方法证明共轭匹配是交流网络传输功率最大的条件。在满足性能指标要求的前提下，如何选择参数及几何尺寸使电机、变压器、大功率饱和电抗器等电工设备的体积、重量、费用为最小，这对国民经济的发展很有意义。电网络设计中常要求在满足电路方程的前提下，选择网络元件参数，使消耗功率为最小，或使网络的实际响应值与希望值之间的误差为最小。一个电子系统，应如何设计各元部件的失效率，使系统全局可靠性达到规定要求，同时为保证可靠性所需费用为最小，这在航天设施中是十分重要的问题。一个控制系统在满足系统动态方程的条件下，应选择怎样的控制变量序列（控制函数），使系统从初始状态能以最短时间转移到规定的终态，这就是最优时间控制问题。类似的最优控制问题还有：最少燃料消耗、最优能量控制、随动系统中跟踪误差平方的积分为最小等等。目前国内外也已将最优化技术应用于电场的计算和电力系统的可靠性研究，并用网络最优方法研究电力系统经济运行。

在二十世纪五十年代以前，解决最优化问题的数学方法只限于古典求导方法和变分法（求无约束极值），或是拉格朗日（Lagrange）乘子法解决等式约束下的条件极值问题。这类求可导函数或泛函数极值的必要充分条件称为古典最优化问题。

由于科学技术和生产的迅速发展，实践中许多最优化问题已经无法用古典方法来解决。又由于大型快速电子计算机的发展，自五十年代末以来已经有许多计算机算法解决最优化问题。从理论上说，其中有代表性的是：库恩（H.W.Kuhn）和图克（A.W.Tuc-

ker）两人推导了关于不等式约束条件下的非线性最优必要条件，称为库恩-图克定理，贝尔曼（Bellman）的最优化原理和动态规划理论，庞特里亚金（Pontriagin）的极大值原理，以及卡曼（Kalman）的关于随机控制系统最优滤波器，这些构成了现代最优化技术及最优控制理论的基础。目前"最优化方法"已成为国内外许多大学规定的大学生、研究生的必修内容，也是在职技术干部、管理人员继续学习的重要部分。

最优化方法是一种数学方法，而不是工程方法，它与应用数学、计算机科学以及各专业领域都有密切的关系。用最优化方法解决实际问题一般分三步进行：

1. 提出最优化问题，叙述目标是什么？约束条件是什么？求什么变量？建立最优化问题的数学模型，确定变量，列出目标函数及约束式（等式或不等式）。

2. 分析模型，选择合适的求解方法。

3. 编程序，用计算机求最优解，对算法的收敛性（是否最终能收敛到最优解）、通用性与简便性、效率（计算时间）及误差等作出评价。

由此可见，最优化方法是用计算机寻优的方法。大型计算机的发展及应用为求解大规模最优化问题（又称高维的多变量极值问题）创造了条件。

§ 1-2 最优化问题数学模型的建立

最优化方法的第一步是要叙述问题和建立问题的数学模型，其中包括目标函数和约束条件（简称约束），用函数、方程式和不等式来描述说明所求的最优化问题。其中识别目标、确定目标函数的数学表达形式这一步尤为困难。以下分别说明变量、约束和目标函数的确定。

一、变量的确定

变量一般指最优化问题或系统中待确定的某些量。例如，电机的最优设计中，变量可能为电流密度 j、磁通密度 B、轴的长度、直径以及其它几何尺寸等。电路的最优设计中要确定的变量主要是电路元件（R、L、C）的数值。对产品设计问题来说，一般变量数较少（例如几个到几十个），变量数的多少以及约束的多少表示一个最优化问题的规模大小，因此工程上最优设计问题属于中小规模的最优化问题。而生产计划、调度问题中变量数可达几百个、几千个，属于大规模最优化问题。变量用 X 表示，$X=(x_1, x_2\cdots, x_n)^T$

二、约束条件

求目标函数极值时的某些限制称为约束，例如：要求变量为非负或为整数值，这是一种限制；可用的资源常常是有限的（资源泛指人力、设备、原料、经费、时间等等）；问题的求解应满足一定技术要求，这也是一种限制（如产品设计中规定产品性能必须达到的某些指标）。此外还应满足物理系统的基本方程和性能方程（如电路设计必须服从电路基本定律 KCL 和 KVL，控制系统最优设计则用状态方程或高阶微分、差分方程来描述其物理性质。如果列写出来的约束式，越接近实际系统，则所求得的最优化问题的解，也越接近于实际的最优解。

等式约束　$g_i(X)=0$，$X\in E^n$，$i=1, 2, \cdots, m$，$m<n$。

不等式约束　$h_j(X)\geqslant 0$ 或 $\leqslant 0$　$j=1, 2, \cdots, r$。

3. 目标函数

"最优化"有一定的标准或评价方法。目标函数是这种标准的数学描述。目标函数 $f(X)$ 可以是效果函数或费用函数，$f(X)=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$。用效果作为目标函数时，最优化问题是要求极大值，而费用函数不得超过某个上界成为这个最优化问题的约束；

反之，目标函数是费用函数时，问题变成了求极小值，而效果函数不得小于某个下界就成为这个求极小值问题的约束了，这是对偶关系。

上述费用和效果都是广义的，如费用可以是经费，也可以是时间、人力、功率、能量、燃料、材料、占地面积或其它资源。而效果可以是性能指标、利润、效益、精确度、灵敏度等等。也可以将效果与费用函数统一起来，以单位费用的效果函数或单位效果的费用函数为目标函数，前者是求极大值，后者则是求极小值。

求极大值和求极小值问题实际上没有什么原则的区别。因为求 $f(X)$ 的极小值相当于求 $-f(X)$ 的极大值（见图 1—1），即 $\min f(X)=-\max[-f(X)]$。两者的最优值均在 $x=x^*$ 时得到。

综上所述，最优化问题的数学模型可以表示成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\min\ f(X) \qquad X\in E^n\\ &\text{约束条件}\ g_i(X)\leqslant 0^{[注]}\quad i=1,\ 2,\ \cdots m\end{aligned}\right\}\quad(1\text{—}1)$$

［例 1］ 多路输出的有源线性网络最大输出功率问题。

设有源线性网络供电给多路负载（图 1—2），每一路的输出电压为 U_1，U_2，…，U_n，负载电阻为 R_1，R_2，…，R_n，该网络总的输出功率为：

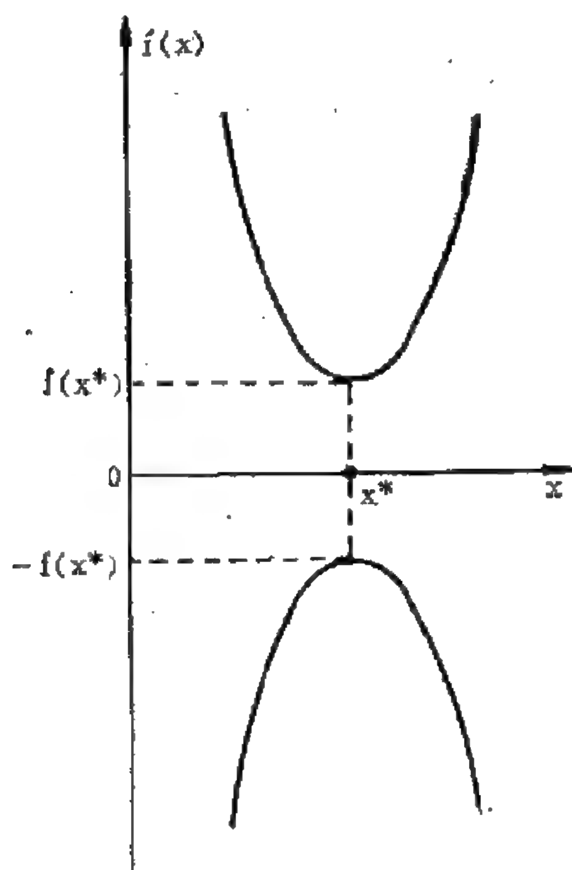
$$P=\frac{U_1^2}{R_1}+\frac{U_2^2}{R_2}+\cdots+\frac{U_n^2}{R_n}\qquad(1\text{—}2)$$

R_1，R_2，…，R_n 为待定的电路参数，(1—2)式表示非线性多变量方程，即功率 P 是 R_1，R_2，…R_n 这 n 个变量的非线性函数。

这个问题的数学模型应为

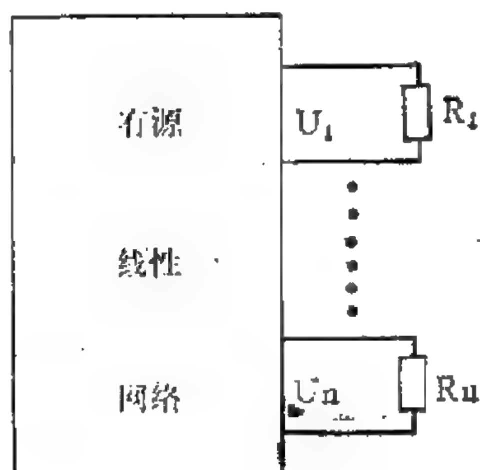
$$\left.\begin{aligned}&\max_{R_i}\ \ P=f(R_1,\ R_2,\ \cdots,\ R_n)\\ &\text{约束}\quad R_i>0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{aligned}\right\}\quad(1\text{—}3)$$

［注］ 约束条件也可以是 $g_i(X)\geqslant 0$，由问题性质决定。



$\min f(X) = -\max[-f(X)]$

图 1—1



有源线性网络多路输出

图 1—2

[例 2]　异步电动机的优化设计

异步电动机优化设计问题中，可以选作设计变量的参数有：

定子内径 D_i，铁心长 l，每槽导线数 Z，定子齿磁密 B_{ts}，轭磁密 B_{yS}，转子齿磁密 B_{tR}，转子导电条电流密度 J_Z，气隙磁密 B_g 等等。

变量数的多少与设计的要求有关，多的可达十多个。一般建议取 6—7 个。因为变量数取得越多，计算工作量急剧上升。

约束条件主要是设计出来的电机应满足国家标准规定的七项主要指标，它们是：

效率 η_0，功率因数 $\cos\varphi_0$，起动电流 I_{s0}，起动转矩 T_{s0}，最大转矩 T_{m0}，定子绕组温升 θ_{10}，转子温升 θ_{20}。

因此，以上述变量表示的各约束函数，使之满足这些指标，就可列出电机优化设计的约束条件：

$$g_1(X)=\eta(X)-\eta_0\geqslant 0$$

$$g_2(X)=\cos\varphi(X)-\cos\varphi_0\geqslant 0$$

$$g_3(X)=I_{s0}-I_s(X)\geqslant 0$$

$$g_4(X)=T_s(X)-T_{s0}\geqslant 0$$

$$g_5(X)=T_m(X)-T_{m0}\geqslant 0$$

$$g_6(X)=\theta_{10}-\theta_1(X)\geqslant 0$$

$$g_7(X)=\theta_{20}-\theta_2(X)\geqslant 0$$

$$g_i(X)=g_i(D_i,\ l,\ Z,\ B_{ts}\cdots)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$$

电机优化设计的目标函数可以是：

1. 有效材料费用函数（有效材料指铁心材料、绕组材料，有时还加上结构材料）。

2. 制造和运行的总费用函数。

3. 单位有效材料费用产生的电磁转矩。

例如有的企业建议用下述目标，即每 400 元的有效材料费所产生的电磁转矩，它反应了要尽量节约有效材料、力争较高经济指标的想法。[注]

有效材料费

$$C(X)=14G_{cu}(X)+1.4G_{Fe}(X)$$

14 及 1.4 元分别表示绕组导线及硅钢片每公斤价格。

[注] 参见中小型电机技术情报，1980，No.1，P53～58 电机电磁方案的优化技术

则目标函数为

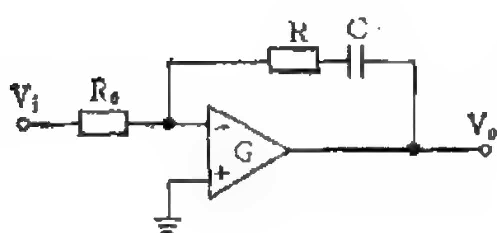
$$f(X)=\frac{400T}{C(X)}$$

T 为电磁转矩。

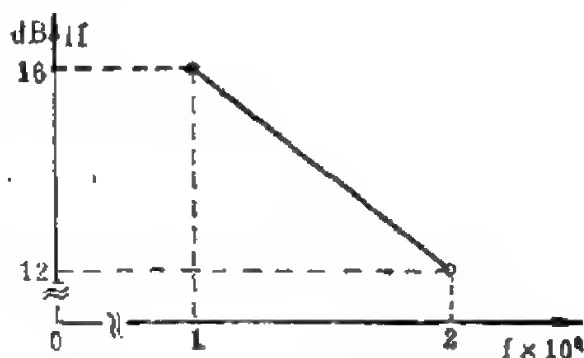
[例 3]　运算放大器的最优设计

如果我们要设计一个如图 1—3 a 所示的运算放大器，有 RC 负反馈，这是一个补偿网络。给定的频率响应为（如图 1—3b）

$$H(\omega)=20-\frac{4}{2\pi}\frac{\omega}{10^6}$$



(a)电路图



(b)频率响应特性

图 1—3　运算放大器

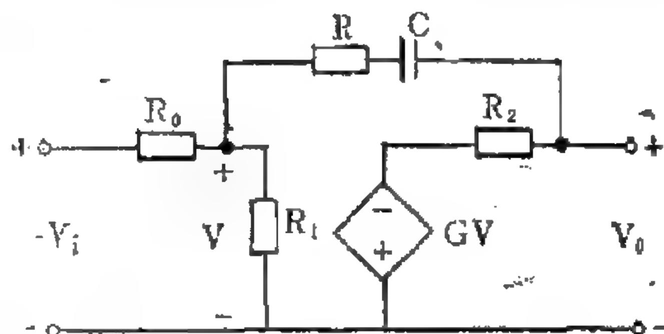
定义　$H(\omega)=20\log\left|\frac{V_o}{V_i}\right|$

V_o 为输出电压，V_i 为输入电压。网络最优设计的任务就是要选择参数 R 和 C，使给定网络的响应 $H(\omega)$ 与实际响应之间的误差为最小。

为了列出目标函数，我们应当先列出实际响应的频率特性 H_1 (ω, R, C) 表达式。

从电路理论角度讲，运算放大器是一个电压控制的电压源（受控源或非独立电源），其等值电路如图 1—4，其中 R_i 为固体组

件（集成电路）的输入电阻，R_2 为输出电阻，G 为电压增益。R_0 为外接的入端电阻。



运算放大器等值电路

图 1—4

设本例中 $G=100$，$R_1=10^K$，$R_2=100\Omega$，$R_0=1^K$。又设 R、C 的范围为

$50\Omega\leqslant R\leqslant 10^4\Omega$，

$10pf\leqslant C\leqslant 1000pf$。

则由上述等值电路可推导出响应 $H_1(\omega, R, C)$，再经过简化可得[注]

$$H_1(\omega,R,C,)\cong 10\log\frac{1}{10^6}\left[R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}\right]$$

根据最小二乘误差准则，可得目标函数为

$$f(\omega, R, C)=\sum_{k=1}^{m}W(\omega_k)[H(\omega_k)-H_1(\omega_k, R,C)]^2$$

加权系数 W 为非负实数，加权以后可以使着重加权的某些频率下的误差比其它频率的误差更小。

一般希望在变量数为 2 时取 10 个采样点，即 $m=10$。因此本例的数学模型为

$$\min f(\omega, R, C)$$

$$50\leqslant R\leqslant 10^4\Omega,\ 10\leqslant C\leqslant 1000pf$$

§1-3 最优化问题的分类

最优化问题可以按下述情况分类：

一、有没有约束？有约束的话是等式约束还是不等式约束？

[注] 参见 G.C.Temes, J.W.Lapatra Introduction to circuit synthesis and design 1977.

二、是确定性的还是随机性的最优问题？

三、目标函数是线性的还是非线性的？约束式是线性的还是非线性的？

四、是静态最优还是动态最优问题，即变量是不是时间的函数？

五、问题的模型用数学解析公式表示还是用网络图表示，在网络图上寻优称为网络最优化。

下面我们分别讨论不同类型最优化问题的性质及特点。

一、无约束与有约束最优问题。

求无约束极值时，问题的最优解就是目标函数的极值。有约束时，问题是求有约束极值（或称条件极值），如果是等式约束，则约束的数目m必须小于变量的数目n（即问题的维数）。当$m=n$时，问题的解是唯一的（即约束方程的交点），显然它不一定为最优。这种情况下，因为约束过多，没有选择最优点的余地，称为没有自由度，自由度的数目等于$n-m$。显然如果$m>n$，则要求同时满足这m个约束是不可能的，这种情况下的最优化问题无解。

等式约束上各点称为可行解，因此等式约束曲线表示可行解域。约束也可以是不等式约束，满足不等式约束的区域范围称为解的可行域。在这个区域内的解都是可行的，称为可行解，可行解的数目有无限多个，其中必有一个是最优解。

[例]　$\min f(x)=(x-a)^2+b$[注]

1）无约束

2）等式约束　$x=c$

3）不等式约束　$x\geqslant c$　设　$c<a$

解：这是单变量寻优问题。其解如图 1—5 所示。

[注]　min 为 minimize 的缩写，$\min f(x)$表示求 $f(x)$的极小值，与之类似的有 $\max f(x)$表示求 $f(x)$极大值，max 为 maximize 的缩写。

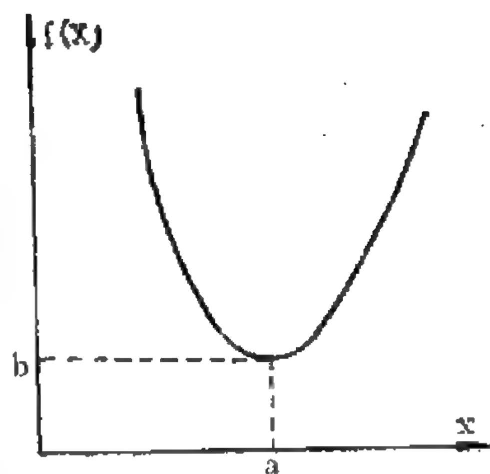
1）无约束。最优解 $x^*=a, f(x^*)=b$（如图 1—5a）。

2）等式约束 $x=c$ 为一条直线，这时 $x=c$ 为可行域，$n=m=1$，故没有寻优的自由度。唯一解由 $x^*=c$ 决定（如图 1—5b）。

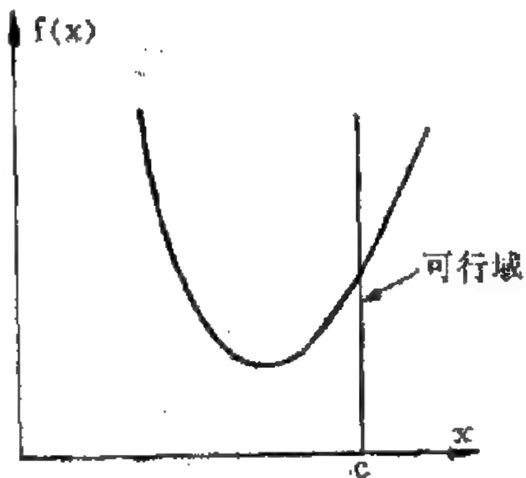
3）不等式约束 $x\geqslant c$（设 $c<a$）

可行域在直线 $x=c$ 的右边（如图 1—5c）。这时最优解和无约束一样，$x^*=a$，$f(x^*)=b$。

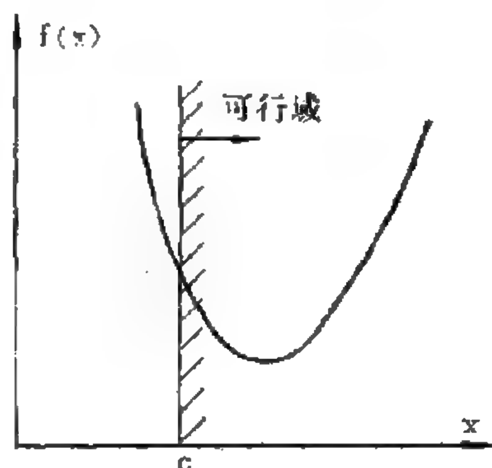
但是如果不等式约束为 $x\leqslant c$，$c<a$，则可行域在直线 $x=c$ 的左边，这时最优解为 $x^*=c$，即最优解在约束边界上。



（a）无约束



（b）等式约束 $x=c$



（c）不等式约束 $x\geqslant c$

图 1—5 求单变量函数极小值

［例］ $\min\ f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$

约束 $x_1+2x_2\leqslant 4$

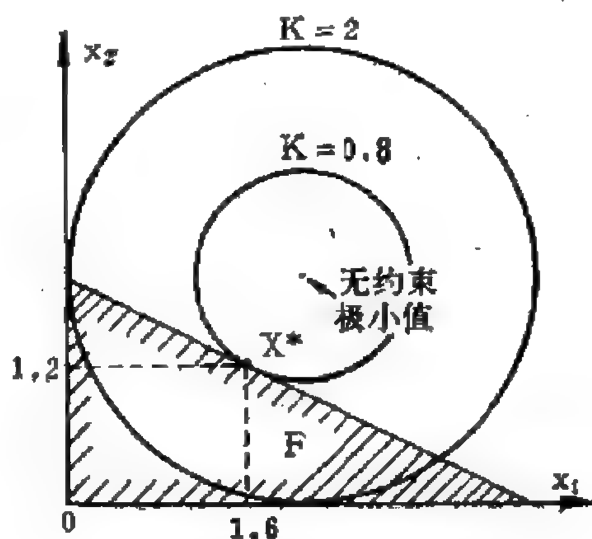
$x_1\geqslant 0$

$x_2\geqslant 0$

解：约束构成的三角形为这个最优问题的可行解域。等高线 $(x_1-2)^2+(x_2-2)^2=K$ 为一族圆，见图 1—6。无约束极值为 $x_1=2$，$x_2=2$，$f(X)=0$。不等式约束的最优解在约束边界上，即等高线 $f(X)=0.8$ 与直线 $x_1+2x_2=4$ 相切点为最优解。该点为 $x_1^*=1.6$，$x_2^*=1.2$，$f(X^*)=0.8$。

二、确定性和随机性最优问题

任何最优化问题都可分成确定性和随机性两大类。确定性最优问题中，每个变量取值是确定的，可知的。而随机（或称概率）最优问题中某些变量的取值是不确定的，但根据大量实验统计，可以知道变量取某值服从一定的概率分布。例如有源网络的最大输出功率、变压器的最优设计等问题是确定性的。而电子系统的可靠性问题则是一个随机最优问题，因为人们无法确切知道电子系统中某部件的失效时间，而只能根据经验或统计资料掌握其概率规律。可靠性问题的研究保证复杂的或重要的系统（如卫星电子系统、电力系统等）能以最小代价取得最优效果。下面可以看到，有的随机最优问题如能表示成数学规划的模型，则和确定性问题一样可用规划论[注]来求解，称为随机规划。



一个二元函数的极小值问题

图 1—6

三、线性最优化与非线性最优化问题。

如果目标函数和所有约束式都是线性的，（即它们是变量的线性函数），则这种最优化问题称为线性最优化，或线性规划。如果目标函数或约束式（即使只是部分约束式）中任一个是变量的非线性函数，则这种最优化问题称为非线性最优化，或非线性规划。线性规划可看作是非线性规划的特殊情况。显然求解非线性规划问题比求解线性规划问题更困难。这种情况与电路或控制系统分析是

［注］ 具有不等式约束的最优化问题称为数学规划问题，这是 40—50 年代从企业计划管理问题中概括出来的数学问题。

类似的：分析线性电路或线性系统的方法较成熟，而分析非线性电路或非线性系统则较困难。

用线性函数近似非线性最优化问题中的非线性函数，就可以用线性规划方法求解非线性规划问题。这种线性近似当然只在局部范围内适用。在求得的最优解附近再对非线性函数作线性近似，可以再一次用线性规划去求解。这样，用一连串的线性规划去近似求解一个非线性规划问题，称为近似规划。

如果目标函数为二次型[注]，而约束式为线性的，称为二次规划问题。二次规划是从线性规划到非线性规划的过渡。是最简单的一种非线性规划。如果目标函数及约束函数具有多元多项式的形式，则这种非线性规划称为几何规划。

四、静态最优化和动态最优化问题

如果最优化问题的解不随时间而变，则称为静态最优化（参数最优化）问题。前面所述的稳态电网络的最优设计问题、电机及变压器的最优设计问题都是静态最优化问题。

如果最优化问题的解随时间而变，即变量是时间 t 的函数，则这是动态最优化问题，也即最优控制问题。这种情况下，变量分为状态变量和控制变量两种。下面我们举两个例子说明动态最优化问题的数学模型。

[例 1]

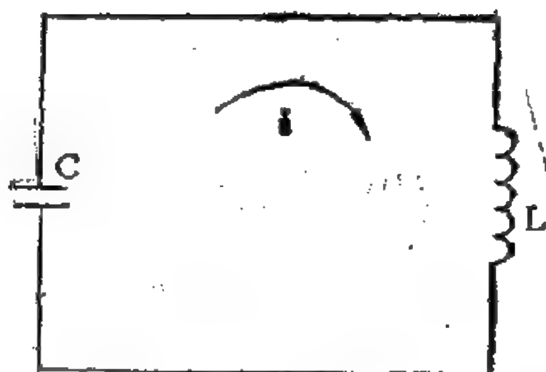
理想的 LC 振荡器在最短时间内停振问题。

图 1—7 表示正处于工作状态的 LC 振荡电路。现在假设从 $t=t_0$ 开始，在振荡电路内加一个电动势 $e(t)$，要求该振荡电路在最短时间内停振。

[注] 二次型是指几个变量的标量函数，其中每一项或者是一个变量的平方，或者是两个不同变量的乘积。在最优化问题中，二次型是常见的一种重要函数，以后我们要详细讨论。

振荡电流初始值 $i(t_0)=x_{10}$

$$\frac{di(t_0)}{dt}=x_{20}$$



理想的 LC 振荡电路

图 1—7

该电路停振时间为 t_f，称为终端时间，则：

$$i(t_f)=0 \quad 或 \quad x_1(t_f)=0$$

$$\frac{di(t_f)}{dt}=0 \quad 或 \quad x_2(t_f)=0$$

这个问题称为最优时间控制，或最小时间问题，状态变量为 $i(t)$ 及 $\frac{di(t)}{dt}$，控制变量为 $e(t)$。数学模型可表示为：

$$\min \int_{t_0}^{t_f} dt$$

$$约束 \quad L\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\int idt=e(t)$$

或用状态方程表示：

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-\frac{x_1}{LC}+\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

最小时间问题是最优控制中的一个典型问题。例如一个带负载的电动机正在运转。如果在某一时刻（例如 $t=t_0$），突然加一个控制作用，电动机产生的力矩使负载在最短时间内停转，即分别从原来的状态 $\theta(t_0)$ 和 $\omega(t_0)$ 变化为 $\theta(t_f)=0$ 和 $\omega(t_f)=0$。其中 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$。

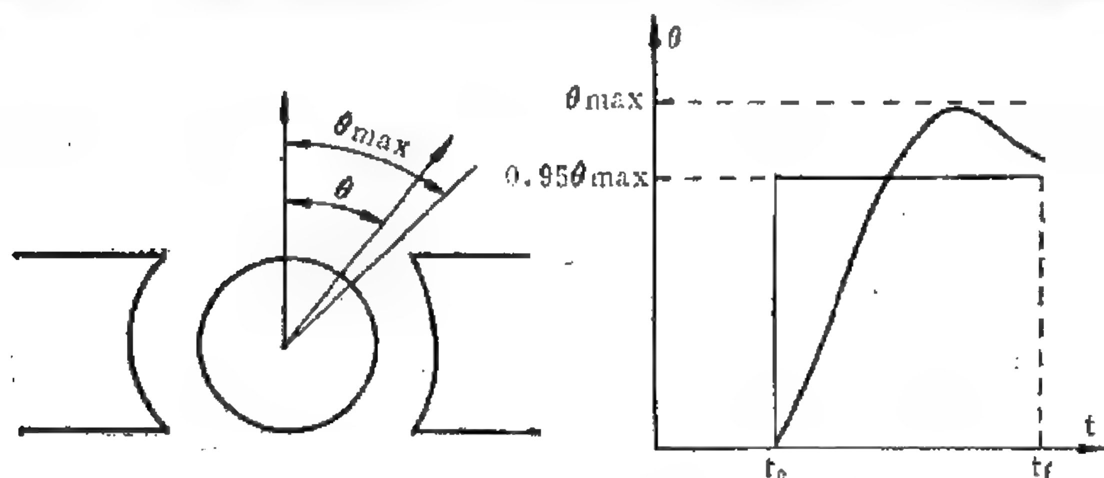
可见这一问题的提法以及目标函数形式都和上述振荡电路在最

短时间内停振的问题相同。

［例 2］

动圈式电表在测量过程中动态误差最小问题。

图 1—8 表示一个动圈式电表的原理图及指针摆动的动态曲线。图中 θ 为指针转角，θ_{max} 为指针最大转角，它由止钉限制。



（a）电表原理图　　（b）指针偏转角动态曲线

图 1—8　电表动态误差最小问题

设从 t_0 时刻起，电表通以电流。动态误差用给定的指针最大偏转角与偏转过程中转角之差的平方积分值表示。给定的最大偏转角为 $0.95\theta_{max}$，即指针的最后稳定位置。

现在要求误差平方积分值为最小，而且为了使电表不致受到冲击而损伤，要求电流不超过安全极限，指针不会与止钉撞击。

因而目标函数是积分的形式，其中包括三项：

$(0.95\theta_{max}-\theta)^2$　为误差平方项

$\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right)^{2M}$ 表示指针接近止钉位置的罚项

$i^2(t)$　表示电流冲击

因此这个问题的数学模型为：

$$\min\ J=\int_{t_0}^{t_f}\left[a(0.95\theta_{max}-\theta)^2+b\left(\frac{\theta}{\theta_{max}}\right)^{2M}+i^2(t)\right]dt$$

约束 $Ki=A\ddot{\theta}+B\dot{\theta}+C\theta$

$$|i|<I$$

$$|\theta|<\theta_{max}$$

约束式中，A 为惯性系数，B 为阻尼系数，C 为弹簧系数。约束式也可用状态方程表示：

$$\dot{\theta}=\omega$$

$$\dot{\omega}=-\frac{C}{A}\theta-\frac{B}{A}\omega+\frac{Ki}{A}$$

目标函数中，a 及 b 为加权因子，t_f 为终端时间，M 为罚因子，是很大的正数。

如果 θ 离开 θ_{max} 越远，则目标函数中，第二项影响越小，θ 越接近 θ_{max}，则该项的数值将迅速增大，在目标函数中占的比例就增大。

如果通过电表的电流值很大，形成对电表的冲击，则 $i^2(t)$ 迅速加大，第三项在目标函数中占的比例也增大，要使 J 为最小，则要限制电流的冲击。

目标函数积分式中变量 θ 及 i 均为时间的函数，因此积分是一个泛函数。这里 θ 及 ω 为状态变量，i 为控制变量。问题实质上是求最优控制变量，即最优电流值，使动态误差最小并且所受机电冲击为最小。

解决动态最优化问题有动态规划方法、极大值原理等。应当说明，动态最优化和静态最优化方法并不是完全对立的。例如线性规划和非线性规划是一种静态数学规划，可用以解决静态最优问题，能不能解决动态最优化问题呢？如果动态最优化问题能够表示成线性规划的数学模型，那么，当然可以用线性规划来求解动态最优化问题。而动态规划方法不但可以求解动态最优化问题，也可用以求

解象分配问题这样的静态最优化问题。

此外最优控制问题的目标函数及约束式都可能是非线性的，因此非线性规划的数值解法也可应用到动态最优化问题中。

五、网络最优化问题

应用图的理论（简称图论）通过网络的几何结构及其性质，对网络进行分析研究，称为网络拓朴学。图论的应用现在已渗透到信息论、控制论、运筹学等各个学科领域。网络最优化就是从图论的角度来研究网络，并用计算机算法寻求这个网络中具有最优参数的路径，如最大流、最短路等等。因此网络最优化是一种复杂系统的规划方法，在运输网络、通信网络、电路网络、计算机网络以及工程施工网络的分析和设计规划中都有较广泛的应用。

§ 1-4　最优控制问题

50 年代以前，自动控制系统的设计方法有两种，即古典法和解析法。这两种方法都是以传递函数为数学模型，来表示系统的特征，在 S 域或 Z 域内用频率法进行设计。对于简单的线性调节系统或伺服系统，这两种方法是很合适的。

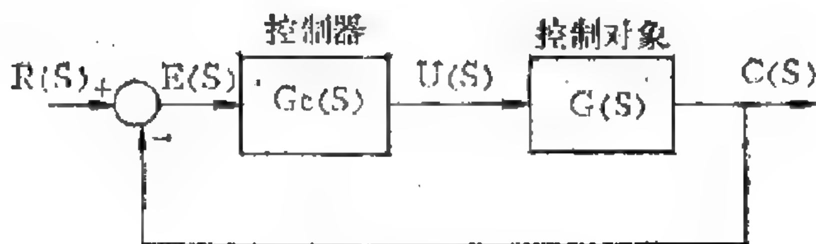


图 1—9　控制系统方框图

1．古典法。

这是一种工程试探的方法。根据控制对象的传递函数 $G(S)$确

定控制器传递函数 $G_c(S)$，如图 1—9，使系统满足给定的各项性能指标，如：过调量、上升时间、增益裕量、相角裕量、频带宽度等。至于系统是否最优是无法考虑的。

古典法设计的控制系统是可行的，但不是最优的，所得结果不是唯一的解。这种方法只应用了误差信号。为了改进设计方法，人们力求使设计的系统按一定指标要求说是最优的。解析法比古典法在这个意义上说前进了一步。

2. 解析法。

这一方法的设计目标是求系统参数使误差的平方积分值 J_e 为最小，这个指标称为 ISE（积分、平方、误差）指标，设 $e(t)$ 为误差讯号，则指标函数可用数学形式表示如下：

$$\min \quad J_e = \int_0^\infty e^2(t)dt$$

实际上，这就是古典控制理论中的最优控制问题。

从不同角度出发，最优控制问题可以有不同的提法。一种提法是：设控制过程中系统消耗的能量为常数，求最优控制变量 $u^*(t)$，使误差平方积分为最小，系统能量可表示为控制变量平方的积分。要求它保持为常数，这是最优控制问题必须满足的条件，也就是一个约束。这个最优控制问题可用下述数学形式表示：

$$\min \quad J_e = \int_0^\infty e^2(t)dt$$

$$\text{约束} \quad J_u = \int_0^\infty u^2(t)dt = \text{常数}$$

问题的另一种提法是：求最优控制变量 $u^*(t)$，在 J_e 为常数的条件下，使 J_u 为最小，即控制能量消耗最小，用数学形式表示如下：

$$\min \quad J_u = \int_0^\infty u^2(t)dt$$

$$\text{约束} \quad J_e = \int_0^\infty e^2(t)dt = \text{常数}$$

[例]

已知控制对象传递函数，$G(S)=\frac{10}{S^2}$，输入$R(S)=\frac{0.5}{S}$。

问题：

$$\min \quad J_e=\int_0^\infty e^2(t)dt$$

$$约束 \quad J_u=\int_0^\infty u^2(t)dt\leqslant 2.5$$

用解析法求得最优解为[20]

$$U^*(S)=\frac{0.5S}{0.05S^2+S+10}$$

系统的闭环传递函数为

$$M^*(S)=\frac{C^*(S)}{R(S)}=\frac{U^*(S)G(S)}{R(S)}$$

$$M^*(S)=\frac{0.5S}{0.05S^2+S+10}\left(\frac{10}{S^2}\right)\frac{S}{0.5}=\frac{200}{S^2+20S+200}$$

$$G_c(S)=\frac{C(S)}{R(S)-C(S)}\frac{1}{G(S)}=\frac{M(S)}{1-M(S)}\frac{1}{G(S)}=\frac{20S}{20+S}$$

这是最优控制器的传递函数。

上述例子说明，最优控制早在 40 年代就已在控制系统设计中应用，只是早期的最优控制方法有一定的局限性，只限于单变量系统，用解析法在频域中寻优。控制对象只限于线性定常系统，设计目标也只限于误差最小或控制能量最小。但是最优控制的设计思想则和现代控制理论是一致的。

空间技术的发展，使控制工程有了较大的突破。导弹的导航系统、自动驾驶系统、宇宙飞船会合的控制系统等等的产生，使传统的系统设计方法已经不能满足要求了。促进了现代控制理论的发展，从 50 年代中期开始，下述三方面的工作奠定了现代控制理论的基础。

1. 用状态空间方法研究线性控制系统，并提出了可控性、可观测性的概念（卡曼 Kalman）。系统如果是不可控的，则最优控制问题的解是不存在的。

2. 动态规划方法和最优化原理（贝尔曼 Bellman）。

3. 极大值原理（庞特里亚金）。

应当说明的是，现代控制理论的某些数学基础实际上很早就已发展了。例如，状态变量法分析线性系统，只用到一阶微分方程，这个数学问题早就认为是很普通的事。关于系统的稳定性分析，1892 年李亚普诺夫（Lyapunov）就已完成。线性规划早在 1939 年就已提出。但在那个时代，计算机还没有出现，因此这些数学成就还不能在控制系统中显示出它的重大作用，控制系统的分析与设计只能停留在古典法阶段。

最优控制是现代控制理论的核心，它的主要内容是：在满足一定的约束条件下，寻求最优控制的规律（或控制策略），使一组目标函数（或泛函数）为极大或极小。与解析法相比，用最优控制理论设计系统具有如下的特点：

1. 适用于多变量、非线性、时变系统的设计。

2. 初始条件可以任意。

3. 可以满足多个目标函数的要求，并可用于多个约束的情况。

4. 计算工作可由计算机进行。这样可将设计人员的精力从繁琐的计算中解放出来，着重于分析和研究设计结果。

§ 1-5 最优化问题的求解方法

数学模型建立以后，主要问题是如何求解这个数学模型。最优化问题的求解方法可以分成以下四类：

1. 间接法——或称解析法。这种方法只适用于目标函数（或

泛函）及约束有明显的解析表达式的情况。求解方法是先求出最优的必要条件，得到一组方程或不等式，再来求解这组方程或不等式。一般是用求导数的方法或变分方法求出必要条件，通过必要条件将问题简化，因此称为间接法。

2． 直接法——当目标函数较复杂或不能用变量显函数表示时，无法用解析法求必要条件。我们要用直接搜索的方法经过若干次迭代搜索到最优点。这种方法常常是根据经验或试验得到的。对于一维搜索问题（单变量极值问题）主要是应用区间消去法或多项式插值法。对于多维搜索问题(多变量极值问题)主要应用爬山法。

3． 以解析法为基础的数值计算法

这类方法也是一种直接法，但是，是以梯度法为基础，因此是一种解析与数值计算相结合的方法。

4． 网络最优化方法

这种方法是以图作为数学模型，称为图模型。然后用图论方法进行搜索最优路径。

所有这些最优化方法实际上都离不开计算机。因此最优化方法既是一种数学方法，又是一种计算机算法。

下表列出最优化问题求解的各种方法。实际上，一个最优化问题常常是几种方法的结合，例如要用到一维搜索、无条件极值方法（无约束的梯度法）以及罚函数法等。而且，所求得的最优解，从全局来看不一定是最优，而从邻近的小范围看，却是最优，称为局部最优解。

最优化方法分类。

1． 解析法（间接法）
- 无约束
  - 古典微分法
  - 古典变分法
- 有约束—极大值原理、库恩-图克定理

2. 数值计算法（直接法）
   - 区间消去法（一维搜索）
     - 斐波那西法
     - 黄金分割法（0.618 法）
     - 插值法
   - 爬山法（多维搜索）
     - 坐标轮换法
     - 步长加速法
     - 方向加速法
     - 单纯形法及随机搜索法

3. 以梯度法为基础的数值计算方法
   - 无约束梯度法
     - 最速下降法
     - 拟牛顿法
     - 共轭梯度法
     - 变尺度法
   - 有约束梯度法
     - 可行方向法
     - 梯度投影法
   - 化有约束问题为无约束问题
     - SUMT 法
     - SWIFT 法
     - 复形法

4. 网络最优化方法

习 题

1. 列出下述最优化问题的数学模型：

a. 用金属薄片做成圆筒，设金属片面积一定，求圆筒的尺寸，使圆筒体积为最大。

b. 有三个电阻 R_1、R_2、R_3 并联再和电阻 R_4 串联组成一

个电路。设电阻 R_i 上电流为 I_i，$i=1$，2，3，4。已知 $V_{imin} \leqslant R_iI_i \leqslant V_{imax}$。$V_i$ 为 R_i 上的压降。求 R_i 使电路中消耗的总功率为最小。

c. n 维空间内移动的物体，设位移向量为 $S=(s_1, s_2, \cdots, s_n)^T$，一单位作用力向量 $X=[x_1, x_2, \cdots x_n]^T$。求力的分量 x_i 使作用于物体的功为最大。$i=1, 2, \cdots, n$。

2. 作图画出下述约束下的可行解域：

设 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$。

a. $x_1^2+(x_2-1)^2-1 \leqslant 0$，$(x_1-1)^2+x_2^2-1 \leqslant 0$。

b. $x_1^2+(x_2-1)^2-1 \leqslant 0$，$x_1^2+x_2^2-1 \leqslant 0$。

c. $x_1^2+x_2^2-1 \leqslant 0$，$x_1+x_2-\frac{1}{2} \leqslant 0$。

3. 求无盖矩形水箱的长、高和宽，使水箱容积为最大，而表面积为 A（A = 侧面积 + 底面积）。试列出该问题的数学模型。

4. 一个交流电路，负载阻抗为 R_2+jX_2，电源电压相量为 $E\underline{/o^\circ}$，电源内阻抗为 R_1+jX_1，设 R_1，R_2，X_1，E 均为给定，求最优的 R_2 使负载有功功率 P 为最大。试列出该问题的数学模型。

5. 已知某试验结果为

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	3	5	4	2	1

现用一个二次多项式 $p(x)=ax^2+bx+c$ 去逼近 $g(x)$，求 a、b 及 c 使 $x=2$，3，4，5 各点误差平方和为最小，已知 $x=1$ 时 $p(1)=g(1)$。

试列出该问题的数学模型。

第二章　经典最优化方法

经典最优化方法包括无约束极值问题和等式约束下的条件极值问题的各种求解方法。

设目标函数为 $f(X)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。无约束极值问题是没有任何约束的情况下求 $f(X)$ 的最优值。最优点 $X=X^*$，X 为 n 维列向量：

$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，T 为转置符号。

即　$X\in E^n$，E^n 为 n 维实欧几里得空间。

$f(X^*)$ 表示函数 $f(X)$ 的最优值，即极大值或极小值，极大值问题可以转化成极小值问题，因此，除特别注明的以外，本书中关于最优值就指极小值而言。

由极值理论我们知道：为了求得 $f(X)$ 的极值，变量 X 必须满足某些必要条件，如果不满足这些条件，就不是最优解。因此最优化的必要条件是在否定意义下使用的。为了验证 X 是否最优，以及判明这时 $f(X)$ 是极大还是极小，应进一步确定充分条件。数学上经典的极值理论——即求可微函数极值的必要和充分条件，已有几百年的历史了。

如果最优化问题中规定了某些等式或不等式约束条件，则求函数极值问题是有约束的最优化问题。经典的极值理论包括等式约束的最优化问题。不等式约束可以化成等式约束。

例如：$ax\leqslant b$，加松弛变量 v，得 $ax+v=b$，变成等式约束，v 也是待定的一个变量。

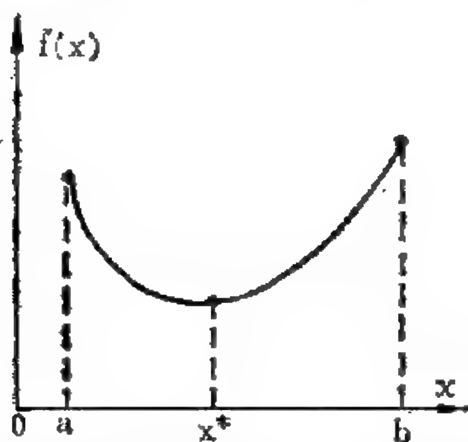
最优控制（或动态最优化）问题是求目标泛函的条件极值问题，但是这类问题的求解方法也是以经典极值理论为基础的。

最近 30 年对不等式约束最优化问题的研究得到了一些重要的结果，可认为是极值问题的现代理论，经典理论可以看作是最优化问题现代理论的特殊情况，经典理论比较简单，明确，因此我们先介绍经典理论的结果。

§ 2-1　无约束极值

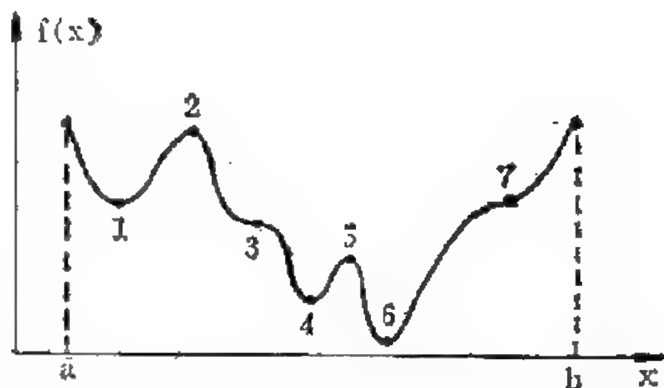
我们先研究没有约束条件时，函数在定义域内存在极值的必要和充分条件。对于最简单的情况即一元函数的极值条件只作简要的复习，以便过渡到多元函数的极值[注]。

图 2—1 表示定义在区间 $[a, b]$ 的一元函数 $f(x)$，x^* 是该区间内 $f(x)$ 的极小点，则 $f(x^*)$ 可以看作是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内的全局最优值（极小值），因为图 2—1 所示的单变量函数是一个单峰函数。



在区间 $[a, b]$ 内的单变量函数

图 2—1



单变量多峰函数

图 2—2

一般情况下，$f(x)$ 可能是多峰函数，如图 2—2 所示，在定义域 $[a, b]$ 区间内，有三个极小点 1，4，6，其中点 6 是全局极

[注] 一元函数即单变量函数，记作 $f(x)$ 。多元函数即多变量函数，记作 $f(X)$ 或 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

小，而点 1、点 4 为局部极小或称相对极小。它只表示和这些点的附近邻点相比较，它们的函数值是极小的。但是从区间 $[a, b]$ 全局来看，点 1 和点 4 就不是极小了。同理图 2—2 中，点 2 和点 5 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内的相对极大点，而点 3 和点 7 则称为拐点。

在极值点处的函数具有以下性质：

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内处处有一阶导数 $f'(x)$（即有切线），则极值存在的必要条件为：

$$f'(x)=0 \tag{2—1}$$

由（2—1）式解所得的点称为驻点，在驻点上，$f(x)$ 的切线与 x 轴平行。但是驻点不一定是极值点，（其中还包括拐点），极值点一定是驻点。图 2—2 中 1，2，3，4，5，6，7 均为驻点，其中拐点 3 和 7 不是极值点。

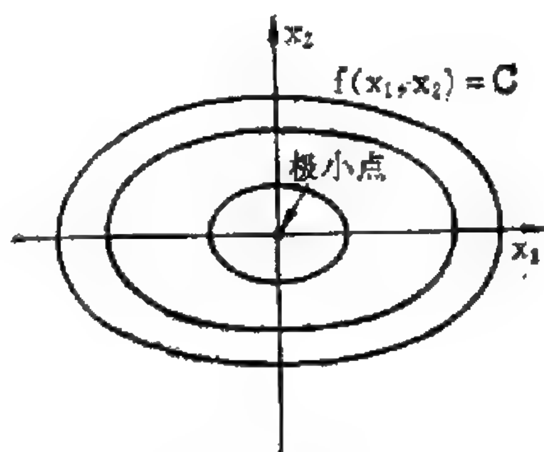
因此，要用充分条件来检验驻点是不是极值点以及极值点是极大点还是极小点。

一元函数极值的充分条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*}=0,\\&\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^*}>0,\ x^*\ \text{为}\ f(x)\ \text{极小点。}\\&\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^*}<0,\ x^*\ \text{为}\ f(x)\ \text{极大点。}\end{aligned}\right\} \tag{2—2}$$

下面我们来看二维变量即二元函数的情况，从二元函数的极值的充分必要条件可以很快推导出多元函数（n 维变量）的极值条件。

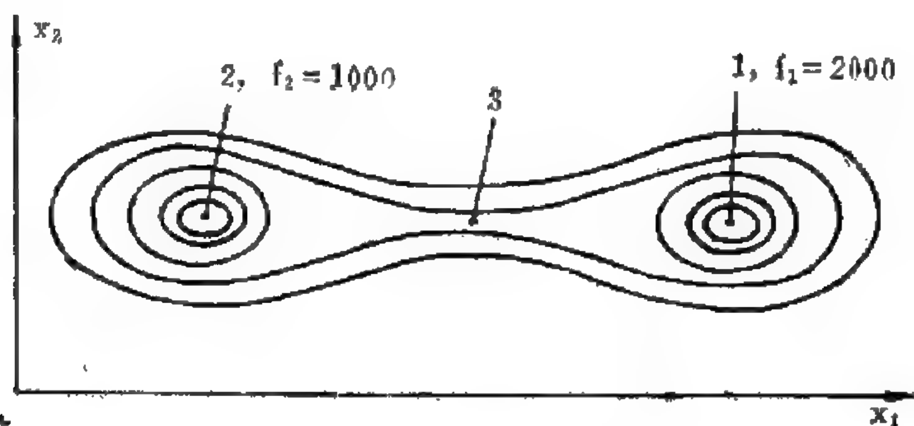
图 2—3 表示二元函数的等高线 $f(x_1, x_2)=c$，显见这是单峰函数，其极小点就是全局极小，位于原点。（极小点实际上是谷点而不是峰点）。



二元单峰函数

图 2—3

图 2—4 表示多峰二元函数，对点 1 说，$f_1(x_1, x_2)=2000$ 是全局极小，而对点 2 说，$f_2(x_1, x_2)=1000$ 是局部极小。点 3 称为鞍点，鞍点的几何解释



二元多峰函数　　$f_1(x_1, x_2)=2000$　　$f_2(x_1, x_2)=1000$

图 2—4

如图 2—5（单变量函数中的拐点与鞍点类似）。

和一元函数类似，如果在二元函数 $f(x_1, x_2)$ 的极值点作函数曲面的切平面，必与 x_1x_2 平面平行。假设 $f(x_1, x_2)$ 的一阶偏导数都存在，且函数连续，则极值点的必要条件为：

$$\left.\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}=0 & & f_{x_1}(x_1, x_2)=0 \\ & \text{或记作} & \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}=0 & & f_{x_2}(x_1, x_2)=0\end{array}\right\} \quad (2\text{—}3)$$

满足上述条件的点为驻点。

(2—3) 式也可写成梯度形式

$$\nabla f(x_1,\ x_2)=0$$

式中梯度向量：

$$\nabla f(x_1,x_2)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T \qquad (2\text{—}4)$$

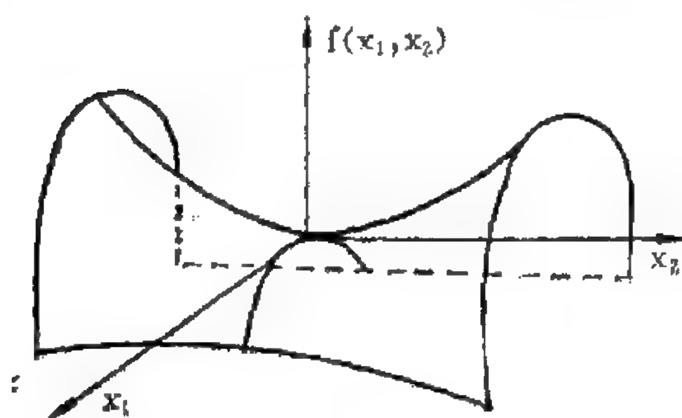
[例] $f(x_1,x_2)=x_2^2-x_1^2$.

驻点条件为：

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-2x_1=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2=0$$

即原点 (0, 0) 为驻点，在该点附近，$f(x_1,\ x_2)$ 形似马鞍，故称为鞍点，显见它不是极值点（如图 2—6 所示）。

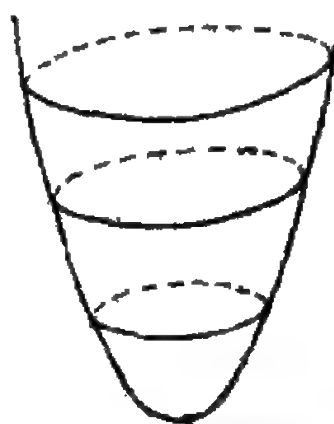


$f(X)=x_2^2-x_1^2$ 的鞍点

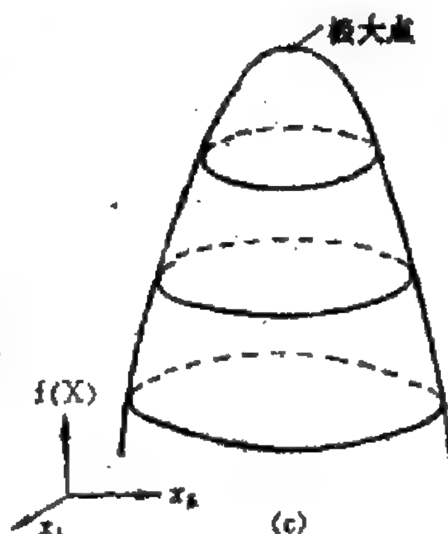
图 2—6



(a)



(b)



(c)

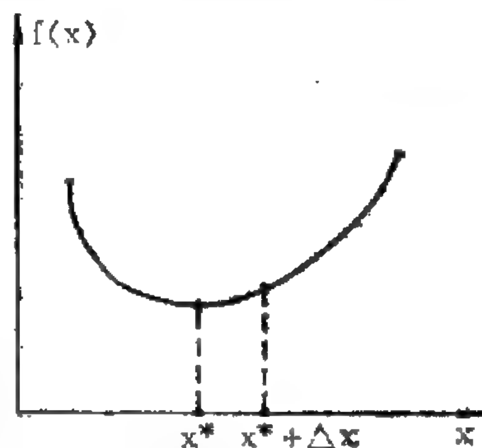
鞍点的几何解释

图 2—5

检验二元函数极值的充分条件可如下导得：

对图 2—7 所示单变量函数，在极值点 x^* 附近展开成泰勒级数，取三项得：

$$f(x)=f(x^*)+\left.\frac{df}{dx}\right|_{x^*}\triangle x+\left.\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^*}(\triangle x)^2 \quad (2—5)$$



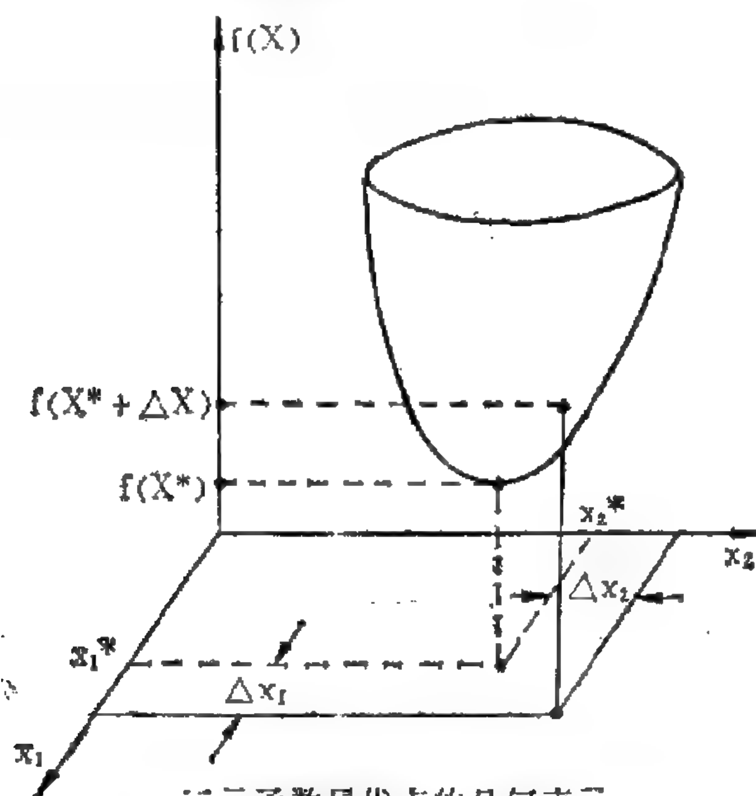
一元函数最优点 x^* 及其邻近点 $x^*+\triangle x$

图 2—7

式中 $x=x^*+\triangle x$

式（2—5）称为函数 $f(x)$ 的二次近似展开式。

同理，图 2—8 所示二元函数也可以用向量形式表示其二次近似泰勒展开式。



二元函数最优点的几何表示

图 2—8

$$f(X)=f(X^*)+[\nabla f(X)]^T{}_{X^*}\triangle X$$
$$+\frac{1}{2}(\triangle X)^T[\nabla^2 f(X)]_{X^*}\triangle X+0(\varepsilon) \qquad (2-6)$$

式中

$$f(X)=f(x_1,\ x_2)$$
$$X=X^*+\triangle X$$
$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$\triangle X=\begin{bmatrix} \triangle x_1 \\ \triangle x_2 \end{bmatrix}$$
$$\nabla f(X)^T=\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^T=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right]$$
$$\nabla^2 f(X)=\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$A=\nabla^2 f(X)|_{X=X^*}$ 是二阶偏导数矩阵，是 2×2 对称阵。称为 *Hesse* 矩阵。

$0(e)$ 为高阶无穷小。

式（2—6）的展开形式为：

$$f(x_1,\ x_2)=f(x_1^*,\ x_2^*)+\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1^*}\triangle x_1+\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_2^*}\triangle x_2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{x_1^*}\triangle x_1^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\right|_{x_1^*,x_2^*}\triangle x_1\triangle x_2\right.$$
$$\left.+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{x_2^*}\triangle x_2^2\right) \qquad (2-7)$$

$X=X^*$ 时，$\nabla f(X)|_{X^*}=0$，由（2—6）式可得

$$f(X)=f(X^*)+\frac{1}{2}(\triangle X)^T A\triangle X \qquad (2-8)$$

对于二次函数 $f(x_1, x_2)$，A为常阵：

$$\nabla^2 f(X)|_{X^*}=A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

式中　$a_{12}=a_{21}$。

当 A 为正定阵[注]时，即 $a_{11}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$，则 $f(X)>f(X^*)$，即 $f(X^*)$ 为极小值。

可以证明：当 A 为负定阵时，

$f(X)<f(X^*)$，即 $f(X^*)$ 为极大值。

[例 1]

$$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+B^TX+C \qquad (2-9)$$

Q 为常阵，B 为常向量，C 为常数。

$\nabla f(X)=QX+B=0$，其解即为驻点：

$$X=-Q^{-1}B \qquad (2-10)$$

Hesse 阵 $A=\nabla^2 f(X)=Q$，Q 为可逆阵。

若 Q 为正定阵（Q 为正定，一定可逆），则

$$X^*=-Q^{-1}B$$

为函数 $f(X)$ 的极小值点，$f(X^*)=C-\frac{1}{2}B^TQ^{-1}B$。

[例 2]

$$f(X)=X^TQX \qquad Q=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

由例1可知 $B=0$ 时，$X^*=0$，这是驻点，是否是极值点用

[注]：正定和负定的定义及其判别方法见本章 § 2—3，A 正定，则 $f(X^*)$ 为极小值的证明见本节附录。

$Hesse$ 阵的正定性来判别。现在，$det\,Q=3>0$，$q_{11}=1>0$，Q正定。$A=Q$，$\therefore A$ 为正定，因此 $X=0$ 为极小值点，$f(X^*)=0$。

[例 3]：

$$f(X)=-10x_1^2-12x_1x_2-4x_2^2$$

$$\nabla f(X)=[-20x_1-12x_2,\ \ -12x_1-8x_2]^T=0$$

解得驻点　$x_1=0$，$x_2=0$

$$A=\nabla^2 f(X)=\begin{bmatrix}-20 & -12\\ -12 & -8\end{bmatrix}$$

$a_{11}<0$，$\det A=160-144=36>0$，A 为负定，$X^*=0$ 为极大值点，极大值 $f(X^*)=0$。

附录：二元函数极值的充分条件

由（2—8）式得：

$$f(X^*+\triangle X)-f(X^*)=\frac{1}{2}(\triangle X)^T A\triangle X=D$$

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}_{X=X^*}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\qquad a_{12}=a_{21}$$

由（2—7）式得：

$$D=\frac{1}{2}(\triangle X)^T A\ \triangle X=\frac{1}{2}(\triangle x_2)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\triangle x_1}{\triangle x_2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\triangle x_1}{\triangle x_2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\triangle x_2)^2[a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22}]$$

$$=\frac{1}{2}(\triangle x_2)^2F(t)$$

$$t=\left(\frac{\triangle x_1}{\triangle x_2}\right),\quad F(t)=a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22}$$

如果 X^* 是极小点，则不管 $\triangle x_1$、$\triangle x_2$ 如何变（当然变化范围很小），$D>0$，即二项式 $F(t)$ 不应变号。即 $F(t)>0$ 或 $F(t)<0$，而不能等于 0。

换言之，$F(t)=a_{11}t^2+2a_{12}t+a_{22}=0$ 不应有实根。

因此 $(2a_{12})^2-4a_{11}a_{22}<0$，即

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}>0。$$

为保证 $\det A>0$，则 a_{11} 必须与 a_{22} 同号。

又当 $\triangle x_2=0$ 时，$D=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}(\triangle x_1)^2$，因此 $a_{11}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}$ 与 D 同号，同理 a_{22} 也必须与 D 同号。

因此，二元函数极值的充分条件为：

$$\nabla f(X)|_{X^*}=0,$$

$$\det A>0。$$

$a_{11}>0$ 时，X^* 为极小点（即 A 为正定阵），

$a_{11}<0$ 时，X^* 为极大点（即 A 为负定阵）。

多元函数 $f(X)$ 的极值条件可以从二元函数极值条件推广。

这时 $X=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T$，$f(X)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$。

将二元函数推广到 n 元可得如下结果：

函数 $f(X)$ 在 X^* 点的泰勒级数二次近似式为

$$f(X)=f(X^*)+\nabla f(X^*)^T\triangle X+\frac{1}{2}(\triangle X)^TA\triangle X \tag{2—11}$$

$$\nabla f(X^*) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T_{X=X^*}$$

$$\triangle X = [\triangle x_1, \triangle x_2, \cdots, \triangle x_n]^T$$

$$A = \nabla^2 f(X)|_{X=X^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{X=X^*} \tag{2—12}$$

称为 n 元二次偏导数矩阵，即 *Hesse* 矩阵。

式（2—11）的展开式为：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x_i^*} \triangle x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x_i^*, x_j^*} \triangle x_i \triangle x_j$$

则 n 元函数极值的必要与充分条件和二元函数极值条件一样：

$$\left.\begin{array}{l} X^* \text{ 为极值的必要条件为 } \nabla f(X)_{X^*} = 0 \\ \qquad\qquad\quad \text{充分条件为 } \nabla f(X)|_{X^*} = 0 \\ \text{令 } A \text{ 为 } f(X) \text{ 二次近似展开式的 Hesse 阵} \\ \text{当 } A \text{ 为正定时，} X^* \text{ 为极小。} \\ \quad A \text{ 为负定时，} X^* \text{ 为极大。} \end{array}\right\} \tag{2—13}$$

A 为负定的条件为（见 § 2—3）：

$\det A_i < 0$，$i = 1, 3, 5, \cdots$，

$\det A_i > 0$，$i = 2, 4, 6, \cdots$。

其中 $\det A_i$ 为 A 的左上角主子行列式。

如果函数 $f(X)$ 可用解析式表达并且可导，则可用解非线性联立方程组的方法（例如 *Newton-Raphson* 法）求解 $\nabla f(X)$

=0 得驻点，可能得到许多解，我们可以逐个地计算 Hesse 阵 A，以判断哪个是极大点，哪个是极小点。这一方法称为解析法（或间接法）。

变量数较多时，计算 Hesse 阵是较困难的，因此解析法求最优值一般很少用。用得较多的是数值计算法。

§ 2-2　多变量函数的微分运算

在求解最优化问题时，常遇到下述微分运算问题：如时变向量（或矩阵）对时间的求导，多变量标量函数对向量（或矩阵）的求导，多变量向量函数对向量（或矩阵）的求导等。

下面列出几个常用的多变量函数求导规则。

一、时变向量（或矩阵）函数对时间 t 的导数

1. 设 $X(t)$ 为 n 维时变向量，

$$X(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots,\ x_n(t)]^T$$

则

$$\dot{X}(t)=\frac{dX(t)}{dt}=[\dot{x}_1(t),\ \dot{x}_2(t),\ \cdots,\ \dot{x}_n(t)]^T \tag{2—14}$$

2. 设 $A(t)$ 为 $m\times n$ 时变矩阵，

$$A(t)=[a_{ij}(t)]_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots\cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots\cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots\cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{A}(t)=\left[\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right]_{m\times n}=[\dot{a}_{ij}(t)]_{m\times n} \tag{2—15}$$

3. 设 $A(t)$、$B(t)$ 为 $n\times n$ 时变矩阵，

则 $$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}[A(t)+B(t)]&=\frac{dA(t)}{dt}+\frac{dB(t)}{dt}\\ \frac{d}{dt}[A(t)B(t)]&=\frac{dA(t)}{dt}B(t)+A(t)\frac{dB(t)}{dt}\end{aligned}\right\}\quad(2\text{—}16)$$

4. 设 $\lambda(t)$ 为时变标量，$A(t)$ 为时变向量或矩阵，

则 $$\frac{d}{dt}[\lambda(t)A(t)]=\frac{d\lambda(t)}{dt}A(t)+\lambda(t)\frac{dA(t)}{dt}\quad(2\text{—}17)$$

[例] $$f[X(t)]=X^T(t)P(t)X(t)$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}[X^T(t)P(t)X(t)]=\dot{X}^T(t)P(t)X(t)$$

$$+X^T(t)\dot{P}(t)X(t)+X^T(t)P(t)\dot{X}(t)$$

因为 $\dot{X}^T(t)P(t)X(t)$ 为标量，故有 $[\dot{X}^T(t)P(t)X(t)]^T=\dot{X}^T(t)P(t)X(t)$，或 $X^T(t)P(t)\dot{X}(t)=\dot{X}^T(t)P(t)X(t)$。

所以 $$\frac{d}{dt}[X^T(t)P(t)X(t)]=2X^T(t)P(t)\dot{X}(t)+X^T(t)\dot{P}(t)X(t)。$$

二、标量函数对向量求导

设 $f(X)$ 为n个变量 x_1，x_2，…，x_n 的函数，$f(X)$ 为标量，又设 X 为n维向量

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

定义 $f(X)$ 对 X 的导数为

$$\frac{df(X)}{dX}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\\frac{\partial f}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

称$\frac{df(X)}{dX}$为函数 $f(X)$ 的梯度，记作

$$\nabla_X f(X)=\mathrm{grad}\,f(X)=\frac{df(X)}{dX}$$

而 $$\frac{df(X)}{dX^T}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

从而有 $$\frac{df(X)}{dX}=\left[\frac{df(X)}{dX^T}\right]^T$$

下面几个例子所得计算结果是常用的。

[例 1] $$f(X)=X^TX=x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2$$

$$\frac{df(X)}{dX}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\\frac{\partial f}{\partial x_2}\\\vdots\\\frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\2x_2\\\vdots\\2x_n\end{bmatrix}=2X$$

[例 2]

$$f(X)=X^TQX$$

X 为 n 维列向量，Q 为 $n\times n$ 实对称阵，当 Q 为对角阵时，

$$Q=\begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & q_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & q_n \end{pmatrix}$$

$$f(X)=X^TQX=q_1x_1^2+q_2x_2^2+\cdots+q_nx_n^2$$

则

$$\frac{df(X)}{dX}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2q_1x_1 \\ 2q_2x_2 \\ \vdots \\ 2q_nx_n \end{pmatrix}=2QX \qquad (2\text{—}18)$$

$Q=I$ 时 $\frac{df}{dX}=2X$，即例 1 结果。

同理有 $$\frac{df(X)}{dX^T}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

$$=[2q_1x_1,2q_2x_2,\cdots,2q_nx_n]=2X^TQ \qquad (2\text{—}19)$$

若 Q 不是对称阵，一般情况下可表示为

$$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

可以证明，这时有

$$\frac{df(X)}{dX}=QX+Q^TX \tag{2—20}$$

以二阶方阵为例，设

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}，\quad q_{12}\neq q_{21}，\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(X)=X^TQX=q_{11}x_1^2+(q_{12}+q_{21})x_1x_2+q_{22}x_2^2$$

$$\frac{df(X)}{dX}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 2q_{11}x_1+(q_{12}+q_{21})x_2 \\ (q_{12}+q_{21})x_1+2q_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

$$QX=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{11}x_1+q_{12}x_2 \\ q_{21}x_1+q_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

又
$$Q^TX=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{21} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_{11}x_1+q_{21}x_2 \\ q_{12}x_1+q_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

故有
$$QX+Q^TX=\begin{bmatrix} 2q_{11}x_1+(q_{12}+q_{21})x_2 \\ (q_{12}+q_{21})x_1+2q_{22}x_2 \end{bmatrix}=\frac{df}{dX}$$

[例 3] 设 λ 及 X 均为 n 维列向量，其中向量 X 为变量，λ 为常向量，则有标量函数：

$$\lambda^TX=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n$$

$$\frac{d\lambda^TX}{dX}=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}=\lambda \tag{2—21}$$

[例 4] 设 λ 及 X 均为 n 维列向量，Q 为 $n\times n$ 定常矩阵，则

$f(X)=\lambda^T QX$　为标量函数，

并且
$$(\lambda^T QX)^T=\lambda^T QX$$
$$\therefore\quad X^T Q^T\lambda=\lambda^T QX$$

故有
$$\frac{df(X)}{dX}=\frac{d}{dX}(\lambda^T QX)=\frac{d}{dX}(X^T Q^T\lambda)=Q^T\lambda \quad (2—22)$$

三、向量函数对向量求导

设向量函数
$$F(X)=\begin{pmatrix} f_1(X)\\ f_2(X)\\ \vdots\\ f_m(X)\end{pmatrix}=[f_i(X)]_{m\times 1}$$

其中每个元 $f_i(X)$ 为 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的标量函数，$i=1, 2, \cdots, m$。

定义偏导数矩阵为
$$\frac{dF(X)}{dX^T}=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} \quad (2—23)$$

式中　$i=1, 2, \cdots, m$，$j=1, 2, \cdots, n$。

(2—23) 式称为雅可比 (Jacobi) 阵。

同理可得

$$
\frac{dF^T(X)}{dX}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}=\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right]_{n\times m} \qquad (2—24)
$$

即

$$
\frac{dF^T(X)}{dX}=\left[\frac{dF(X)}{dX^T}\right]^T \qquad (2—25)
$$

[例 1] 设

$$
X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},
$$

$$
\frac{dX^T}{dX}=\frac{dX}{dX^T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I
$$

I 为单位阵。

[例 2] 设

$$
\lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & c_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}
$$

$\lambda^T A$ 为 m 维行向量

$$
\frac{d\lambda^T A}{d\lambda}=A
$$

设 $n=m=2$,

$$
\lambda^T A=[\lambda_1 \quad \lambda_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=[\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}, \quad \lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}]
$$

则

$$
\frac{d\lambda^T A}{d\lambda}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=A
$$

读者可以自己证明 $\frac{dA^T\lambda}{d\lambda^T}=A^T$ 。

§ 2-3 二 次 型

二次函数是最优化问题中很重要的一类函数。在静态最优和动态最优问题中有很多目标函数是二次型的，或者虽然不是二次型，经过泰勒级数展开，取二次近似，如（2—11）式得到的是二次函数。以后我们将会看到，一般函数在极值点附近可近似用二次函数表示，越是接近极值点，近似程度越好。如果一个非线性最优化算法对二次型有效，则对一般型函数也是有效的。因此讨论二次型问题有实际意义。

对于线性函数（或称一次函数）可表示成如下形式：

$$f(X)=b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n=B^TX \qquad (2—28)$$

$$B=[b_1,\ b_2,\ \cdots\cdots,\ b_n]^T,\ X=[x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n]^T$$

在二维平面（$n=2$）上，一次函数是一条直线，三维空间（$n=3$）中，一次函数是一个平面，三维以上空间中的一次函数则称为超平面。

二元二次函数，可用下式表示，

$$\left.\begin{array}{l} f(X)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 \\ \text{写成向量形式：} f(X)=X^TAX \end{array}\right\} \qquad (2—29)$$

（2—29）式称为二次型，式中 $X=[x_1\quad x_2]^T$，$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$，当 A 为单位阵时，（2—29）式表示的二次型为一个圆，A 为正定实对称阵时，上式表示一个椭圆。

推广到 n 维， $X^T=[x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n]$

$$f(X)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $$f(X)=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\ a_{ij}=a_{ji}。\qquad (2—30)$$

二次型在二维空间中为一椭圆，三维空间中是椭球，三维以上空间中是超椭球体。二次型总是一个标量函数。

对于二次函数 $f(x_1,x_2)=K+ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1+ex_2$ 可写成简化形式为

$$f(X)=K+B^TX+\frac{1}{2}X^TAX \qquad (2—31)$$

式中 $$A=\begin{bmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

[例 1] $$f(X)=ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2$$

设 $$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

则用二次型表示，$f(X)=X^TAX$

[例 2] $f(X)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2$

用二次型表示为

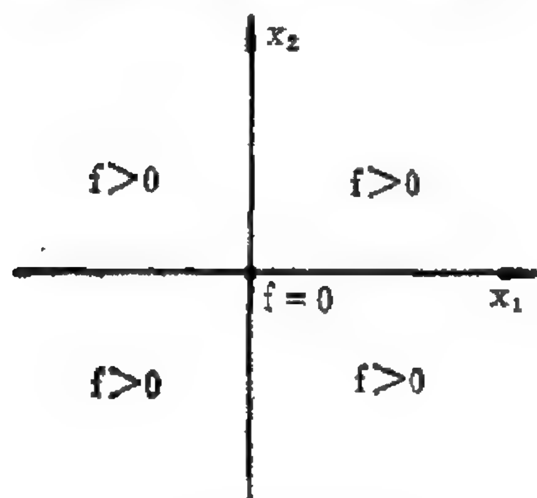
$$f(X)=X^TAX,\ X=[x_1,\ x_2,\ x_3]^T \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

在讨论多元函数极值的充分条件时，我们用到 *Hesse* 阵是否正定这一判别方法，正定性问题在最优化理论中是常用的，现在我们来讨论二次型的正定性及其判别法。

定义 1.　正定二次型

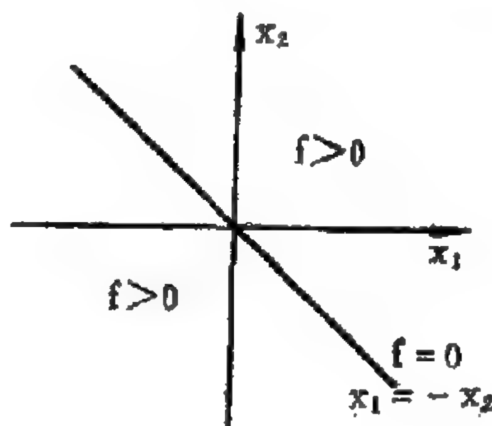
除 $X=0$（即 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=0$）以外，对所有的 X 值，$X^TAX>0$（即二次型为正），则 X^TAX 称为正定二次型，A 称为正定阵。

[例]　$X^TX=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2>0$，所以是正定二次型。这里 $A=I$，单位阵为正定阵。图 2—9 表示 $f(X)=x_1^2+x_2^2$ 为正定的几何范围。



正定性几何图示

图 2—9



半正定性几何图示

图 2—10

定义 2.　半正定二次型

对所有 $X\neq 0$，X^TAX 非负，即 $X^TAX\geqslant 0$，则称 X^TAX 为半正定二次型，A 为半正定阵[注]。

[例]　$f(X)=(x_1+x_2)^2$

当 $x_1=-x_2$ 时，$f(X)=0$，如图 2—10，所以 $f(X)$ 为半正定。

定义 3.　负定二次型

除 $X=0$ 外，对所有 X，$X^TAX<0$，则称 X^TAX 为负定

[注]　半正定也可称为非负定。

二次型，A 为负定阵，显见，若 X^TAX 为正定二次型，则 $-X^TAX$ 为负定二次型。

[例] $f(X)=-x_1^2-(3x_1+2x_2)^2$，显然为负定二次型。因为除 $x_1=0$，$x_2=0$ 以外所有 x_1、x_2 值均使 $f(X)<0$。

定义 4. 半负定二次型

对所有 $X\neq0$，$X^TAX\leqslant0$，则称 X^TAX 为半负定二次型[注]。

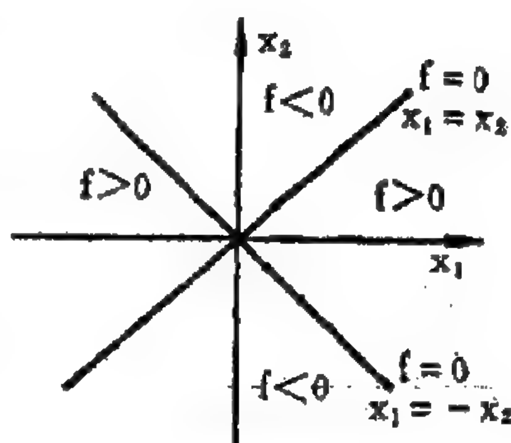
定义 5. 不定二次型

如果对某些 X 值，二次型 X^TAX 为正，而另一些 X 值，X^TAX 为负，则称 X^TAX 为不定二次型。

[例] $f(X)=x_1^2-x_2^2$

$|x_1|>|x_2|$ 时，$f(x)$ 为正，$|x_1|<|x_2|$ 时，$f(X)$为负，如图 2—11，

$\therefore$ $x_1^2-x_2^2$ 是不定二次型。



不定二次型几何图示

图 2—11

[例] $f(X)=x_1x_2+x_2^2$

$x_1=-x_2$ 时，$f(X)=0$，

$x_1>-x_2$ 时，$f(X)>0$，

$x_1<-x_2$ 时，$f(X)<0$，

$\therefore$，$f(X)$ 为不定二次型。

二次型的正定性可根据实对称矩阵 A 的特征值为正或为负来判定，也可用 Sylvester 定理判别。

Sylvesester 定理

二次型为正定的充分必要条件为：方阵 A 的左上角各阶主子行列式都大于零，$n\times n$ 阵有 n 个左上角主子行列式（主子行列式也可简称主子式）。

[注] 半负定也可称为非正定。

[例]

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

左上角各阶主子式 $a_{11}>0$，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$，$\det A>0$，则 A 为正定阵。

[例] $f(X)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3=X^TAX$

$$X^T=(x_1,\ x_2,\ x_3),\qquad A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}=5>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=5-4>0,\ \det A=1>0$$

∴ $f(X)$ 为正定二次型。

负定二次型的判别法如下：

1. 设 A 的左上角各阶主子式用 $\det A_i$ 表示，

 若 $i=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots$ 时，$\det A_i<0$。

  $i=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots$ 时，$\det A_i>0$。

 则 A 为负定阵。

[例] $f(X)=-5x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3=X^TAX$

$$A=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

∵ $|A_1|=-5<0$

 $|A_2|=30>0$

 $|A_3|=\det A=-120<0$

∴ $f(X)$ 为负定二次型，A 为负定阵。

2. 负定性也可以如下判别：

二次型 X^TAX 为负定的必要与充分条件是 $-A$ 为正定。上例中，

$$A=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 4\\ 4 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix},\quad -A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -4\\ -4 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

显见 $-A$ 是正定的，∴ A 是负定的。

用矩阵 A 的特征值来判别二次型 X^TAX 的正定性，有如下定理：

$n\times n$ 实对称矩阵 A 若为正定，则其 n 个特征值 λ_i 均大于零，$i=1, 2, \cdots, n$。

λ_i 可由 $|\lambda I-A|=0$ 求得，$|\lambda I-A|$ 为特征多项式。它是矩阵 $\lambda I-A$ 的行列式。

若 A 为半正定，则特征值 $\lambda_i\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, n$。同理若 A 为负定，则其特征值均小于零。若特征值中既有大于零又有小于零的情况，则 A 为不定。

[例 1]
$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 4 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

由 Sylvestor 定理，$5>0$，$\begin{vmatrix}5 & 0\\ 4 & 6\end{vmatrix}>0$，$\begin{vmatrix}5 & 0 & 4\\ 4 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}>0$，

故知 A 为正定，现用特征值来判断：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 0 & -4\\ -4 & \lambda-6 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-6)(\lambda-4)=0$$

特征值 $\lambda_1=5$，$\lambda_2=6$，$\lambda_3=4$ 均>0，故 A 正定。

[例 2]
$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2。$$

因此，A 为半正定阵。

[例 3] $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2。$$

所以 A 是半负定阵。

[例 4] $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1。$$

所以 A 是不定阵。

下表列出实对称 $n \times n$ 矩阵 A 正定性的条件。

($|A_i|$ 为左上角各阶主子式[注]（见后页），$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

矩　阵	特 征 值	充分必要条件
正　定	都大于零	$\|A_i\| > 0$
半正定	都不小于零	$\|A\| = 0,\ \|A_i\| \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n-1)$
负　定	都小于零	$\|A_i\| \begin{cases} < 0, & i \text{ 为奇数} \\ > 0, & i \text{ 为偶数} \end{cases}$
半负定	都不大于零	$\|A\| = 0,\ \|A_i\| \begin{cases} \leqslant 0, & i \text{ 为奇数} \\ \geqslant 0, & i \text{ 为偶数} \end{cases}$
不　定	既有大于零的又有小于零的	

前页［注］ 本书中定义的左上角主子式与主子式是不同的。左上角主子式或称顺序主子式，其定义为：

$$\det A_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

例如 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，左上角主子式为 $|A_1|=0$，$|A_2|=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=0$，它是半负定矩阵。如果是主子式，则除了 $|A_1|$、$|A_2|$ 以外，还应包括 $a_{22}=-1$。

因此，关于半正定矩阵另一种充分必要条件表示方式为：所有主子式为非负。例如 $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的主子式为 2，$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$，0，因此是半正定阵。由上表所列条件可知，$|A|=0$，$|A_1|=2>0$，同样可判定为半正定阵。

同理，半负定矩阵的充分必要条件也可表示为所有主子式为非正。上例中 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$|A|=0$，$|A_1|=0$，因而是半负定的，而所有主子式为 0，$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$，$-1$，同样可判定为半负定阵。

§ 2-4 等式约束最优化问题

本节的问题是要求解实函数 $f(X)$ 在函数定义域中一个特定（或称可行）的范围内的最优值，可行范围是由若干个（有限的）约束方程确定的。称为可行解域。对于等式约束的最优化问题，其数学模型可表示为：

$$\min f(X)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$$

$$g_i(X)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\ m<n$$

由于等式约束的限制，使可行解域大为减小。例如无约束极值

的可行解域应当是整个 E^n 空间，对二元函数 $f(x_1,x_2)$ 说，可行解域应当是整个二维平面，有了等式约束，可行解域就只是欧氏空间中的一部分，以下简称可行域，用 F 表示。

[例] 问题 1，$\min f(x_1, x_2)$

$$g(x_1, x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0$$

问题 2，$\min f(x_1, x_2)$

$$g(x_1, x_2)=x_1+2x_2-4=0 \quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

图 2—12(a) 及 (b) 表示上述两问题的可行解域。

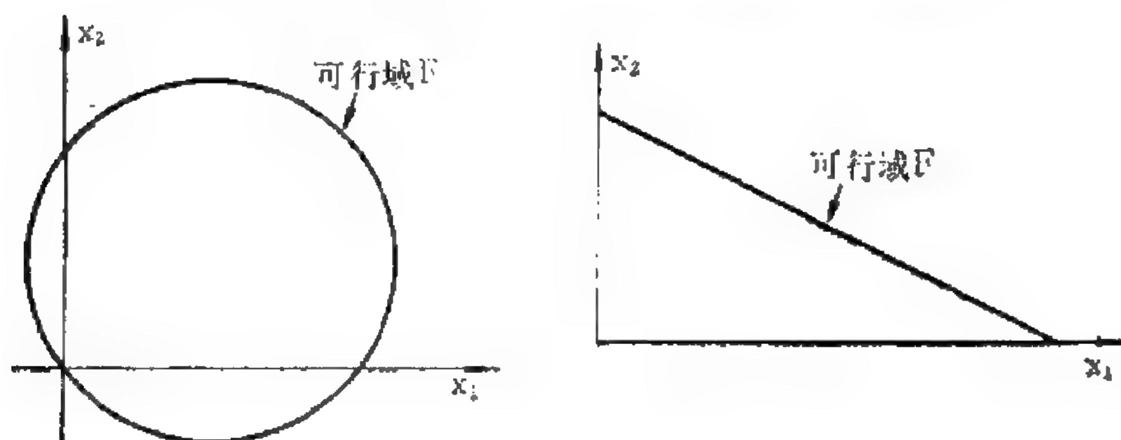


图 2—12 可行解域

(a) $g=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0$ (b) $g=x_1+2x_2-4=0$，$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$

对于解等式约束的最优化问题，1760 年拉格朗日首先提出将这种条件极值问题变为等价的无约束极值问题求解，通过拉格朗日系数 λ 将目标函数与约束等式联系起来。数学规划的许多近代结果实际上是这种古典方法的扩展和推广。

一、只有一个等式约束

$g(X)=0$，求 $\min f(X)$。

拉格朗日方法是构造一个拉格朗日函数

$$L(X, \lambda)=f(X)+\lambda g(X) \tag{2—32}$$

λ 称为拉格朗日乘数。

因为 $g(X)=0$，因此拉格朗日乘数可以为正，也可以为负，对问题的实质并没有太大影响，而原问题变为求（2—32）式函数 $L(X, \lambda)$ 的无约束极值问题，显然这与求等式约束 $g(X)=0$ 时 $f(X)$ 的条件极值是等价的。

于是得驻点条件为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \quad i=1, 2, \cdots n,\\&\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \quad 即 \ g(X)=0\end{aligned}\right\} \tag{2—33}$$

求解这两组方程（共 $n+1$ 个）可得 $n+1$ 个未知数 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 及 λ 的最优解。

引进的拉格朗日乘数是待定系数，这种求 $\min L(X, \lambda)$ 的无条件极值代替原来条件极值问题的方法称为拉格朗日乘数法。

[例] $\min f(X)=4x_1^2+5x_2^2$

$$g(X)=2x_1+3x_2-6=0$$

$$L(X, \lambda)=4x_1^2+5x_2^2+\lambda(2x_1+3x_2-6)$$

求驻点条件：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x_1}=0, \ 8x_1+2\lambda=0\\&\frac{\partial L}{\partial x_2}=0, \ 10x_2+3\lambda=0\\&\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0, \ 2x_1+3x_2-6=0\end{aligned}\right\}$$

解上述三个方程可得 $x_1=\frac{-1}{4}\lambda$，$x_2=-0.3\lambda$，$\lambda^*=-\frac{30}{7}$，$x_1^*=\frac{30}{28}=1.071$，$x_2^*=\frac{90}{70}=1.286$。

$$f(X^*)=12.857$$

图（2—13）给出了本例题的图解结果，显见最优点是等高线 $f(X)=$常数与直线 $g(X)=2x_1+3x_2-6=0$ 的相切点。

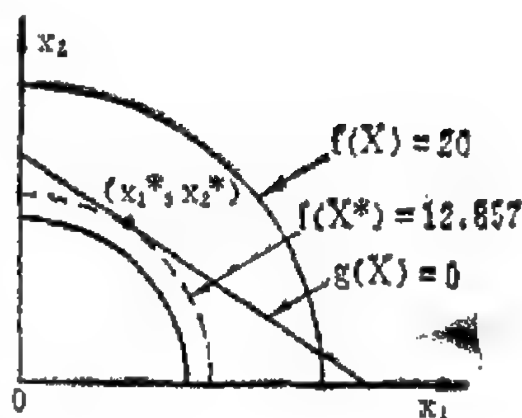


图 2—13　最优解图解说明

$\min f(X)=4x_1^2+5x_2^2$

$g(X)=2x_1+3x_2-6=0$

椭圆族 $f(X)=4x_1^2+5x_2^2$ 的无条件极值为状态平面原点，有约束时 $f(X)$ 与 $g(X)$ 的相切点为最优点，因此几何上求极值问题变为求切点位置。

椭圆梯度为 $\nabla f(X)=\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T$，约束梯度为 $\nabla g(X)=\left[\dfrac{\partial g}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_2}\right]^T$，两者在切点上是成比例的，故可写成：

$$\nabla f(X)+\lambda\nabla g(X)=0 \tag{2—34}$$

上式就是对（2—32）函数 L 求极小的驻点条件。

[例]　电力生产量的经济分配问题

设有 n 个发电厂，生产电能通过输电线供给 m 个用户，求各电厂生产量的最经济分配规律，并满足用户的总需求量 D。

令　P_i 为第 i 个电厂生产的电力，$i=1, 2, \cdots n$。

　　$f_i(P_i)$ 为第 i 个电厂生产量为 P_i 的成本，

　　$T(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 为输电线路损失（功率）。

本问题的数学模型为

$$\min_{P_i} \sum_{i=1}^{n} f_i(P_i)$$

约束　$\sum_{i=1}^{n} P_i-T(X)=D$

　　$X=(P_1, P_2, \cdots, P_n)^T$

拉格朗日函数 $L(X,\lambda)=\sum_{i=1}^{n} f_i(P_i)+\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} P_i-T(X)-D\right]$

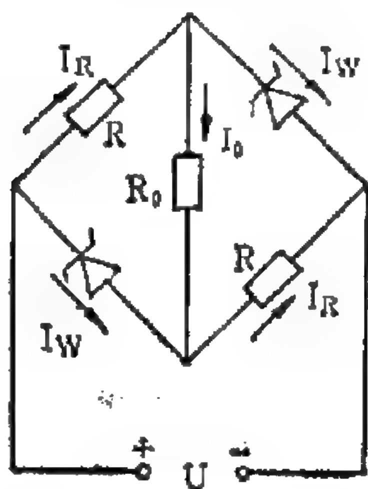
$$\frac{\partial L}{\partial P_i}=\frac{\partial f_i}{\partial P_i}+\lambda-\lambda\frac{\partial T}{\partial P_i}=0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n} P_i-T(X)-D=0$$

由 $\frac{\partial L}{\partial P_i}=0$ 可得 $\frac{\partial f_i}{\partial P_i}=\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial P_i}-1\right)$

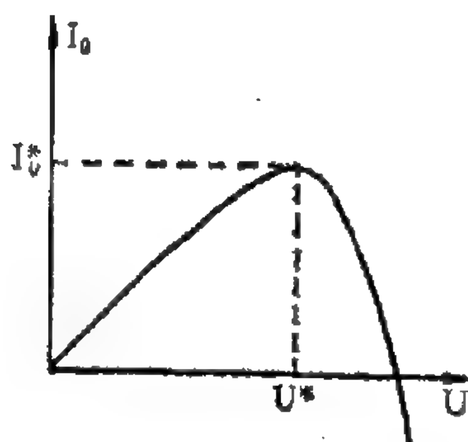
因此电能生产的最经济分配规律应当是使 λ 值等于单位功率的生产成本 $\frac{\partial f_i}{\partial P_i}$ 与输电线路损失因数 $\frac{\partial T}{\partial P_i}-1$ 之比。显然 λ 与 X 的最优值能保证满足用户对电力的需求。

[例] 求非线性电桥输出电流 I_0（随电源电压而变）的极大值。非线性电桥由两个对称的稳压管和两个电阻 R 组成，如图2—14。



非线性电桥

图 2—14



非线性电桥特性

图 2—15 $I_0=\Psi(U)$

设稳压管的伏安特性 $U_w=\varphi(I_w)$。

已知 $U=U_R+U_w=I_RR+\varphi(I_w)$,

$\therefore\quad I_0=f(I_w,\ I_R)=\psi(U)$（见图 2—15）。

由电路可得　　$U_0=U_w-U_R,\ U_0=I_0R_0$

即　　$$I_0=\frac{\varphi(I_w)}{R_0}-\frac{RI_R}{R_0}$$

因此本问题的数学模型为：

$$\left.\begin{aligned}&\max\ f(I_w,\ I_R)=\frac{\varphi(I_w)}{R_0}-\frac{RI_R}{R_0}\\&\text{约束条件}\quad I_R-I_w-I_0=0\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{—}35)$$

拉格朗日函数

$$L(I_w,\ I_R,\ \lambda)=\frac{1}{R_0}[\varphi(I_w)-RI_R]+\lambda(I_R-I_w-I_0)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial I_w}=0,\quad \lambda=\frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi(I_w)}{\partial I_w}\\&\frac{\partial L}{\partial I_R}=0,\quad \lambda=\frac{R}{R_0}\end{aligned}\right\}\qquad(2-36)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0,\ I_R-I_w-I_0=0\ \text{即约束条件。}$$

由此可得　　$\dfrac{\partial\varphi(I_w)}{\partial I_w}=R$，可求出 I_w^*。

又由 $U_0=U_w-U_R$ 得 $R_0I_0=\varphi(I_w)-R(I_w+I_0)$

$$\left.\begin{aligned}&\text{故}\quad\text{最大输出电流}\ I_0^*=\frac{1}{R+R_0}[\varphi(I_w^*)-RI_w^*]\\&\text{又}\quad I_R^*=I_0^*+I_w^*=\frac{1}{R+R_0}[\varphi(I_w^*)+R_0I_w^*]\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{—}37)$$

产生最大输出电流的电源电压为：

$$U^* = I_R^* R + \varphi(I_w^*)$$

$$= \frac{R}{R+R_0}[\varphi(I_w^*) + R_0 I_w^*] + \varphi(I_w^*) \qquad (2—38)$$

应当指出，拉格朗日乘子不仅是数学变量，用以将有约束的最优问题转化为无约束的最优化问题，而且有一定的物理意义。它表示约束函数 $g(X)$ 发生变化时，目标函数值 $f(X)$ 的变化，故又可称为灵敏度。本例中(2-36)式 $\lambda = \frac{1}{R_0}\frac{\partial\varphi(I_w)}{\partial I_w} = \frac{\partial f(I_w, I_R)}{R_0 \partial I_w}$，即参数变化引起目标函数的变化。当一个物理系统的参数变化时，约束函数 $g(X)$ 当然也会跟着变，于是

$$\lambda = -\frac{\nabla f(X)}{\nabla g(X)}\bigg|_{X=X^*} = -\frac{df(X)}{dg(X)}\bigg|_{X=X^*}。$$

但我们希望系统抗参数扰动能力比较强，即参数变化时目标函数最优值要变得小些。λ 的大小反映了系统对参数改变的自适应能力。

二、有 m 个等式约束

设约束为 $g_i(X)=0 \quad i=1, 2, \cdots, m, \quad m<n$

或写成 $G(X)=[g_1(X), g_2(X), \cdots, g_m(X)]^T=0$

求 $\min f(X), \ f(X)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

引进拉格朗日乘数向量 $\lambda=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m]^T$

$$L(X, \lambda)=f(X)+\lambda^T G(X)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X) \qquad (2—39)$$

于是原问题求 m 个等式约束下 $f(X)$ 的极值问题等价于求 $L(X, \lambda)$ 的无约束极值问题。驻点条件为

$$\frac{\partial L}{\partial X}=0, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial X}+\lambda^T\frac{\partial G}{\partial X}=0, \quad n \text{ 个。}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0, \quad G(X)=0, \qquad m \text{ 个。}$$

可求解 $n+m$ 个未知数，其中有 n 个变量 x_1，x_2，…，x_n，m 个拉格朗日乘数 λ_1，λ_2，…，λ_m。

可见比原问题维数更高，去掉 m 个等式约束的代价是求解一个维数比原问题高 m 维的最优化问题。

拉格朗日乘数法也可以推广到求解带等式约束条件的泛函极值问题，这个问题留待讨论动态最优化方法时再作介绍。

［例］ 高频滤波电感的最小重量设计

在设计电子电路中的高频滤波电感时，假设问题是在容许损耗条件下满足给定电感值的要求，使电感的总重量为最小。高频电感磁心一般用铁淦氧。设已知原始设计要求为：

电感量 $L=200$ 微亨

容许损耗 $P=0.7W$（主要是铜损，磁心损耗很小，可略去不计）。

峰值电流 $I_p=4.5A$

磁通密度 $B_m=3500$ 高斯

为了计算简便，推导约束函数及目标函数时假设磁心截面呈方形，边长为 a，窗口面积为 C^2。于是可计算得

磁心截面积 $S_c=a^2$

磁心截面的周长 $l=4a=4\sqrt{S_c}$

设绕组每匝平均长 $l_m=2l$，则 $l_m=8\sqrt{S_c}$。

磁路平均长 $l_c=\pi a+4C$

已知窗口面积 $C^2=\dfrac{Nq}{k_m}$，或 $C=\sqrt{\dfrac{Nq}{k_m}}$

q 为绕组每匝导线面积，N 为绕组匝数，k_m 为绕组填充系数。

因此 $l_c=\pi\sqrt{S_c}+4\sqrt{\dfrac{Nq}{k_m}}$

绕组铜占面积 $S_m=Nq$

则电感总重量为

$$W = r_m v_m + r_c v_c = r_m s_m l_m + r_c s_c l_c$$

$$= 8 r_m N q \sqrt{S_c} + r_c s_c \left(\pi \sqrt{S_c} + 4\sqrt{\frac{Nq}{k_m}} \right)$$

式中 r_m 及 r_c 分别为铜的比重和磁心比重。

电感量 $L = \frac{1.256 \mu N^2 S_c}{l_c} \times 10^{-2}$

$$= \frac{1.256 \mu N^2 S_c}{\pi \sqrt{S_c} + 4\sqrt{Nq/k_m}} \times 10^{-2} \text{ 微亨}$$

式中 μ 为磁心导磁率。

损耗 $P = I^2 R = j^2 \rho N q l_m = 8 j^2 \rho N q \sqrt{S_c}$

式中 ρ 为铜电阻系数，j 为电流密度，根据温升要求按经验选定。

磁通密度 $B_m = \mu H = \frac{\mu I_P N}{l_c} = \frac{\mu I_P N}{\pi \sqrt{S_c} + 4\sqrt{Nq/k_m}}$

最后可列出电感的最优重量设计的数学模型为：

$$\min \ f(X) = 8 r_m N q \sqrt{S_c} + r_c S_c \left(\pi \sqrt{S_c} + 4\sqrt{\frac{Nq}{k_m}} \right)$$

$$g_1(X) = \frac{1.256 \mu N^2 S_c}{\pi \sqrt{S_c} + 4\sqrt{Nq/k_m}} \times 10^{-2} - 200 = 0 \quad \text{电感值约束}$$

$$g_2(X) = 8 j^2 \rho N q \sqrt{S_c} - 0.7 = 0 \quad \text{损耗约束}$$

$$g_3(X) = \frac{\mu I_P N}{\pi \sqrt{S_c} + 4\sqrt{Nq/k_m}} - 3500 = 0 \quad \text{磁密约束}$$

$$X = [S_c, \ N, \ \mu, \ q]^T$$

该问题有 4 个变量，3 个约束，有最优解。

[例] $\min \ f(x) = \frac{1}{2} X^T A X + B^T X, \ X \in E^n$

约束 $CX = D$

C 为 $m \times n$ 矩阵，$m < n$，$D \in E^m$

$L(X, \lambda)=\frac{1}{2}X^TAX+B^TX+\lambda^T(CX-D)$，$\lambda$是$m$维向量。

$\nabla_X L(X, \lambda)=0$，$AX+B+C^T\lambda=0$

$\nabla_\lambda L(X, \lambda)=0$，$CX-D=0$

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & C^T \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & O \end{pmatrix}\begin{bmatrix} X^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix}, \text{令 } M=\begin{pmatrix} A & \vdots & C^T \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C & \vdots & O \end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$$

则 $\begin{bmatrix} X^* \\ \lambda^* \end{bmatrix}=M^{-1}\begin{bmatrix} -B \\ D \end{bmatrix}$，$M$ 非奇异，M^{-1} 存在。

三、用拉格朗日乘数法解不等式约束的最优化问题

一个不等式约束条件总可以化为等式约束条件，这时需要引入松弛变量 v^2

例如不等式约束　$3x_1+4x_2-6\leqslant 0$　可以化为等式约束

$$3x_1+4x_2-6+v^2=0$$

然后再用拉格朗日乘数法构造拉格朗日函数，求解其无约束极值。这种方法实际上又增加了新的变量——松弛变量，当不等式约束较多时，增加的变量数也多了，因此，计算工作量增大。关于不等式约束的非线性规划理论将在下一章详细讨论。

[例]　$\min\ x_1^2+x_2^2$

$(x_1-2)^2+(x_2-3)^2\leqslant 4$

$x_1^2=4x_2$

加松弛变量 v^2，使不等式约束化为等式约束：

$$\begin{cases} (x_1-2)^2+(x_2-3)^2-4+v^2=0 \\ x_1^2-4x_2=0 \end{cases}$$

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, v)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1[(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-4+v^2]+\lambda_2[x_1^2-4x_2]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+2\lambda_1(x_1-2)+2\lambda_2x_1=0\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2+2\lambda_1(x_2-3)-4\lambda_2=0\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-4+v^2=0\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}=x_1^2-4x_2=0\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial v}=2\lambda_1v=0\end{cases}$$

$\lambda_1=0$ 或 $v=0$，分别进行讨论

1. $\lambda_1=0$,

$$\begin{cases}2x_1(1+\lambda_2)=0\\ 2x_2-4\lambda_2=0\\ v^2=4-(x_1-2)^2-(x_2-3)^2\\ 4x_2=x_1^2\end{cases}$$

解得 $x_1=0$, $x_2=0$, $\lambda_2=0$

v 无实数解，故不成立。

2. $v=0$,

解 $\begin{cases}x_1^2=4x_2\\ (x_1-2)^2+(x_2-3)^2=4\end{cases}$

得 $x_1^*=2$, $x_2^*=1$

或 $x_1^*=3.86$, $x_2^*=3.72$

相应的 $f(X^*)=5$，

或　　$f(X^*)=28.73$。

在个别情况下，拉格朗日乘数可能不存在（见下例）。

[例]　求原点到曲线 $y^2-(x-1)^3=0$ 的距离为最小。

$$\min\sqrt{x^2+y^2}$$

约束　　$y=\sqrt{(x-1)^3}$

$$y=-\sqrt{(x_1-1)^3}$$

作图得最优点为 $x_1^*=1$，$y^*=0$

用拉格朗日乘数法：

$$L=\sqrt{x^2+y^2}+\lambda[y^2-(x-1)^3]$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}x-3\lambda(x-1)^2=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial y}=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}y+2\lambda y=0\\[2ex]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=y^2-(x-1)^3=0\end{cases}$$

将（1，0）代入，得：

$$1-\lambda\cdot 0=0$$

$$0+\lambda\cdot 0=0$$

$$0+0=0$$

说明 λ 不存在。

∵　约束函数 $g(x,y)=y^2-(x-1)^3$ 的梯度

$$\nabla g=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial g}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-3(x-1)^2\\[2ex]2y\end{bmatrix}$$

将（1，0）代入，　$\nabla g=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

§2-5　拉格朗日函数的鞍点

我们以一个具体的例子说明拉格朗日函数 $L(X,\lambda)$ 的鞍点。

[例]　$\min f(X)=60-10x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$

$$g(X)=x_1+x_2-8=0$$

$$L(X,\lambda)=60-10x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2-\lambda(x_1+x_2-8)$$

注意这里用 $L(X,\lambda)=f(X)-\lambda g(X)$，即 λ 取负号对问题实质并没有影响，驻点条件为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1}&=-10+2x_1-x_2-\lambda=0\\\frac{\partial L}{\partial x_2}&=-4+2x_2-x_1-\lambda=0\\\frac{\partial L}{\partial \lambda}&=x_1+x_2-8=0\end{aligned}\right\}\qquad(2—40)$$

$$\nabla^2L=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$x_1=\lambda+8$$

$$x_2=\lambda+6$$

可解得　$x_1^*=5$，$x_2^*=3$，$\lambda^*=-3$，$f(X^*)=+17$。

如果约束方程变为 $x_1+x_2-9=0$，则 $x_1^*=5.5$，$x_2^*=3.5$，$\lambda^*=-2.5$，$f(X^*)=14$。

灵敏度 $\left.\dfrac{df(X)}{dg(X)}\right|_{X^*}=\dfrac{-3}{1}=-3$，即原来的 λ^*。

由（2—40）可知 L 对 X 的二阶偏导数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 是正定的，因此保持 $\lambda=\lambda^*=-3$ 不变时 $x_1^*=5$，$x_2^*=3$ 为 $L(X,\lambda)$ 的极小点。又解（2—40）式可得：

$$x_1^*=8+\lambda$$
$$x_2^*=6+\lambda$$

代入 $L(X,\lambda)$ 消去 x_1，x_2，得：

$$h(\lambda)=-\lambda^2-6\lambda+8=\min_X L(X,\lambda)$$

$$\frac{\partial h}{\partial\lambda}=-2\lambda-6=0，即\ \lambda^*=-3$$

$\frac{\partial^2 h}{\partial\lambda^2}=-2<0$，故保持 $X=X^*$ 不变时，$\lambda^*=-3$ 为 $L(X^*,\lambda)$ 的极大点，$h(\lambda^*)=17=f(X^*)$。 [例毕]。

有 m 个约束方程时，λ 为 m 维向量。

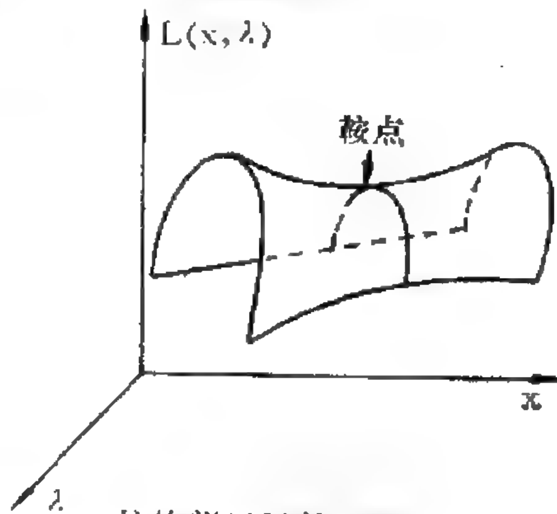
当 X 变化，而 $\lambda=\lambda^*$ 时，$L(X^*,\lambda^*)$ 为 $L(X,\lambda^*)$ 的极小点，当 $X=X^*$，而 λ 变化时，$L(X^*,\lambda^*)$ 为 $L(X^*,\lambda)$ 的极大点，因此 (X^*,λ^*) 是 $L(X,\lambda)$ 的鞍点。

拉格朗日函数鞍点的定义如下：

若 $(X^*、\lambda^*)$ 满足下述条件，则 (X^*,λ^*) 是 $L(X,\lambda)$ 的鞍点。

$$L(X^*,\lambda)\leqslant L(X^*,\lambda^*)\leqslant L(X,\lambda^*) \qquad (2—41)$$

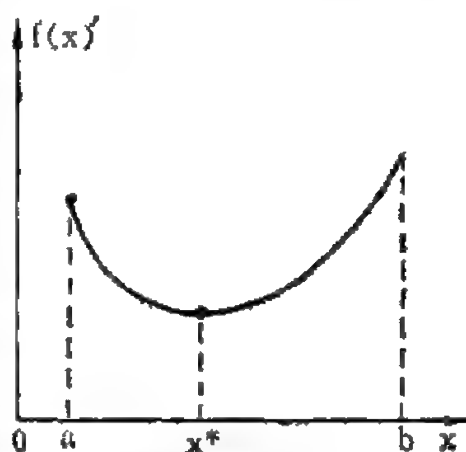
图 2—16 清楚地说明了鞍点的几何意义。



拉格朗日函数的鞍点
图 2—16

§ 2-6 凸集及凸函数

凸集及凸函数的概念是最优化问题中十分重要的概念。函数的凸性与函数极值的充分必要条件相连系。图 2—17 所示的一元函数 $f(x)$ 是下凸的，称 $f(x)$ 是具有严格凸性的函数（严格凸函数），显见极小点 x^* 在区间 $[a, b]$ 内，这是在 $[a,b]$ 内全局极小值，因此为了判断一个函数有没有极小值，只要判别这个函数是否具有凸性，为了判断函数极值是否全局极小点，只要判断该函数是否严格凸的。单变量函数 $f(x)$ 凸性的判别方法是 $f(x)$ 具有二阶导数，且 $f''(x)>0$。



严格凸函数 $f(x)$

图 2—17

一、凸集

设 D 为 E^n 中的集合，凸集的定义为：对任意 $X_1 \in D$，$X_2 \in D$，数 $\lambda \in [0, 1]$，X_1 及 X_2 为 n 维向量，若均有

$$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in D$$

则称 D 为凸集，即如果 D 中的任意两点 X_1、X_2 的连线也在 D 内，则称 D 为 E^n 中的一个凸集，如图 2—18 所示。而 X 为 X_1 与 X_2 的凸组合，

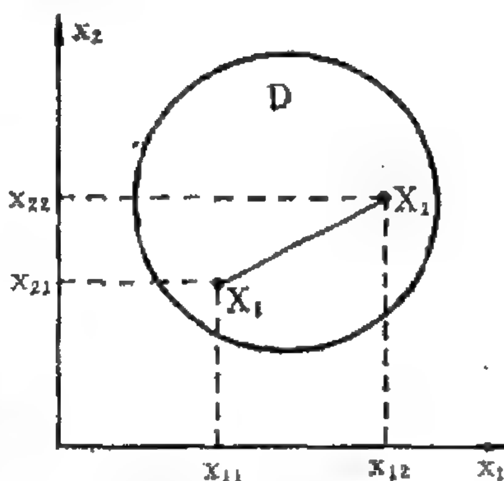


图 2—18 凸集

$$X=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2 \tag{2—42}$$

表示区间 [0, 1] 内一切 λ 值所得到的 X 点的全体，即连接 X_1、X_2 两点的线段。

图 2—19 说明了一维情况下凸集的概念。

$$x=x_2+\lambda(x_1-x_2)$$
$$=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$$



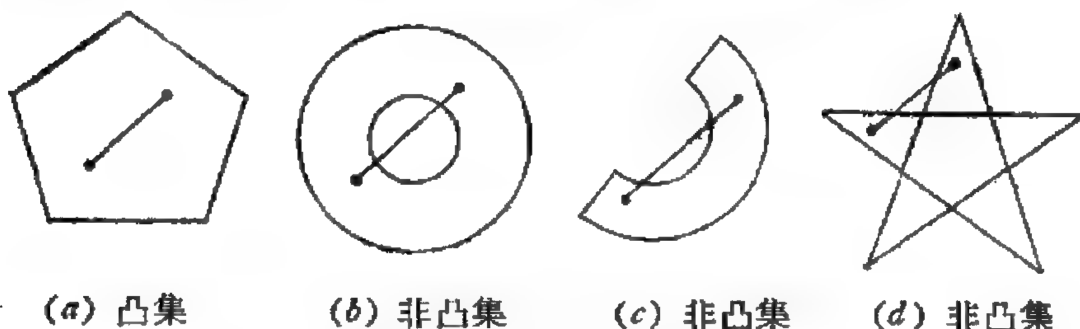
凸集的一维解释

图 2—19

图 2—18 中，若 $\lambda=0$，$X=X_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}$

$$\lambda=1,\quad X=X_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}.$$

图 2—20 表示一个平面上凸集与非凸集的例子。



(*a*) 凸集　(*b*) 非凸集　(*c*) 非凸集　(*d*) 非凸集

图 2—20　二维空间的凸集与非凸集

二、凸集和几何特征

二维空间 $X=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2$，令 $\alpha_1=\lambda$，$\alpha_2=1-\lambda$，则

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2,\qquad \alpha_1+\alpha_2=1 \tag{2—43}$$

X 表示从 x_1 x_2 平面原点到 1，2 两点连线上任一点的矢量。见图 2—21。

推广到三维空间，则有：

凸集中的任一点到原点的矢量

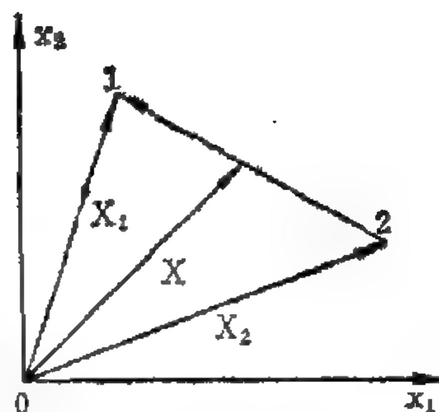


图 2—21

二维空间凸集的几何特征

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1 \qquad (2\text{—}44)$$

X 是 X_1，X_2，X_3 的凸组合，X_1，X_2，X_3 是三维座标原点到凸集中任意三点 1，2，3 的矢量。

三维空间中，圆球、椭圆球、长方体均为凸集，空心圆球是非凸集，多面体的顶点集合属于凸集，但不能用凸集中其它任意两点的凸组合线性表出。

对于 n 维空间，有

$$\left.\begin{array}{l} X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_nX_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1 \quad \alpha_i\geqslant 0 \end{array}\right\} \quad (2\text{-}45)$$

直线、平面、超平面可以认为是凸集。

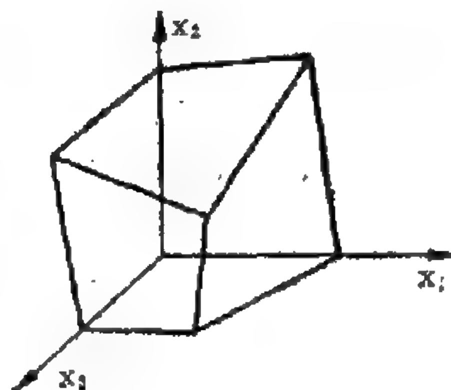


图 2—22

三维空间凸集的几何图示

三、凸函数

几何上看，单变量实函数 $f(x)$ 上任意两点连线均落在曲线上或曲线的上侧，则 $f(x)$ 为凸函数。如图 2—23 所示凸函数，其曲线上方的阴影线都是凸集。

数学上凸函数的定义为：

设 D 为凸集，若 $x_1\in D$，$x_2\in D$ $\lambda\in[0, 1]$，则当下式成立时：

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \qquad (2\text{—}46)$$

$f(x)$ 为 D 内的凸函数。

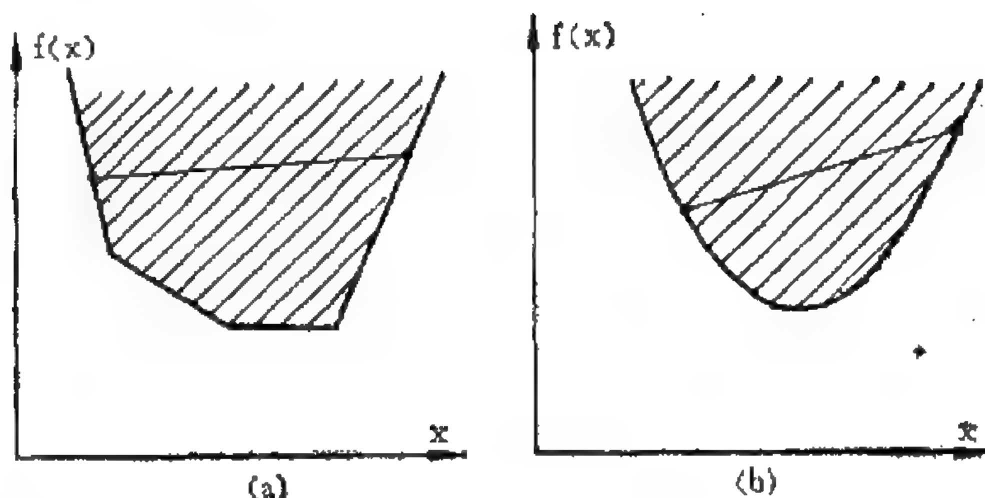


图 2—23 凸函数

当 $\lambda \in (0, 1)$，即 $0<\lambda<1$ 时，且

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

$f(x)$ 为严格凸函数。图 2—23a 为凸函数，图 2—23b 为严格凸函数。显见严格凸函数最多只有一个极小值。上述定义同样适用于多元函数。

若 $f(x)$ 为凸函数，则 $-f(x)$ 为凹函数，因此我们可以只研究凸函数。线性函数和超平面函数既可以看作是凸函数，也可以看作是凹函数，它既不是严格凸函数，也不是严格凹函数。图 2—24 表示一维情况下(2—46) 式的意义。

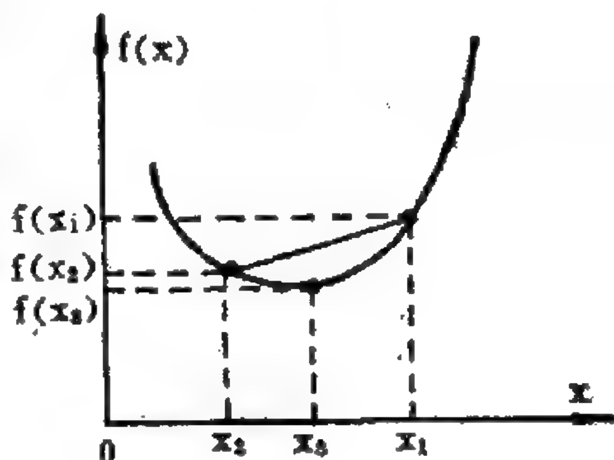


图 2—24

一维凸函数几何解释

[例] 证明 $f(x)=x^2$ 为凸函数。

由式 (2—46)，若 $f(x)=x^2$ 为凸函数，应有

$$[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]^2\leqslant\lambda x_1^2+(1-\lambda)x_2^2$$

展开以后合并同类项，得

$$\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2\geqslant 0$$

因为当 $\lambda\in(0,\ 1)$，$\lambda(1-\lambda)$ 总为正，$\lambda(1-\lambda)(x_1-x_2)^2>0$，所以 $f(x)=x^2$ 为凸函数，而且是严格凸函数。

推广到 n 维，$f(X)=X^T\mathrm{A}X$，不难证明：若 A 为对称正定阵，则 $f(X)$ 是定义在 E^n 上的严格凸函数，若 A 为对称半正定阵，则 $f(X)$ 是凸函数。

四、凸函数的性质

1． 设 $f(X)$ 是凸集 D 内的凸函数，$\alpha>0$，则 $\alpha f(X)$ 也是 D 内的凸函数。

2． 设 $f_1(X)$、$f_2(X)$ 为凸集 D 内的凸函数，α 和 β 为任意正数，则 $\alpha f_1(X)+\beta f_2(X)$ 仍为 D 内的凸函数，即凸函数的线性组合仍为凸函数。

3． 设 X_1 及 X_2 是定义在 D 内的凸函数的两个最小点，则这两点的函数值相等，函数 $f(X)$ 的最小点集合是凸集。$f(X)$ 若为严格凸函数，只有一个极值点，它是全局极值，$\dfrac{df}{dX}=0$ 就是 $f(X)$ 极小值的充分必要条件。

我们已知，若 A 为正定，则 $f(X)=X^T\mathrm{A}X$ 在 $X^*=0$ 有全局极小值，所以 $X^T\mathrm{A}X$ 必为严格凸函数。

4． 如果目标函数为严格凸函数，而可行域 F 为凸的，即约束条件均为凸函数，则 $f(X)$ 是单峰的，即 F 中只有一个局部极小点，因而也是全局极小点，如图 2—25。因此在这种情况下，第四章将讨论的库恩-图克条件是在不等式约束条件下目标函数有唯一（全局）极小值的充分必要条件。

五、函数的凸性条件

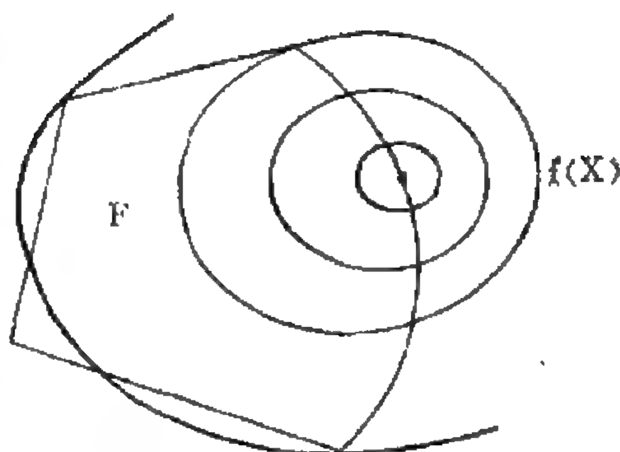


图 2—25
目标函数为严格凸函数

以上说明了函数的凸性与极值点是否存在有密切关系，下面我们从函数的梯度和二阶偏导数矩阵来判断函数的凸性。

1. 按梯度判断凸性

定理 1. 设 $f(X)$ 为凸集 $D \subset E^n$ 内可微函数，则 $f(X)$ 为 D 内的凸函数的充分必要条件如下：对任意 X 及 $\triangle X$

$$f(X+\triangle X) \geqslant f(X)+\nabla^T f(X) \triangle X \qquad (2-47)$$

其中 $X \in D$，$X+\triangle X \in D$

这个定理可由凸函数定义（2—46）式证明，[证明见本节附录]。

2. 由二阶偏导数矩阵 A 判断凸性

定理 2. $f(X)$ 是定义在凸集 D 内的二次可微函数，则 $f(X)$ 为 D 内的凸函数的充分必要条件如下：$f(X)$ 的二阶偏导数矩阵 $\nabla^2 f(X)$ 处处半正定，$f(X)$ 为 D 内的严格凸函数的充分必要条件是 *Hesse* 阵为正定。

[例] $f(x_1, x_2)=c(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-ax_1+ax_2)^2 + (1-bx_1-bx_2)^2$

式中 $a=4$，$b=4$，$c=10$

为了推演方便，令 $x_1+x_2=u$，$x_1-x_2=v$，则得：

$$f(v, u)=c(u^2-av)^2+(1-bu)^2 \qquad (2-48)$$

这个函数就是所谓“香蕉”函数或 Rosenbrock 试验函数，为

检验 $f(v, u)$ 的凸性，求 Hesse 阵：

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2a^2c & -4acu\\ -4acu & 4c(3u^2-av)+2b^2\end{bmatrix}$$

$$\because\quad c>0,\qquad \therefore\quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}>0$$

$$\begin{aligned}\det A&=8a^2c^2(3u^2-av)+4a^2b^2c-16a^2c^2u^2\\&=4a^2c[2c(u^2-av)+b^2]\end{aligned}$$

$\det A>0$，则 A 为正定，

即 $u^2>a\left(v-\dfrac{b^2}{2ac}\right)$ 是 $f(v, u)$ 为严格凸函数的条件。

求驻点：$\dfrac{\partial f}{\partial v}=2ac(av-u^2)=0\qquad\qquad u^2=av$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=4cu(u^2-av)-2b(1-bu)=0\qquad bu=1$$

驻点为 $u=\dfrac{1}{b},\qquad v=\dfrac{1}{ab^2}$。

用驻点检验不等式 $u^2>a\left(v-\dfrac{b^2}{2ac}\right)$ 成立，可见函数 $f(v,u)$ 有唯一极小值，$f(v^*, u^*)=0$

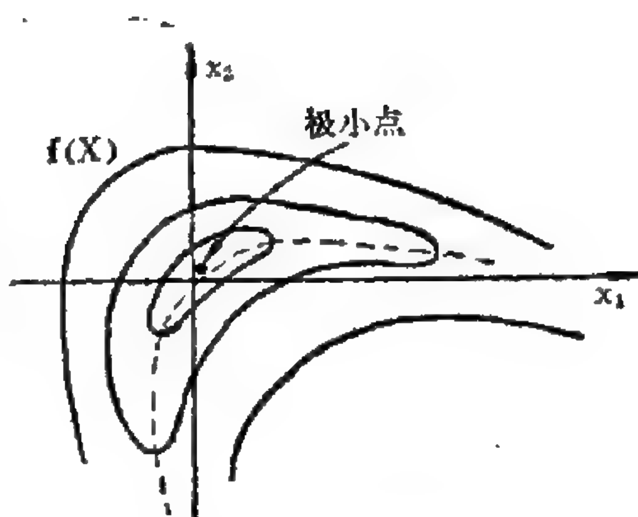
数字计算如下：$a=b=4$，$c=10$，故 $u^*=\dfrac{1}{4}$，$v^*=\dfrac{1}{64}$。

$$x_1^*=\frac{17}{128},\quad x_2^*=\frac{15}{128}。$$

图 2—26 画出了 $f(x_1, x_2)$ 的等高线及极小点，由图可见，函数有一部分是凸的，另一部分是非凸的，虚线表示函数凸性的边界，由不等式条件

$$u^2 > a\left(v - \frac{b^2}{2ac}\right)$$

或 $(x_1+x_2)^2 > 4(x_1-x_2)-$ -0.8，该不等式不一定能满足，（试从 $x_1=1$，$x_2=-2$ 代入），即 Hesse 阵不是处处正定，所以函数有非凸的区域。



Rosenbrock 试函验数

$f(X)=10[(x_1+x_2)^2-4(x_1-x_2)]^2$
$+[1-4(x_1+x_2)]^2$

虚线右下侧函数非凸

图 2—26

小结：

1. 凸集

集合 D 中任意两点的连线均在 D 内，则称 D 为凸集，用数学式表示：$X_1\in D, X_2\in D$，$\lambda\in(0,1)$，即 $0<\lambda<1$，则 $X=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\in D$。

2. 凸函数

单变量函数 $f(x)$ 上任意两点的连线位于曲线上或曲线的上侧，则 $f(x)$ 称为凸函数。

凸集 D 内，$X_1\in D$，$X_2\in D$，$\lambda\in(0,1)$，

若 $f[\lambda X_1+(1-\lambda)X_2]\leqslant\lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2)$，则 $f(X)$ 为凸函数，只取小于号时，$f(X)$ 为严格凸函数。

直线是凸函数（也可以说成是凹函数），但不是严格凸函数，凸函数并不一定到处连续和可微。

3. （严格）凸函数的负值为（严格）凹函数，求极大值问题要用函数凹性分析。

4. $f(X)$ 若为严格凸函数，则 $\frac{df}{dX}=\nabla f(X)=0$ 就是 $f(X)$ 极小的充分必要条件。

5. 若 $X\in D$, $X+\triangle X\in D$, 则

$$f(X+\triangle X)\geqslant f(X)+\nabla^T f(X)\triangle X \text{ 时,}$$

$f(X)$ 为 D 内凸函数。

6. $X\in D$, $f(X)$ 的二阶偏导数矩阵 $\nabla^2 f(X)$ 处处正定, 则 $f(X)$ 为 D 内严格凸函数; $\nabla^2 f(X)$ 处处半正定, 则 $f(X)$ 为凸函数。

7. 若目标函数 $f(X)$ 是严格凸函数, 约束函数 $g(X)$ 是凸函数, 可行域是凸的, 则库恩-图克条件(见第四章)是在不等式约束 $g(X)\leqslant 0$ 下, 目标函数 $f(X)$ 有唯一(全局)极小值的充分必要条件。

附录 函数凸性条件定理 1 及 2 的证明

[定理 1 的证明] $f(X)$ 为 D 内凸函数的充分必要条件为

$$f(X+\triangle X)\geqslant f(X)+\nabla^T(X)\triangle X$$

证条件的必要性:

设 $f(X)$ 为 D 内凸函数, 对任意 α, $\alpha\in[0, 1]$, 恒有:

$$f[\alpha(X+\triangle X)+(1-\alpha)X]\leqslant\alpha f(X+\triangle X)+(1-\alpha)f(X)$$

$$\frac{f[X+\alpha\triangle X]-f(X)}{\alpha}\leqslant f(X+\triangle X)-f(X)$$

令 α 从正趋向于 0, 则上式左端极限

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f[X+\alpha\triangle X]-f(X)}{\alpha}=\nabla^T f(X)\triangle X$$

$$\therefore\quad \nabla^T f(X)\triangle X\leqslant f(X+\triangle X)-f(X)$$

证条件的充分性：

设任意 X，$X+\triangle X\in D$，$f(X+\triangle X)\geqslant f(X)+\nabla^T f(X)\triangle X$ 均成立，证明 $f(X)$ 必为 D 内的凸函数。设 X_1、$X_2\in D$，令 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$，$0<\alpha<1$，则：

$$f(X_1)\geqslant f(X)+\nabla^T f(X)(X_1-X) \quad ①$$

$$f(X_2)\geqslant f(X)+\nabla^T f(X)(X_2-X) \quad ②$$

$\alpha\times① + (1-\alpha)\times②$：

$$\alpha f(X_1)+(1-\alpha)f(X_2)\geqslant f(X)+\nabla^T f(X)[\alpha(X_1-X)+(1-\alpha)(X_2-X)]$$

或 $$\alpha f(X_1)+(1-\alpha)f(X_2)\geqslant f(X)$$

$$\alpha f(X_1)+(1-\alpha)f(X_2)\geqslant f[\alpha X_1+(1-\alpha)X_2]$$

∴ $f(X)$ 是 D 内的凸函数。

[定理 2 的证明]

$$f(X+\triangle X)=f(X)+\nabla^T f(X)\triangle X+\frac{1}{2}\triangle X^T \mathrm{A}\triangle X$$

若 A 处处为半正定，对任意 $\triangle X$，恒有：

$$\triangle X^T \mathrm{A}\triangle X\geqslant 0$$

则 $$f(X+\triangle X)\geqslant f(X)+\nabla^T f(X)\triangle X,$$

由定理 1 可知，$f(X)$ 为 D 内凸函数。

习　题

1. 按 $P=1$ 与 $P=2$ 两种情况讨论函数 $f(x)=(x)^{2P}$ 为极小的充分必要条件。

2. 求第一章习题中题 1a 与 1c 的最优解。

3. 求 $\max f(x_1, x_2)=x_1x_2$

约束条件为 $g(x_1, x_2)=x_1+x_2-2=0$

4. 已知二次函数 $f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$

a. 用向量矩阵形式表示二次型。

b. $f(x_1, x_2)$ 是否为正定，是否奇异。

c. $f(x_1, x_2)$ 是否为凸函数。

5. 下述函数中哪个是二次型。

$$f(X)=x_1+2x_2^2$$

$$f(X)=x_1^2-x_2^2$$

$$f(X)=x_1x_2$$

$$f(X)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$$

6. 判断 X^TAX 是否正定，设 A 为

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. 证明 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x>0$ 时是严格凸函数。

$x<0$ 时是严格凹函数。

8. 求二次型 $f(X)=x_1x_2$ 的极大与极小值，约束条件为 $x_1^2+x_2^2=1$，作图说明。

9. 判断第一章习题中，题 2，a、b、c 的可行域是否凸集。

10. 证明 $f(X)=\frac{1}{2}X^TQX$ 是严格凸函数，当且仅当 Q 为正定。

11. 求 σ^2 的极小值，已知

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n} T_i^2 x_i^2$$

约束为 $c_1=\sum_{i=1}^{n} x_i$

T_i 及 c_1 均为常数。

12. 反馈控制系统中应用的相位补偿器设由超前网络组成。其中串联支路为电阻 R_1 和电容 C 的并联，从并联电阻 R_2 上取得输出电压 $v_0(t)$，输入信号电压为 $v_i(t)$。如图 2—27。

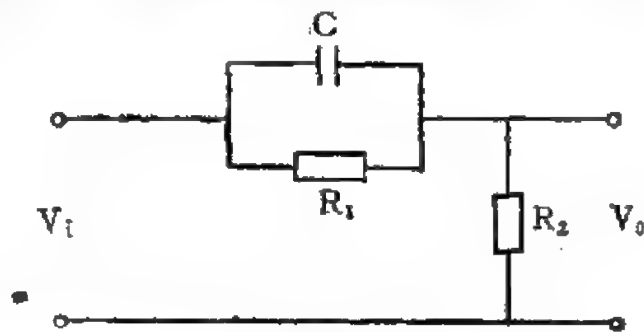


图 2—27

已知 $\frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}=$

$=G_c(j\omega)=\alpha\frac{1+j\omega T}{1+\alpha j\omega T}$

$\alpha=\frac{R_1}{R_1+R_2}$ 为常数

$T=R_1C$

传递函数 $G_c(j\omega)$ 的相位为：

$$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\omega T-\mathrm{tg}^{-1}\alpha\omega T$$

设 ωT 在 0 到 ∞ 区间内取值，求 ωT 的最优值使相位 ϕ 为最大。

第三章　线性规划

线性规划是最简单、应用最广泛的一种数学规划方法，也是最早使用的一种最优化方法，在 1939 年就已出现。线性规划的数学模型即目标函数和全部约束式都是变量的线性函数。线性规划可以看作是非线性规划的一种特殊形式，在非线性规划算法中有相当一部分是从线性规划引伸发展而来。线性规划的发展与计算方法的改进有关，1947 年，丹茨格（Dantzig）提出了单纯形法，使线性规划的算法渐趋成熟。线性规划的广泛应用也与计算机的发展紧密相关。变量少、约束少的小规模问题，也许用手算还勉强可以，几百个变量几百个约束的大规模问题就非要用电子计算机不可。在计算机发展的初期，1956 年以前，67 个约束的线性规划问题用计算机求解要 60 分钟，随着算法的改进和计算机的发展，到 1963 年，这样的问题只需 28 秒即可求解。

§ 3-1　线性规划的数学模型

线性规划的内容是求决策变量 x_1，x_1，…，x_n 使线性目标函数 $f(X)=C^TX$ 在规定的约束 $AX\leqslant B$ 的条件下为最优值。

如果我们求的是极大值，则线性规划的数学模型可表示如下：

$$\max\ f(X)=C^TX \tag{3—1}$$

$$AX\leqslant B \tag{3—2}$$

$$X\geqslant 0 \tag{3—3}$$

式中　　$X=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$。

$C=[c_1, c_2, \cdots, c_n]^T$，$c_j$ 为目标函数中的变量 x_j 的系数。$j=1, 2, \cdots, n$。

$B=[b_1, b_2, \cdots, b_m]^T$，$b_i$ 为第 i 个约束式的常数，$i=1, 2, \cdots, m$。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} 为第 i 个约束式中变量 x_j 的系数。

(3—1)～(3—3) 式也可以写成：

$$\max\ f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3—4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{3—5}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{3—6}$$

(3—1)～(3—3) 式的可行解集可定义为

$$F=\{X \mid X \in E^n, \ AX \leqslant B, \ X \geqslant 0\} \tag{3—7}$$

当 $B \geqslant 0$ 时，(3—1)～(3—3) 式所表示的数学模型称为标准形线性规划。任何一个线性规划问题总可以转化成 (3—1)～(3—3) 式所示的标准形式。

(3—2) 式称为不等式约束，如果引入松弛变量 $V=[v_1, v_2, \cdots, v_m]^T$，则 (3—2) 式所表示的不等式约束就转化成等式约束了。

$$AX+V=B \tag{3—8}$$

其中 $$X \geqslant 0,\ V \geqslant 0 \tag{3—9}$$

(3—9) 式表示变量 X，V 均为非负。

线性规划最早应用于生产经济管理，我们可以用下述例子说明(3—1)～(3—3) 式线性规划模型的生产实际意义。

设工厂生产 n 种产品，x_j 是给定时间内应生产的第 j 种产品产量，是决策变量，通过管理加以控制。(3—1) 式目标函数 $f(X)$ 反映了规定生产时间内所得到的总利润或总效果，c_j 表示第 j 种产品的单位利润（或产值），称为利润（或产值）系数，c_j 也可以表示第 j 种产品的单位成本，即成本系数，则这样表示的线性规划问题将是求目标函数极小值。(3—2) 式中 m 个线性约束式表示 m 种可用资源的限制，b_i 是第 i 种资源的数量。a_{ij} 是生产第 j 种产品一单位所需第 i 种资源数量。

§ 3-2 线性规划模型的建立

［例 1］ 设有两个电站，功率输出分别为 x_1、x_2，最大功率输出分别为P_1、P_2。设两个电站供给负荷的总功率为 L，而总费用函数为 $f(X)=x_1+2x_2$，即电站 2 生产单位电力的成本为电站 1 的两倍。求两电站的负荷分配，使生产总费用最小[注]。

最优负荷分配问题的数学模型可表示如下：

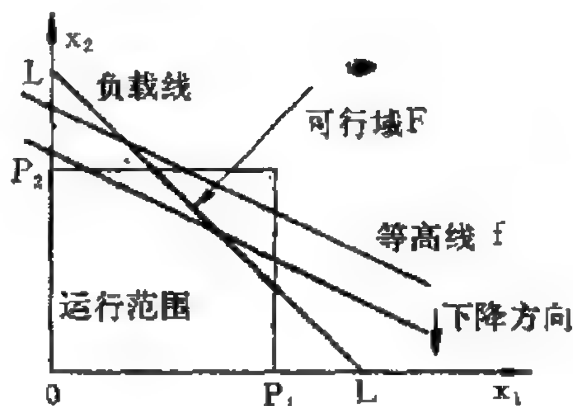
$$\min\ f(X)=x_1+2x_2$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant P_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant P_2$$

$$x_1+x_2=L$$

［注］ 关于电站出力最优分配问题还有更深入的问题需要讨论，可参阅电力系统最优化方面的专著。

我们可用图解来说明（见图 3—1）。



总负荷 L 不变时两电站的负荷分配。

等高线 $f(X)=x_1+2x_2=$常数

图 3—1

$0\leqslant x_1\leqslant P_1$，$0\leqslant x_2\leqslant P_2$，形成了允许的运行范围，而负载线 $x_1+x_2=L$ 这一约束使解的可行域只限于负载线上运行范围内的一段。用 F 表示可行域。

等高线即目标函数 $f(X)=x_1+2x_2=$常数沿箭头方向是下降的，显见 $\min f(X)$ 发生在 $x_1^*=P_1$，$x_2^*=L-P_1$ 这一点，即 $X^*=\begin{bmatrix}P_1\\L-P_1\end{bmatrix}$，电站 1 生产电力直到额定 P_1 为止，其余部分由电站 2 生产。

如果现在的问题改变为当负荷 L 变化时求最优运行点，显见总负荷变化范围应为：

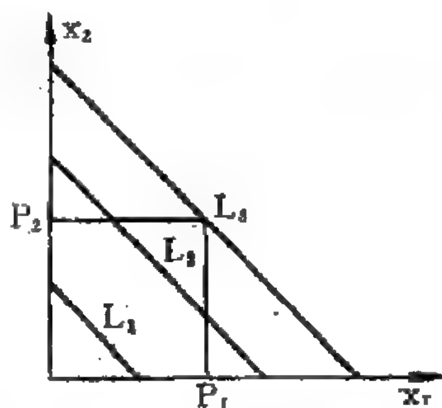
$$0\leqslant L\leqslant P_1+P_2$$

因为电站 1 生产电力和电站 2 生产电力相同时，电站 1 只需一半的费用，因此更为经济。

当 $0\leqslant L<P_1$ 时，$X^*=\begin{bmatrix}P_1\\0\end{bmatrix}$

$P_1<L<P_1+P_2$ 时，$X^*=\begin{bmatrix}P_1\\L-P_1\end{bmatrix}$

$L=P_1+P_2$ 时，$X^*=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$



总负荷 L 变化时两电站最经济运行状态

图 3—2 $L(X)=x_1+x_2$

图 3—2 表示总负荷 L 分别为 L_1、L_2、L_3 时，可用图解方法确定最优负荷分配。

［例 2］ 求线性电阻电桥中消耗的总功率为最小时的最优参数。

电路如图 3—3，设任意支路电阻为 R_k，其中电流为 I_k。电阻 R_k 上电压为 V_k。

已知： $V_k = I_k R_k$

$I_{k\min} \leqslant I_k \leqslant I_{k\max}$

$k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$

V_k、$I_{k\min}$ 及 $I_{k\max}$ 为已知常数。

因此问题可表述为：

求变量 $I_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$，使 $\sum\limits_{k=1}^{5} V_k I_k$ 为极小。

约束条件为：

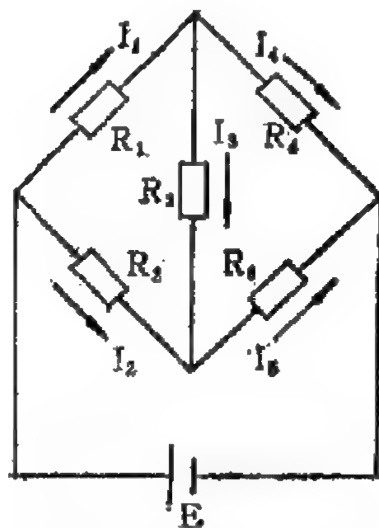


图 3—3 线性电阻电桥

$$I_{k\min} \leqslant I_k \leqslant I_{k\max}$$

$$I_1 = I_3 + I_4$$

$$I_5 = I_2 + I_3$$

这是五个变量的线性规划问题；求出最优值 I_k^* 即可求得电路各电阻的最优参数 $R_k^* = \dfrac{V_k}{I_k^*}$。

［例 3］ 电子系统的可靠性问题

设计一架飞机上的电子系统，确定各部件的失效率使执行飞行任务时，系统可靠性达到规定要求，而为了保证可靠性所需费用为极小。

设部件失效时间近似地服从负指数分布，各部件的工作是独立的，系统由 n 个部件组成。飞机共执行 m 次飞行任务，第 i 次飞行中系统可靠性可用下式表示：

$$R_i = \prod_{j=1}^{n} e^{-x_j t_{ij}} \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

Π 表示连乘符号。

令 R_{i0} 为第 i 次飞行允许的可靠性最低值，x_j 为第 j 个部件的失效率，失效率定义为 $-\frac{1}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt}$，即每小时有百分之几的部件失效，或单位时间内失效的概率。

t_{ij} 为第 i 次飞行中第 j 个部件应当可靠运行的时间，c_j 为部件 j 每单位时间有一次失效所消耗费用，于是电子系统的可靠性问题可表述为：

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{约束} & \prod_{j=1}^{n} e^{-x_j t_{ij}} \geqslant R_{i0} \\ \text{或写成} & -\sum_{j=1}^{n} x_j t_{ij} \geqslant \log R_{i0} \end{array}\right\} \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$s_j \leqslant x_j \leqslant r_j \qquad j=1, 2, \cdots, n$$

r_j、s_j 分别为部件 j 失效率的上界与下界。

这是有 n 个变量的随机线性规划问题。

[例 4] 一阶线性离散系统的动态控制[注]

线性规划对于解决有限个离散时刻的动态最优化问题有时也是很有效的。

已知系统状态方程为 $x(k+1)=ax(k)+bu(k)$

设 $x(0)$ 为已知，从 $x(0)$ 开始，调整 $u(k)$，使下述目标函数为极小：

$$\sum_{k=1}^{2} c(k)x(k)=c(1)x(1)+c(2)x(2)$$

约束条件 $x(k)\geqslant 0$,

[注] 离散系统的最优控制详见第十一章。

$$U_{km} \geqslant u(k) \geqslant 0 \begin{cases} u(0) \leqslant U_{0m} \\ u(1) \leqslant U_{1m} \\ u(0) \geqslant 0,\ u(1) \geqslant 0 \end{cases}$$

令 $y_1 = x(1)$，$y_2 = x(2)$，$y_3 = u(0)$，$y_4 = u(1)$，则上述问题变为求变量 y_1，y_2，y_3，y_4，

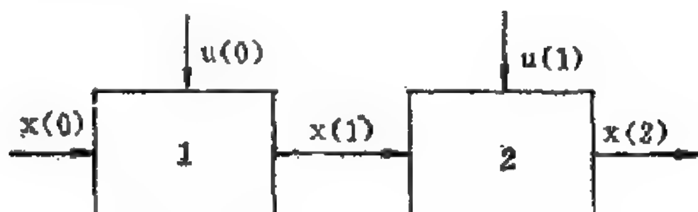


图 3—4 一阶线性离散系统方框图

$$\min\ c(1)y_1 + c(2)y_2$$

约束：

$$y_1 = ax(0) + by_3$$

$$y_2 = ay_1 + by_4$$

$$y_3 \leqslant U_{0m}$$

$$y_4 \leqslant U_{1m}$$

已知 $x(0)$，$y_i \geqslant 0$　$i = 1, 2, 3, 4$，这是线性规划的标准形式。

用线性规划解动态问题虽然很麻烦，但是用单纯形法求解很有效，在计算机上求解很快。

[例 5] 跟踪问题

已知 X_d 为给定的状态，要求控制系统跟踪误差最小。误差 $E_k = X_{dk} - X_k$ 表示第 k 点给定值与实际值之差。则问题的数学模型可写成：

$$\min \sum_{k=1}^{N} E_k = \sum_{k=1}^{N} (X_{dk} - X_k)$$

附加条件：$E_k \geqslant 0$，即希望给定值总大于实际值，不会超调。

约束条件：

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k$$

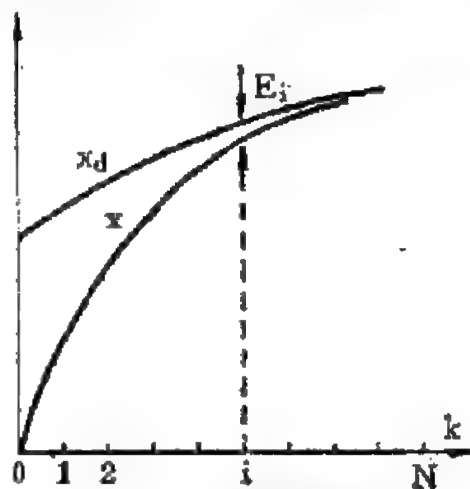


图 3—5 跟踪误差

用迭代法：

$$X_1 = AX_0 + Bu_0 \leqslant X_{d1}$$

$$X_2 = AX_1 + Bu_1$$

$$= A^2X_0 + ABu_0 + Bu_1 \leqslant X_{d2}$$

…………………

$$X_N = A^N X_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1} Bu_i \leqslant X_{dN}$$

$U_{max} \geqslant u_i \geqslant 0 \quad i = 0，1，2，\cdots N-1$。

求 $\sum_{k=1}^{N} E_k$ 最小等同于求 $\sum_{k=1}^{N} X_k$ 最大，即：

$$\max \quad \sum_{k=1}^{N} A^k X_0 + Bu_0 \sum_{k=1}^{N} A^{k-1} + \cdots + Bu_{N-1}$$

$\because \quad X_0 = 0$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{N} X_k = Bu_0 \sum_{k=1}^{N} A^{k-1} + \cdots + Bu_{N-1}$$

$$= (1 + A + \cdots + A^{N-1}) Bu_0 + (1 + A + \cdots + A^{N-2}) Bu_1$$

$$+ \cdots + Bu_{N-1}$$

$$= C_0 u_0 + C_1 u_1 + \cdots + C_{N-1} u_{N-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} C_i u_i$$

式中 $$C_i=\sum_{j=0}^{N-i-1}A^jB$$

问题的数学模型变为：

$$\max\sum_{i=0}^{N-1}C_iu_i$$

约束： $$U_{\max}\geqslant u_i\geqslant 0$$

求 u_i，$i=0, 1, \cdots, N-1$。

[例 6] 燃料消耗最小问题

设一个离散线性控制系统，其状态方程为

$$X(k+1)=AX(k)+Bu(k)$$

消耗燃料与控制变量成正比，不论控制作用 $u(k)$ 为正或负都要消耗燃料，$u(k)$ 越大，消耗燃料越多，要求燃料消耗最小，则数学模型应当写成如下形式：

$$\min\sum_{k=0}^{N-1}|u(k)|$$

目标函数中包括绝对值，因此是非线性的，引入新变量 $a(k)$，使 $|u(k)|\leqslant a(k)$，以便将非线性函数变为线性函数。$-a(k)\leqslant u(k)\leqslant a(k)$ 可化成以下两式：

$$u(k)\leqslant a(k)$$

$$-u(k)\leqslant a(k)$$

于是问题变为求： $\min\sum_{k=0}^{N-1}a(k)$，这是线性的目标函数。

[例 7] 产品产量安排问题

某工厂生产甲乙两种产品，其产量分别为 x_1、x_2 个单位，每天的可用资源限制为：

原料 1575Kg，

面积　1500m²，

工时　7 小时 = 420 分钟。

资源分配及产值见下表。

名　　称	符号及单位	甲	乙	注
资源消耗系数	a_1 m²/单位产量	4	5	占地面积
	a_2 Kg/单位产量	5	3	原料消耗
	a_3 单位/小时	60	30	生产率
产值系数	c 元/单位产量	13	11	产值（利润）

问题是每天应生产 x_1、x_2 多少，使

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2$$

为最大。

本问题的数学模型可表示如下：

$$\max\ f(X)=13x_1+11x_2$$

约束

$$4x_1+5x_2\leqslant 1500$$

$$5x_1+3x_2\leqslant 1575$$

$$x_1+2x_2\leqslant 420\quad\left(\frac{x_1}{60}+\frac{x_2}{30}\leqslant 7\right)$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

§ 3-3　线性规划问题的图解法

两个变量的线性规划问题较简单，可以用图解法求解，较直观，通过对两个变量的线性规划问题求解，可以总结出求解多变量

线性规划问题的一般规律。

例如已知线性规划的数学模型为

$$\max \quad f(X)=13x_1+11x_2$$

$$\text{约束}\quad 1)\quad 4x_1+5x_2\leqslant 1500$$

$$2)\quad 5x_1+3x_2\leqslant 1575$$

$$3)\quad x_1+2x_2\leqslant 420$$

$$x_1\geqslant 0\quad x_2\geqslant 0$$

这个问题可用图解方法求解如图 3—6。

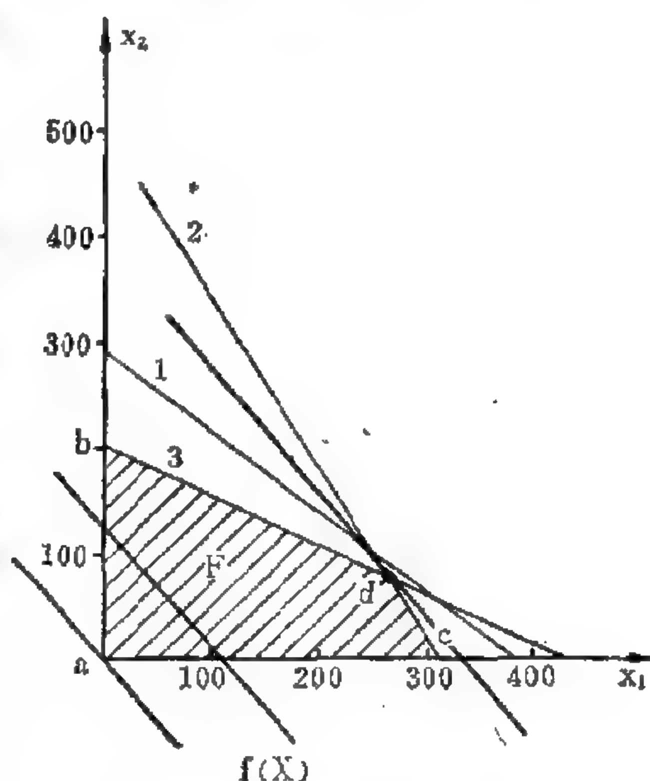
下面为了说明图解方法，先介绍几个名词的定义。

可行解——满足上述不等式的一组解（x_1，x_2）称为可行解，即满足 $AX\leqslant B$，$X\geqslant 0$ 的解，它可以有无穷多个。

最优解——使目标函数 C^TX 为极值的可行解。

可行解域 F——约束条件包含的范围，即变量 X 满足约束条件的可行范围，由无穷多个可行解组成，最优解应在该域内。

如图 3—6 中 $acdb$ 四边形所包含的区域，即为可行解域，$acdb$ 四边形是由 $x_1=0$，$x_2=0$，$5x_1+3x_2=1575$，$x_1+2x_2=420$ 四条直线所组成。四边形四个顶点的解如下表：



用图解法求解线性规划问题

图 3—6　$f(X)=13x_1+11x_2$

	x_1	x_2	$f(X)$
a	0	0	0
c	315	0	4095
d	270	75	4335
b	0	210	2310

原点 a，$X_a=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$是可行解，满足约束，但显然不是最优解。取 $f(X)$ 不同值可得一组平行的等高线，远离原点的 $f(X)$ 值越大，靠近原点的 $f(X)$ 值则越小。离开原点最远而又在可行解域内的点是极大值点，即 d 点。

最优点[1]，$X_d=\begin{bmatrix}270\\75\end{bmatrix}$，最优解 $f(X^*)=4335$。

显然最优解满足全部约束。

从 §3—2 中例 7 可知，约束 1 是仓库面积约束，现在所用仓库面积为 $4\times270+5\times75=1455\text{m}^2$，还有 45m^2 未用，即有 45m^2 的松动余地。

本例中变量 2 个，约束不等式 3 个，有一个约束多余。约束 2 和 3 称为有效约束，约束 1 称为松弛约束。

改变 c_1、c_2，则 $f(X)$ 直线的斜率也改变，斜率较小时，可能求得的最优点在点 c，而斜率较大时，则可能求得的最优点在点 b。

由上述图解结果可知：

目标函数极值一定在可行域多边形的顶点上，这些顶点的解称为基础可行解。最优解当然存在于这些基础可行解中，因此线性规划算法应当是从一个顶点迭代计算到另一个顶点（即相应地从一个基础可行解迭代计算得另一个基础可行解），其目标函数值应当越来越好。顶点数是有限的，因此线性规划算法总是收敛的，能在有限步内找到最优解。

下面我们分析几种特殊情况：

1. 目标函数平行于可行域多边形的一边时，则最优解不是唯一

的，在这条边上的所有点都是最优解。图 3—7 说明了这一情况。

[例]　max　$f(X)=18x_1+10x_2$

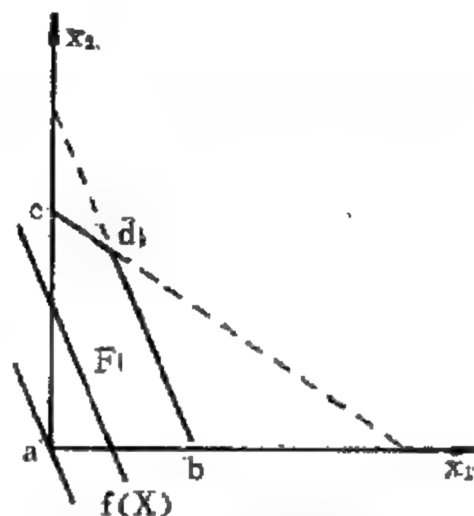
约束　$9x_1+5x_2\leqslant 45$

$7x_1+9x_2\leqslant 63$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$

计算 $abcd$ 四个顶点参数得下表：

	x_1	x_2	$f(X)$
a	0	0	0
c	0	7	70
b	5	0	90
d	1.96	5.48	90



目标函数平行于可行解域的一边　图 3—7

目标函数与直线 $9x_1+5x_2=45$ 平行，bd 线段上所有点均为最优解。

2. 可行域为无界

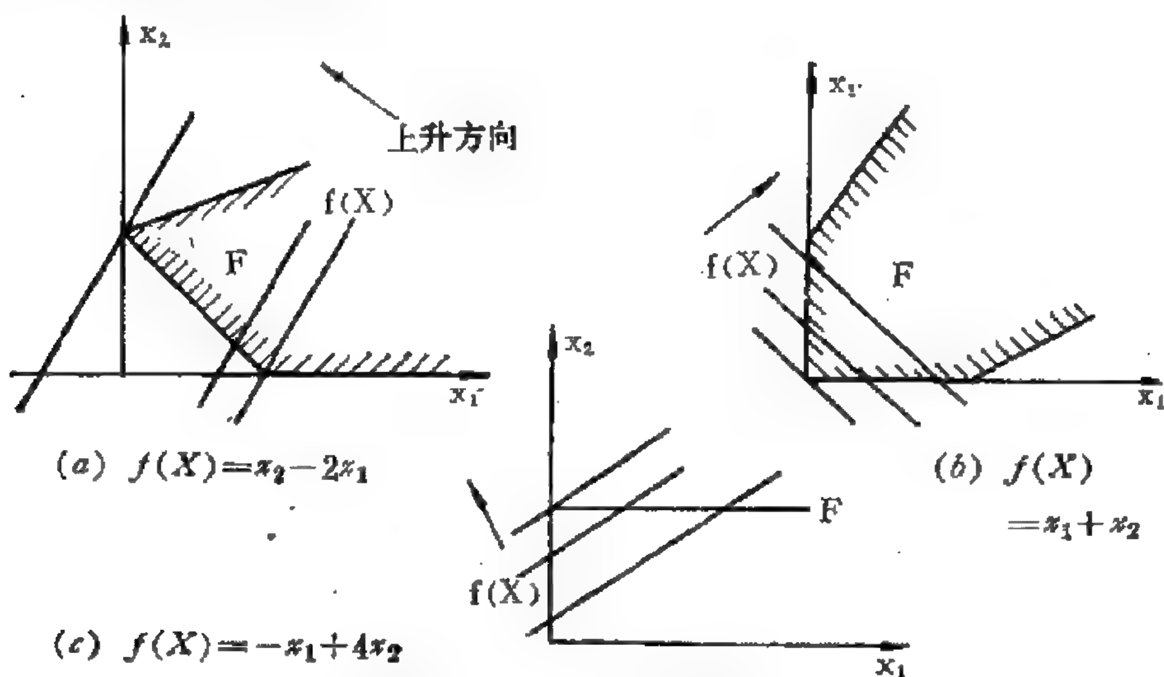


图 3—8　可行解域无界

图 3—8 给出了三种情况：

a． $\max\ f(X)=x_2-2x_1$

$$x_1+x_2\geqslant 1$$

$$x_1-3x_2\geqslant -3$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

这时极值点 $x_1^*=0$，$x_2^*=1$，$f(X^*)=1$

b． $\max\quad f(X)=x_1+x_2$

$$x_2\leqslant \frac{1}{2}x_1-2 \quad 或 \quad x_2-\frac{1}{2}x_1+2\leqslant 0$$

$$x_2-x_1\geqslant 4$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

显见这个规划问题没有有限的最优解值。

c． $\max\quad f(X)=-x_1+4x_2$

$$x_2=2,\quad x_1=0$$

最优解 $X^*=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

3． 无可行解域（图 3—9）

$\max\quad f(X)=x_1+x_2$

$$x_1+x_2\leqslant 10$$

$$2x_1+x_2\geqslant 30$$

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

两个约束矛盾，因而无解。

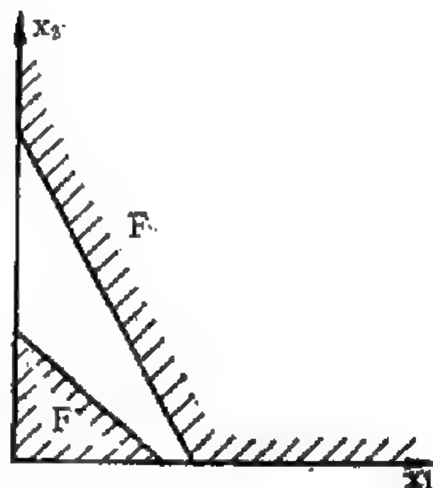


图 3—9 无可行解域

§ 3-4 线性规划的几何理论与基本定理

从两个变量的线性规划图解法可知，根据约束的数目不同，约束式在 x_1x_2 平面上形成的可行解域为三角形、四边形或多边形。由凸集理论不难证明：满足线性规划约束的一切可行解构成凸多边形，n 个变量可行解域就是凸多面体。

上一章已说明所谓凸多边形指的是连接多边形内任意两点的线段均在此多边形内。除了多边形顶点以外，多边形内任意一点都可用多边形内其它两点的座标线性表出。多边形的顶点就是基础可行解。这个凸多边形就是二维空间的凸集。

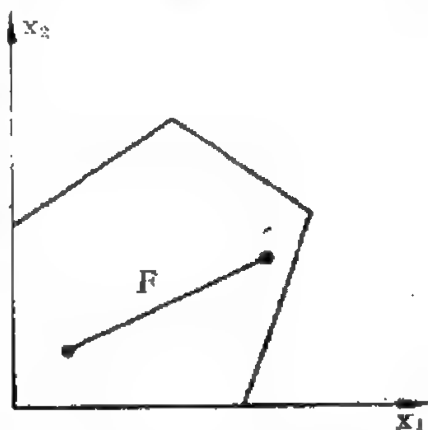


图 3—10 凸多边形

根据这一概念，我们可得线性规划的基本定理，它是单纯形算法的依据。

1． 线性规划问题

$$\max. \ f(X) = C^T X$$

$$\text{约束} \quad AX \leqslant B$$

$$X \geqslant 0$$

的可行解集合 $F = \{X | AX \leqslant B, \ X \geqslant 0\}$ 为凸集。

2． 有可行解就有基础可行解，因为凸集非空。

3． 凸集顶点与基础可行解一一对应，最优解一定可在基础可行解中（即凸集顶点上）找到。

4． 若有两个或两个以上的顶点是最优解，则这些顶点的凸组合均为最优解。

5． 凸集顶点个数（基础可行解数）是有限的，因此搜索范围从可行解域减小到基础可行解数，从一个凸集顶点到另一个顶点进行

迭代寻优，总可在有限步内得最优解，∴ 线性规划算法是收敛的。

凸集顶点数可由变量数及约束条件数确定。

[例] $\max. f(X)=c_1x_1+c_2x_2$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$

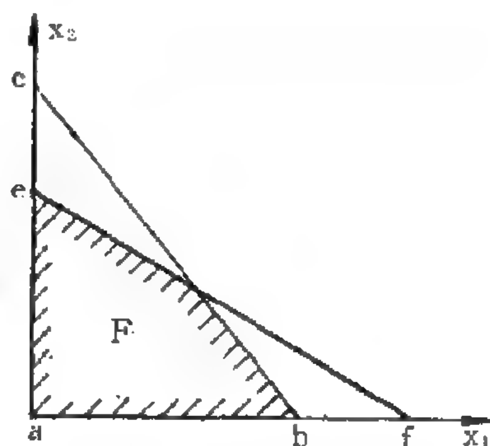
现在是两个变量，两个不等式约束加变量非负约束，共4个约束，两个约束方程有一交点。用组合的方法，可求得约束方程（包括非负约束即变量坐标轴）之间的交点数：

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$$

图 3—11 中交点为 a、b、c、d、e、f，其中 c、f 在可行域 F 以外，a、b、e、d 是可行域凸集的顶点，最优解为 b 或 e 或 d 由等高线斜率决定。

例如：$\max\ x_2$，则 e 点为最优点，

$\max\ x_1$，则 b 点为最优点。



二维平面上约束方程交点

图 3—11

如果线性规划模型为

$\max\ f(x_1,\ x_2,\ x_3)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\leqslant b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\leqslant b_2$

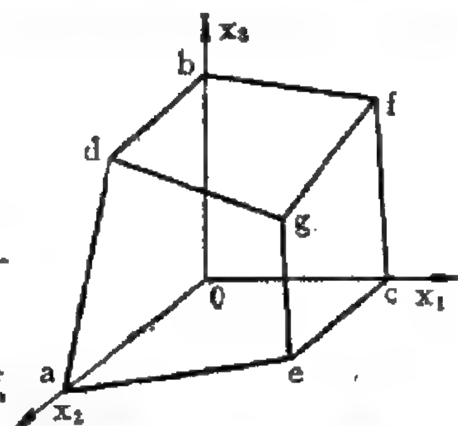
$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\leqslant b_3$

$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$

现在连同非负约束共6个约束，3个变量，每3个约束面相交

有一交点（n 维空间中每个交点由 n 个约束面相交而得），交点数为：

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20$$



基础可行解在凸集顶点上

图 3—12

对应的基础可行解为凸集顶点 0，a，b，c，d，e，f，g 共 8 个（见图 3—12），有 12 个交点在可行域外。

一般情况下 m 个约束，n 个变量，交点数为：

$$\binom{m+n}{n}=\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

$m+n$ 中包括 m 个约束，n 个非负约束。

［例］ $\max \quad f(X)=3x_1+5x_2+2x_3$

$$x_1+3x_2+2x_3\leqslant 48$$

$$2x_1+x_2+4x_3\leqslant 56$$

$$4x_1+2x_2+x_3\leqslant 64$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$$

点	x_1	x_2	x_3	$f(X)$
o	0	0	0	0
a	0	16	0	80
b	0	0	14	28
c	16	0	0	48
d	0	8	12	64
e	9.6	12.8	0	92.8
f	14.296	0	6.857	56.572
g	10.286	8	6.857	84.572

8 个基础可行解计算结果如上表，由表中计算值可找到最优解为 $f(X^*)=92.8$。

目标函数等高面为平行的平面群。

显见，有几百个约束几千个变量时这样的解法是不行的，Dantzig 1947 年提出了单纯形法，用单纯形法不必找出所有的约束面交点数，只要在基础可行解中迭代，使计算工作量大大减少，这是单纯形法的主要优点。

§ 3-5 单纯形算法

对于变量和约束条件数很多（例如成千上百）的情况必须用电子计算机帮助求解，单纯形法就是适应大规模线性规划的一种算法。

单纯形法是一种迭代求解方法，它的基本观点是：从可行解的凸集某个顶点（初始解）出发，向邻近顶点运动，其目标函数值至少比前一个顶点更好。由于：1.顶点数是有限的，2.而最优解一定在顶点上，所以迭代过程是有限的。这两条是单纯形法的依据。几何上从一个顶点到另一顶点的有限次迭代，在代数上即为从一个基础可行解到另一个基础可行解的迭代。

n 维凸多面体有 $n+1$ 个顶点，几何上这种凸多面体被称为单纯形。

例如，二维平面（见图 3—13a）中，单纯形是由

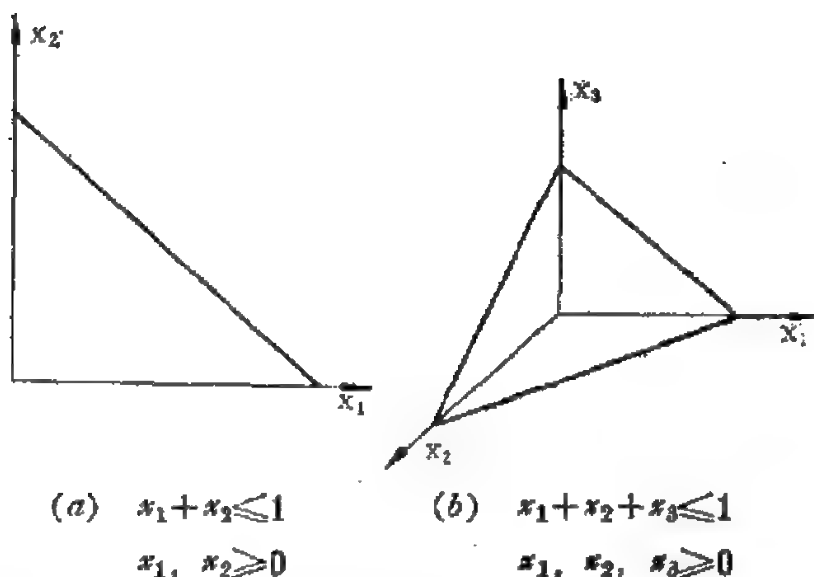
$$x_1+x_2\leqslant 1 \quad x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2 \tag{3—10}$$

所确定的三角形。

三维空间（图 3—13b）单纯形是由

$$x_1+x_2+x_3\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3 \tag{3—11}$$

所确定的四面体。



(a) $x_1+x_2\leqslant 1$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

(b) $x_1+x_2+x_3\leqslant 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$

图 3—13 单纯形

n 维空间，则由下式确定的超多面体为单纯形：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (3\text{—}12)$$

既然线性规划问题是在凸多面体顶点集上迭代求解，因此将线性规划问题的求解方法称为单纯形法。

单纯形法是代数算法，只适用于等式约束。不等式约束较难计算。因此遇到不等式约束时应加入松弛变量变成等式约束。

我们先以前述图解法的例子来说明单纯形法，再总结用单纯形法解一般线性规划问题的规律。

$$\left.\begin{array}{ll} \max & f(X)=13x_1+11x_2 \\ \text{约束：} & 4x_1+5x_2\leqslant 1500 \\ & 5x_1+3x_2\leqslant 1575 \\ & x_1+2x_2\leqslant 420 \\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (3\text{—}13)$$

1. 加松弛变量 x_3、x_4、x_5 使不等式约束变成等式约束，并令目标函数方程右端为 0。

$$\left.\begin{array}{ll}f(X)-13x_1-11x_2=0 & ①\\ 4x_1+5x_2+x_3+0+0=1500 & ②\\ 5x_1+3x_2+0+x_4+0=1575 & ③\\ x_1+2x_2+0+0+x_5=420 & ④\\ x_i\geqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5 & \end{array}\right\} \tag{3—14}$$

②③④为等式约束，可写成 $AX=B$。

$$A=\begin{pmatrix}4&5&1&0&0\\5&3&0&1&0\\1&2&0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1500\\1575\\420\end{pmatrix}$$

于是问题变为：求非负变量 x_1，x_2，…，x_5 的数值，在满足等式约束②③④的条件下使 $f(X)$ 为最大。

2． 确定可行域顶点（见图 3—6），选原点为初始基础可行解，$x_1=0$，$x_2=0$，则初始解向量 X^0 为：

$$X^0=[\underbrace{0,\ 0,}_{\text{非基础变量}}\ \underbrace{1500,\ 1575,\ 420}_{\text{基础变量}}]^T$$

初始解中三个非零变量 x_3，x_4，x_5 称为基础变量，基础变量数恰好等于约束等式数，这三个变量的系数在矩阵 A 中相应的列向量线性无关。零变量 x_1，x_2 称为非基础变量。

这时目标函数 $f(X^0)=0$。

3． 第一次迭代选取邻近顶点，如能使目标函数值增大，则为新的基础可行解，否则原来的解就是最优解。

在更换顶点时显见要对 X 进行换元，即原来是零的某元素要与非零的某元素互换，即原基础可行解中一个基础变量要换成非基础变量，称为“退出变量”，而另一个非基础变量要换成基础变量，称为“引入变量”。

(1) 选择引入变量 x_k——选择准则是应能使目标函数值增加最快。

分析 $f(X)=13x_1+11x_2$，显见 x_1 的系数比 x_2 大，要使 $f(X)$ 值增加最快，应选 x_1 为“引入变量”，即使 x_1 由零变为非零。具体做法是在①式 $f(X)-13x_1-11x_2=0$ 中选系数最负的一个变量为引入变量，即 $x_k=x_1$。

(2) 选择退出变量x_r，从 x_3、x_4、x_5 三个变量中选一个。该变量应随 x_1 增大最先变为 0。

已知 $x_2=0$。

由②式 $\quad x_3=1500-4x_1-5x_2$

若取 $x_3=0$， 则 $x_1=\dfrac{1500}{4}=375=\dfrac{b_1}{a_{11}}$

由③式 $\quad x_4=1575-5x_1-3x_2$

若取 $x_4=0$， 则 $x_1=\dfrac{1575}{5}=315=\dfrac{b_2}{a_{12}}$

由④式 $\quad x_5=420-x_1-2x_2$

若取 $x_5=0$， 则 $x_1=420=\dfrac{b_3}{a_{13}}$

$$\text{选} \quad \theta_{\min}=\min\frac{b_i}{a_{ki}} \quad (\text{引入变量为 } x_k)$$

本例中 $\theta_{\min}=315$，即 $x_1=315$，$x_4=0$，若 $x_1>315$，则 $x_4<0$，不满足非负约束。故 x_1 最多由 0 增大到 315，而 x_4 最先变为 0，选 x_4 为退出变量。

$\therefore \quad x_1=315，x_2=0，x_4=0$

(3) 求其余基础变量 x_3，x_5 的值。

用高斯消元法，使目标函数及约束条件方程中只含一个基础变

量[即 x_1，x_3，x_5 及 $f(X)$]，这里将 $f(X)$ 权作基础变量。我们已知，由③式计算所得 $\frac{b_2}{a_{12}}$ 为最小，因此③式是确定引入变量和退出变量的关键，③式称为关键式，引入变量 x_1 的系数5则称为关键系数。

$$
\left.\begin{array}{llll}
③\times\left(-\frac{4}{5}\right)+② & \frac{13}{5}x_2+x_3-\frac{4}{5}x_4=240 & ②' & (②式中消去\ x_1) \\
③\div 5 & x_1+\frac{3}{5}x_2+\frac{1}{5}x_4=315 & ③' & \\
③\times\left(-\frac{1}{5}\right)+④ & \frac{7}{5}x_2-\frac{1}{5}x_4+x_5=105 & ④' & (④式中消去\ x_1) \\
③\times\frac{13}{5}+① & f(X)-\frac{16}{5}x_2+\frac{13}{5}x_4=4095 & ①' & (①式中消去\ x_1)
\end{array}\right\}
$$

(3—15)

在(3—15)式中令 $x_2=0$，$x_4=0$，可得 $f(x)$ 的解(相当于图3—6的 c 点)。

第一次迭代结果用向量 X^1 表示：

$$X^1=[315,\ 0,\ 240,\ 0,\ 105]^T$$

由①′ $f(X^1)=4095>$ 初始解 $f(X^0)=0$

4. 第二次迭代，重复上述步骤，找新的邻近顶点，又一次进行换元，即求新的引入变量 x_k 和新的退出变量 x_r。

由①′ x_2 系数为负，增加 x_2 可使 $f(X)$ 增大，选 $x_k=x_2$ 为引入变量。(实际本例中只能选 x_2 为引入变量了)。

从 x_1，x_3，x_5 中选一个为退出变量，其中随 x_2 增大最快到零的一个即为新的退出变量 x_r。

由②′，若 $x_3=0$，则 $x_2=\frac{240}{13/5}$，$\frac{b_1}{a_{21}}=\frac{1200}{13}$。

由③′，若 $x_1=0$，则 $x_2=\frac{315}{3/5}$，$\frac{b_2}{a_{22}}=\frac{1575}{3}=525$ 。

由④′，若 $x_5=0$，则 $x_2=\frac{105}{7/5}$，$\frac{b_3}{a_{23}}=75$。

选 $\theta_{\min}=\min\frac{b_i}{a_{ki}}$，④′ 的$\frac{b_3}{a_{23}}$最小故为关键式，即$\theta_{\min}=75$。

x_2 最多由 0 增大到 75，$x_2>75$ 时，x_5 为负，选 x_5 为退出变量。

所以新的非基础变量为 $x_4=0$，$x_5=0$；基础变量为 $x_2=75$，再用上述方法确定 x_1、x_3，即使每方程中只含一个基础变量 $[f(X)$，x_1，x_2，$x_3]$。（3—15）式中关键式 ④′ 的 x_2 的系数 7/5 为关键系数。

$$\left.\begin{array}{lll}
①'+④'\times\frac{16/5}{7/5} & f(X)+\frac{15}{7}x_4+\frac{16}{7}x_5=4335 & ①'' \\
②'+④'\times\frac{-13/5}{7/5} & x_3-\frac{3}{7}x_4-\frac{13}{7}x_5=45 & ②'' \\
③'+④'\times\frac{-3/5}{7/5} & x_1+\frac{10}{35}x_4-\frac{3}{7}x_5=270 & ③'' \\
④'\div\frac{7}{5} & x_2-\frac{1}{7}x_4+\frac{5}{7}x_5=75 & ④''
\end{array}\right\}\quad(3—16)$$

新的基础可行解相当于图 3—6 中的 d 点，用 X^2 表示：[注]

$$X^2=[270,\ 75,\ 45,\ 0,\ 0]^T$$

而 $$f(X^2)=4335>f(X^1)$$

5. 检查①″ 式中 x_4、x_5 的系数均为正，无需再换元，即只有在 x_4、x_5 均为零时 $f(X)$ 为极大，也即 d 点的 X 已为最优解，

[注] X^2 表示第二次迭代的变量 X 值，不要和 X 的平方混淆。

停止迭代。

这时松弛变量 $x_4=x_5=0$，而 $x_3\neq0$，表示有关 x_3 的约束方程还有松动的余地。

将上述运算结果画成系数表格形式，称为单纯形表。

初始表

变量\系数	关键列 x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-13	-11	0	0	0	$0=f(X)$
	4	5	1	0	0	1500
关键行	⑤	3	0	[1]	0	1575
	1	2	0	0	1	420

表中第三行与关键式③相应，称为关键行。

x_1 系数最负取为第一次迭代的引入变量，与 x_4 互换，x_1 这一列的系数称为关键列，关键行和关键列上的系数称为关键系数，用圆圈标出。退出变量 x_4 的系数用小方框标出。

$$X^0=[0,\ 0,\ 1500,\ 1575,\ 420]^T$$

第一表

	x_1	关键列 x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	$-\frac{16}{5}$	0	$\frac{13}{5}$	0	4095
	0	$\frac{13}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$	0	240
	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	315
关键行	0	($\frac{7}{5}$)	0	$-\frac{1}{5}$	[1]	105

$$X^1=[315,\ 0,\ 240,\ 0,\ 105]^T$$

下次迭代 x_2 为新的引入变量与 x_5 互换，x_2 所在列为关键列。

第二表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	0	$\frac{15}{7}$	$\frac{16}{7}$	4335
0	0	1	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{13}{7}$	45
1	0	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{3}{7}$	270
0	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	75

$$X^2=[270,\ 75,\ 45,\ 0,\ 0]^T$$

目标函数方程系数均 $\geqslant 0$，已得最优解，计算停止。

根据上述数字计算举例可阐明线性规划单纯形算法的一般理论如下：

1. 求基础可行解

变量 $X=[X_1\ \ X_2]^T$

$m+n$ 个变量中（包括松弛变量 m 个）任选 n 个等于零，再根据 m 个约束求其他 m 个变量，记 X_1 为 m 维非零向量，称为基础变量，而 X_2 为 n 维零向量，称为非基础变量。

约束方程系数矩阵 $\underset{m\times(m+n)}{A}=[\underset{m\times m}{A_1}\ \ \underset{m\times n}{A_2}]$

等式约束 $AX=B$

$$[A_1\ \ A_2]\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=A_1X_1+A_2X_1=B$$

$$X_1 = A_1^{-1}B - A_1^{-1}A_2X_2 \qquad (3-17)$$

A_1 的秩为 m，非奇异阵，其逆 A_1^{-1} 存在。

$$X_2 = 0，基础解 \quad X_1 = A_1^{-1}B \qquad (3-18)$$

若 $X_1 \geqslant 0$，又满足 m 个约束方程，X_1 就是基础可行解。

$X = [X_1 \ \ 0]^T$，即单纯形法将原来求 n 维可行域中有无穷多个解的问题转变为求维数低于 n 的有限个基础可行解 X_1，使极值问题的搜索范围大大减小了。

2. 求最优解

$$f(X) = C^T X = C_1^T X_1 + C_2^T X_2$$

$$C = [C_1 \ \ C_2]^T$$

已知 $X_1 = A_1^{-1}B - A_1^{-1}A_2X_2$，代入上式得

$$f(X) - C_1^T A_1^{-1}B - (C_2^T - C_1^T A_1^{-1}A_2)X_2 = 0$$

$$X_2 = 0，f(X) = C_1^T A_1^{-1}B \qquad (3-19)$$

若 X_2 的系数为负，即 $(C_2^T - C_1^T A_1^{-1}A_2) > 0$，则 X_2 中任一个变量成为引入变量，例如向量 X_2 中任一元素 x_{2i} 由零增加，变为非零的正数，将使 $f(X)$ 增大，即目标函数值比以前更好，否则若 X_2 的系数非负，$(C_2^T - C_1^T A_1^{-1}A_2) \leqslant 0$，说明已为最优解，$x_{2i}$ 由零增加都会使 $f(X)$ 下降。如果问题是求极小，则 $(C_2^T - C_1^T A_1^{-1}A_2) \geqslant 0$ 已达最优。

$C_2^T - C_1^T A_1^{-1}A_2$ 为单纯形系数，

$$C_2^T - C_1^T A_1^{-1}A_2 \leqslant 0 \qquad (3-20)$$

为单纯形判据，根据该判据可确定是否已达到最优解。

由上例中的初始表，可求得

$$X_1 = [1500, \ 1575, \ 420]^T，X_2 = [0, \ 0]^T$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix}4&5\\5&3\\1&2\end{pmatrix}$$

$$C_1=[0,\ 0,\ 0]^T\quad C_2=[13,\ 11]^T$$

一般希望初始基础变量的系数阵为单位阵。

代入得：

$$C_2{}^T-C_1{}^TA_1{}^{-1}A_2>0,$$

$\therefore$ 未到达最优解，

$$[13,\ 11]-[0,\ 0,\ 0]\begin{pmatrix}4&5\\5&3\\1&2\end{pmatrix}=[13,\ 11]-[0,\ 0]=[13,\ 11]$$

$$X_1=[x_3\quad x_4\quad x_5]^T,\qquad X_2=[x_1\quad x_2]^T=0$$

代入 $A_1X_1+A_2X_2=B$ 得

$$X_1=A_1^{-1}(B-A_2X_2)=B=\begin{pmatrix}1500\\1575\\420\end{pmatrix}$$

第二表中，

$$X_1=[270,\ 75,\ 45]^T,\qquad X_2=[0,\ 0]^T$$

$$C_1=[0,\ 0,\ 0]^T\qquad C_2=\left[-\frac{15}{7},\ -\frac{16}{7}\right]^T$$

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad A_2=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3&-13\\2&-3\\-1&5\end{pmatrix}$$

$\therefore\ C_2{}^T-C_1{}^TA_1{}^{-1}A_2=C_2{}^T=\left[-\dfrac{15}{7},\ -\dfrac{16}{7}\right]<0$，即已达最优解。

3． 单纯形法要求基础变量对应的系数矩阵 A_1 为单位阵。

单纯形法小结

1． 引入松弛变量，将线性规划模型中不等式约束化为等式约束。

求 $\max f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$， $f(X)-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j=0$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

选松弛变量为初始基础变量，则初始基础可行解为

$$x_i=b_i, \quad i=1, 2, \cdots, m$$

第 i 个基础变量 x_i 为对应第 i 个约束方程的松弛变量。

2． 检查目标函数等式，如果至少有一个非基础变量的系数为负，说明目标函数可进一步增加，否则各系数非负，说明已达最优，停机。

3． 选系数最负的一个非基础变量 x_k 为引入变量（作为新的基础变量），若有两个或两个以上的非基础变量系数均为最小，则可任选一个，x_k 所在列为关键列。

4． 决定退出变量

计算约束方程每行系数

$$\theta_i=\frac{\text{基础可行解}}{\text{关键列之系数}}=\frac{b_i}{a_{ki}},$$

a_{ki} 为第 i 方程中 x_k 之系数，即关键列的各系数。

令 $\theta_{\min}$ 所在行为关键行，位于关键行、关键列上的元素为关键元素（用圆圈标明）。将上列中的初始表重画在下面，这个表说明了关键行、列的意义。

	x_k			x_r			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
	−13	−11	0	0	0	0	
	4	5	1	0	0	1500	$\theta_1=375$
关键行	⑤	3	0	1	0	1575	$\theta_2=315=\theta_{\min}$
关键元素	1	2	0	0	1	420	$\theta_3=420$
	关键列						

取关键行上系数为 1 的基础变量 x_r 为退出变量。

5. 用高斯消去法使关键行 x_k 的系数（关键元素）为 1，其余行 x_k 的系数为 0，决定新的基础可行解。

6. 检验目标函数方程中所有变量系数，即检验各系数是否均 ≥0，若是，则得最优解，否则重复 3—5 步，直到没有新的关键列被发现。

§ 3-6 线性规划的对偶问题

对任何求极大值的线性规划问题都有一个求极小值的线性规划问题与之对应，这两个问题互为对偶。对偶问题中目标函数与约束函数间有一定对应关系。

[例 1] 产品加工问题

设原问题为：两种零件甲、乙，分别在两台机床上加工，x_1 和 x_2 为甲乙两种零件加工的数量，问如何安排生产（求 x_1、x_2）使产值最高，两种机床每周能用于加工的时间是有限的，则原问题数学模型为：

$$\max\ f(X)=5x_1+6x_2$$

5 及 6 分别为甲乙两种零件的产值系数。

对机床 1 而言，应满足：$3x_1+x_2\leqslant 48$，即每周只能用 48 小时，两种零件加工工时为 3 及 1。

对机床 2 而言，应满足：$3x_1+4x_2\leqslant 120$，即每周只能用 120 小时，两种零件的加工工时为 3 及 4。

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0$$

对偶问题：令 y_1，y_2 为零件在两种机床上加工 1 小时使零件所具有的单位价值（能出售的价格），求 y_1、y_2，使加工成本最低，约束条件为零件价值≥成本费用。设对偶问题目标函数 $\varphi(Y)=\varphi(y_1,\ y_2)$。则对偶问题的数学模型为

$$\min\ \varphi(Y)=48y_1+120y_2$$

对零件甲应满足 $3y_1+3y_2\geqslant 5$ ⎫ 5 及 6 分别代表甲乙两零件

对零件乙应满足 $y_1+4y_2\geqslant 6$ ⎭ 单位产值（或单位成本）。

$$y_1\geqslant 0,\quad y_2\geqslant 0$$

由单纯形法解得原问题的最优解：

$$x_1^*=8,\quad x_2^*=24,\quad f(X^*)=184$$

对偶问题的最优解：

$$y_1^*=\frac{2}{9},\quad y_2^*=\frac{13}{9},\quad \varphi(Y^*)=184$$

原问题与对偶问题的对比如下表：

原问题	对偶问题
求极大	求极小
约束不等式≤号	≥号
$C=[5,\ 6]^T$	$B=[5,\ 6]^T$
$B=[48,\ 120]^T$	$C=[48,\ 120]^T$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad\qquad A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$$

最优解 $f(X^*)=184$ 　　　　最优解 $\varphi(Y^*)=184$

两问题互为对偶，他们是从不同的角度对同一研究对象提出的求极值问题。

在线性规划问题中，约束是作为不等式处理的，可以证明，当线性规划原问题有等式约束时，则对偶问题中与之对应的变量 Y 非负条件可以取消。

相互对偶的线性规划问题可用一般数学模型表示如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{原问题：}\max\quad f(X)=C^TX=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\&\text{约束}\quad AX\leqslant B\ \text{或}\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i\\&X\geqslant 0\ \text{或}\ x_j\geqslant 0\\&j=1,2,\cdots,n,\ i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\}\tag{3—21}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{对偶问题：}\min\quad \varphi(Y)=Y^TB=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\\&\text{约束}\quad A^TY\geqslant C\ \text{或}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqslant c_j\\&Y\geqslant 0\ \text{或}\ y_i\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{3—22}$$

$$j=1,2,\cdots,n,\ i=1,2,\cdots,m$$

原问题 $F_X=\{X|X\in E^n,\ AX\leqslant B,\ X\geqslant 0\}$，$F_X$ 为原问题可行解域。

对偶问题 $F_Y=\{Y|Y\in E^m,\ A^TY\geqslant C,\ Y\geqslant 0\}$，$F_Y$ 为对偶问题可行解域。

原问题的变量数 n 等于对偶问题的约束数，而原问题的约束数 m 等于对偶问题的变量数，对偶问题的约束值 c_j 是原问题目标函数中变量 x_j 的系数，而原问题的约束值 b_i 是对偶问题目标函数中变量 y_i 的系数。原问题约束不等式 $\leqslant$ 号在对偶问题中变为 $\geqslant$ 号。两个问题互相关联，其最优解也是互相关联的，一个问题的最优解产生另一个问题最优解的全部信息。可以证明，原问题和对偶问题都有可行解，则其最优解相同，即：

$$\max f(X) = \min \varphi(Y)$$

$f(X)$ 的上界 $= \varphi(Y)$ 的下界，界面为最优[注]。

[注] 关于这个问题可作如下简要说明：

存在一个二次型：$S(X, Y) = Y^T A X$

对 X 和 Y 的任何可行解都存在下述关系：

$$C^T X \leqslant S(X, Y) \leqslant B^T Y$$

函数 $S(X, Y)$ 形成一个鞍点，对于最优解，则有：

$$\max f(X) = C^T X^* = S(X^*, Y^*) = B^T Y^* = \min \varphi(Y)$$

用例 2 数字代入，得

$$S(X, Y) = (y_1 \ y_2 \ y_3) \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或 $$S(X, Y) = (4x_1 + 5x_2) y_1 + (5x_1 + 3x_2) y_2 + (x_1 + 2x_2) y_3$$

应有： $$13x_1 + 11x_2 \leqslant S(X, Y) \leqslant 1500y_1 + 1575y_2 + 420y_3$$

已知最优解为： $x_1^* = 270, \ x_2^* = 75, \ f(X^*) = 4335$

$$y_1^* = 0, \ y_2^* = \frac{15}{7}, \ y_3^* = \frac{16}{7}, \ \varphi(Y^*) = 4335$$

$$S(X^*, Y^*) = (1350 + 225)\frac{15}{7} + (270 + 150)\frac{16}{7} = 3375 + 960 = 4335$$

线性规划问题可以用原问题表示，也可以用对偶问题表示，选择那一种可根据计算效率决定。当原问题的约束数多而变量数少时，对偶问题变量数多而约束数少。则这时对偶问题好算，因为约束数决定了单纯形法中基础变量数，约束越多，计算越复杂。

[例 2] 产品生产安排问题（§ 3—2 中例 7）。

原问题：

$\max\ f(X)=13x_1+11x_2$　　　使产值（利润）最高

资源约束　　$4x_1+5x_2\leqslant 1500$　　面积限制

$5x_1+3x_2\leqslant 1575$　　原料限制

$x_1+2x_2\leqslant 420$　　工人生产时间限制

甲乙两种产量　　$x_j\geqslant 0$，$j=1$，2。

则对偶问题数学模型为

$$\min\ \varphi(Y)=1500y_1+1575y_2+420y_3$$

$$4y_1+5y_2+y_3\geqslant 13$$

$$5y_1+3y_2+2y_3\geqslant 11$$

$$y_i\geqslant 0\quad i=1,\ 2,\ 3。$$

原问题　　对偶问题

$$A_1=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 5 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\ 5 & 3 & 2\end{bmatrix}=A_1^T$$

$$B_1=\begin{pmatrix}1500\\ 1575\\ 420\end{pmatrix}\qquad B_2=\begin{bmatrix}13\\ 11\end{bmatrix}=C_1$$

$$C_1=[13,\ 11]^T\qquad C_2=[1500,\ 1575,\ 420]^T=B_1$$

上例中对偶问题的解法如下：

1．变不等式约束为等式约束，引入松弛变量 y_4，y_5。

$$\left.\begin{aligned}4y_1+5y_2+y_3-y_4=13\\5y_1+3y_2+2y_3-y_5=11\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{—}23)$$

不等式左边减去松弛变量 y_4、y_5（∵ 不等号现在是≥号）。

2. 初始解 $\dot{Y}=[0,\ 0,\ 0,\ -13,\ -11]^T$

负号不是可行解，则不能用单纯形法。

为使初始解为可行解，人为加入一组变量 y_6、y_7，称为人为变量。

$$\left.\begin{aligned}4y_1+5y_2+y_3-y_4+y_6=13\\5y_1+3y_2+2y_3-y_5+y_7=11\end{aligned}\right\}\qquad(3\text{—}24)$$

数学模型为：

$$\min\ \varphi(Y)=1500y_1+1575y_2+420y_3+My_6+My_7\qquad(3\text{—}25)$$

M 是一个很大的数例如取 5000 ，称为罚因子 。它表示如果 y_6、y_7 不为零，则目标函数就要大很多。即使 y_6、y_7 很小，由于 M 很大也会使目标函数值变大。从求最优解来说，因为 M 值很大，将迫使变量 y_6、y_7 的值为零，这种方法称为大 M 法。

如果是求极大值，则 M 应取负。

3. 以后的解法和单纯形法一样。

结果 $Y^*=[\ 0,\ \frac{15}{7},\ \frac{16}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ ]^T$

最优解 $\varphi(Y^*)=4335$，与原问题最优解一样。

对偶线性规划的两个定理

[定理 1] $\max\ C^TX\leqslant\min\ Y^TB$ (3—26)

[证] ∵ $Y\geqslant0$，$AX\leqslant B$，两边乘以 Y^T，得

$Y^TAX\leqslant Y^TB$

又 $X\geqslant0$，$A^TY\geqslant C$，两边乘以 X^T，得

$X^TA^TY\geqslant X^TC$

即　$C^TX \leqslant X^TA^TY = Y^TAX \leqslant B^TY$，$C^TX \leqslant B^TY$

故　$\max\ C^TX \leqslant \min\ B^TY$

［定理 2］ 对于原问题和对偶问题的最优解，下列关系式成立：如果一个问题的第 k 个松弛变量为正，则其对偶问题的第 k 个变量为 0。

［证］ 引入松弛变量 U 及 V，使两问题的约束不等式变成等式，$U=[u_1, u_2, \cdots, u_k, \cdots u_m]^T$，$V=[v_1, v_2, \cdots, v_k, \cdots v_n]^T$。

原问题　$AX \leqslant B \to AX + U = B$

对偶问题　$A^TY \geqslant C \to A^TY - V = C$

对偶问题目标函数　$Y^TB = Y^TAX + Y^TU$

$$Y^TB - f(X) = Y^TB - C^TX = Y^TU + (A^TY - C)^TX$$
$$= Y^TU + V^TX$$

两个问题的最优解分别为　$X = X^*$　$Y = Y^*$

$Y^{*T}B - f(X^*) = 0$，即　$(Y^*)^TU^* + (V^*)^TX^* = 0$

∵　X^*、Y^*、V^*、$U^* \geqslant 0$

∴　若　$u_k^* > 0$，则　$y_k^* = 0$

$v_k^* > 0$，则　$x_k^* = 0$

角注 k 表示向量中第 k 个元素。

§ 3-7　整数线性规划

一般的无约束或有约束的最优化问题中所有的变量均为实数。当最优化问题中一部分变量规定为整数时称为整数规划问题，这时关于变量连续可导的概念就不再可用了。

整数规划可分线性整数规划和非线性整数规划以及混合整数规划等（一部分变量可以是非整数称为混合整数规划）。

整数规划经常用在变量必须为整数的地方，例如船上装货以包计，制造工厂以整数计算产品数，有的时候求解一些实际问题时，不引入整数变量，不便于将约束列成数学式子，也要用整数规划。

[例 1] 装背包问题

一组物品 $S=\{1, 2, \cdots, M\}$，其中第 i 件重 w_i，价值 v_i，从 S 中取出一些物品来装背包，使总价值最大，而不超过总重量的给定上限 W。

令 $x_i=1$ 表示选择第 i 件物品，

$x_i=0$ 表示不选择第 i 件物品，

问题：$\max\limits_{x} \sum\limits_{i=1}^{M} x_i v_i$

使 $\sum\limits_{i=1}^{M} x_i w_i \leqslant W$

$0 \leqslant x_i \leqslant 1$，$x_i$ 为整数，$1 \leqslant i \leqslant M$

这种整数规划的解不是 0 就是 1，称为 $\{0, 1\}$ 整数规划。

[例 2] 旅游问题

假设某旅游者从城市 0 出发共周游 $N+1$ 个城市，问题是设每个城市去一次并只去一次，使费用为最小，用整数规划表示该问题的数学模型。

旅游者从城市 i 到城市 j 用 $x_{ij}=1$ 表示，否则 $x_{ij}=0$ 表示这个人并没有从城市 i 到城市 j，c_{ij} 表示从城市 i 到城市 j 的费用。

对城市 j 说，一定有另外的城市 $i(i \neq j)$ 及 $p(p \neq i)$ 使 $x_{ij}=1$，而 $x_{pj}=0$，这样才能保证每个城市只去旅游一次。

相当于下述约束条件：

1. 对所有 j 城市：$\sum\limits_{i=0}^{N-1} x_{ij}=1 \quad j \neq 0, \ i \neq j$

2. 旅游者必须只离开每个城市一次，对所有 i 城市

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}=1 \quad i \neq N,\ i \neq j$$

故数学模型可表示成：

$$\min \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}$$

x_{ij} 为整数 0 或 1，并满足约束，这也是 {0, 1} 整数规划。

[例 3] 分配问题

电子工厂接到 N 种不同设备定货，工厂有 M 个工人，每人都可以做每种设备，问题是要使供应时间最小。

d_j 表示第 j 种设备的定货量。

x_{ij} 表示第 i 个工人做第 j 种设备的数量。

t_{ij} 表示第 i 个工人生产第 j 种设备每单位产量所需时间。

$$\min \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} t_{ij}$$

约束 $\sum_{i=1}^{M} x_{ij} \geqslant d_j \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$

对所有 i，j，x_{ij} 必须为非负整数。

[例 4] 某个最优化问题只需满足下述两式之一，

$$5x_1+6x_2+3x_3 \leqslant 200 \qquad (1)$$

$$3x_1+5x_2+3x_3 \leqslant 500 \qquad (2)$$

如果 $5x_1+6x_2+3x_3-200 \leqslant L$

$3x_1+5x_2+3x_3-500 \leqslant L,\ L \neq 0$

则表示 (1), (2) 两式不满足。

为了将上述约束式关系表达出来，可引入整数变量 y，y 为 0 或 1，它与物理变量 x_1、x_2、x_3 无关，于是可使 (1)、(2) 两式写成如下形式：

$$5x_1+6x_2+3x_3-200\leqslant Ly$$

$$3x_1+5x_2+3x_3-500\leqslant L(1-y)$$

$$y=\begin{cases}0 & \text{（1）式成立}\\ 1 & \text{（2）式成立}\end{cases}$$

无论用什么算法其结果可以自动地确定 $y=0$ 或 1，因此只满足一个约束。

一般情况下，如果下述 q 个约束中至少有 p 个应满足：

$$\sum_j a_{ij}x_j\leqslant b_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ q$$

则可用数学形式表示这一约束：

$$\sum_j a_{ij}x_j-b_i\leqslant u_iy_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ q$$

$\sum_{i=1}^{q} y_i=q-p$ 表示 y_i 中有 p 个为 0，$q-p$ 个为 1，

$y_i=0$ 或 1。

表面上看，好象可以将整数线性规划当作普通线性规划处理，用单纯形法求解，然后用舍位或圆整方法得整数解。但这种方法不能得到最优整数解。例如图 3—14 中的点表示整数线性规划的可行

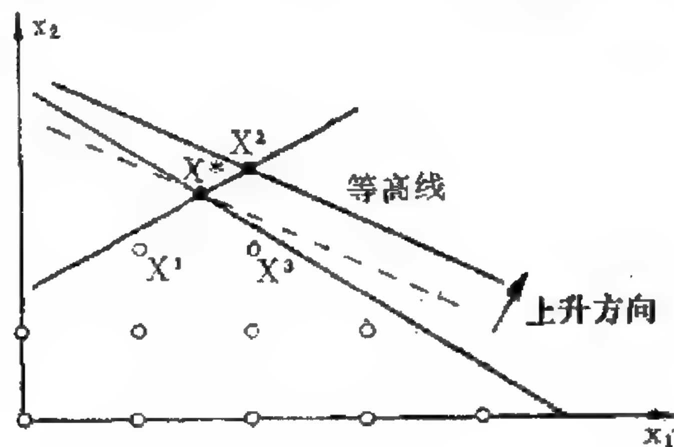


图 3—14 整数线性规划图解

解。最优整数解应在图所示的点中，按线性规划求解，最优点为 X^*，它不一定恰为整数。舍项圆整后如果得 X^1，它不是最优整数解。由图 3—14 可见 X^3 是目标函数值更大的整数可行解，因而是最优整数规划解。如果 X^* 圆整后得 X^2，它已不是可行解了。更不可能是最优解。

因此不能用线性规划求解再用圆整的办法求最优整数解。

变量较少的小型整数规划可用穷举法，将所有可能解都列出来。但变量超过 15～20 以上时用穷举法是很难求解的。

较好的办法是分枝定界法和割平面法。

一、分枝定界法

本方法应用“解树”的概念，解树是一张图，包括整数规划的所有节点和分枝，如图 3—15。

节点表示所有可行解集的子集。

分枝表示任两点之间的联线。

[例 1] $\max f(X) = x_1 + 4x_2$

约束 $-2x_1 + 3x_2 \leqslant 3$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$

x_1、$x_2 \geqslant 0$，并为整数。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$F = \{X \mid AX \leqslant B,\ X \geqslant 0\}$

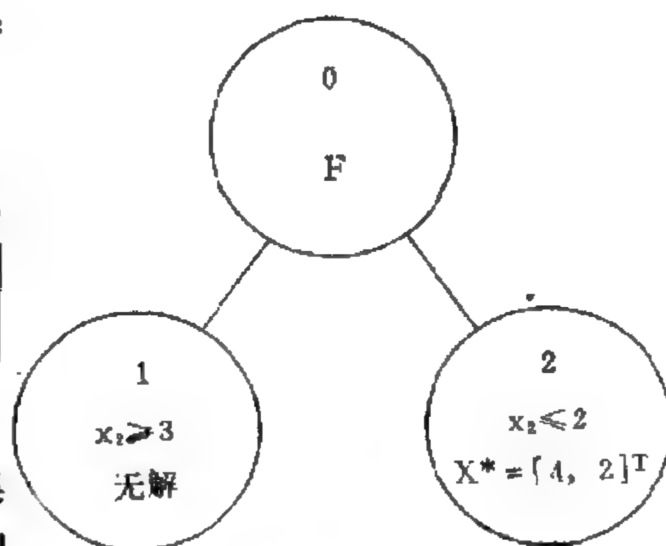


图 3—15 整数规划解树

节点 0 表示所有可行解集（除了整数要求外），节点 1 和 2 是可行解子集，用简单图解法可知，用线性规划方法求解得 $X^* = [2.5,\ 2.7]^T$，$f(X^*) = 13.42$。如果圆整后得 $X = [3,\ 3]^T$，在可行解域之外。

因为 $x_2^*=2.7$，因此最优整数解为 $x_2\geqslant3$ 或 $x_2\leqslant2$，所以取节点 1，补充约束 $x_2\geqslant3$，由图 3—16 可见 $x_2\geqslant3$ 无可行解，∴ 解为空集。

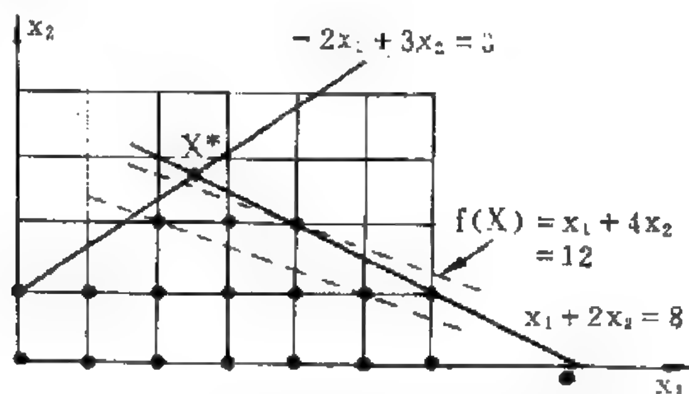


图 3—16 图解法求解线性整数规划

节点 2 补充约束 $x_2\leqslant2$，用作图法可求得 $X^*=[4,\ 2]^T$，$f(X^*)=12$。从节点 2 再往下分只能使 $f(X)$ 减小。

[例 2] 工作分配问题

三个人分配作三件不同的工作，求总效率最高的分配方法。

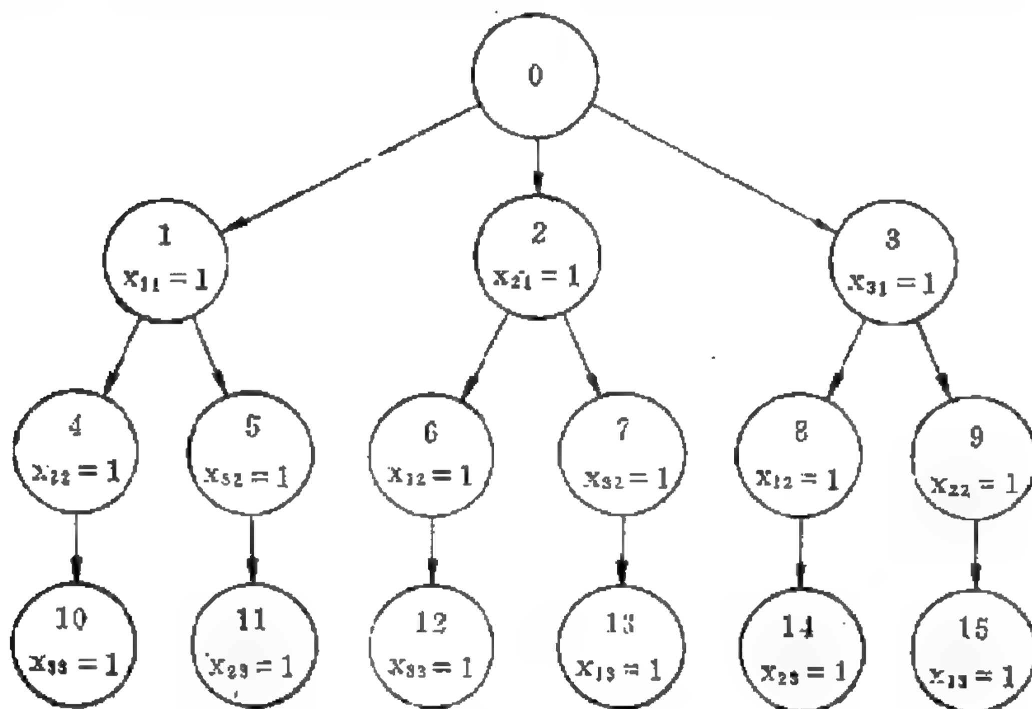


图 3—17 工作分配问题的解树

$x_{ij}=1$，表示第 i 个人做第 j 件工作，否则取 $x_{ij}=0$，画出分配树图（如图 3—17），节点 0 表示所有可能的分配方案集合，设效率矩阵为：

$$E=(e_{ij})=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

用分枝定界法求解。

如果分配方案为 $x_{11}=x_{22}=x_{33}=1$，则总效率为

$$e=\sum e_{ij}=0.7+0.3+0.4=1.4$$

计算节点 1，$x_{11}=1$，则可能的方案是 $x_{22}=x_{33}=1$，或 $x_{32}=x_{23}=1$。

$$e_1=0.7+\max(0.3,\ 0.6)+\max(0.4,\ 0.6)=1.9$$

$e_1>e$，所以可往下计算节点 4，$x_{11}=1=x_{22}$，

$$e_4=0.7+0.3+0.4=1.4$$

$e_4 \not> e$，计算节点 5，$x_{11}=x_{32}=1$，

$$e_5=0.7+0.6+0.6=1.9$$

$e_5>e$，再往下计算节点 11，$x_{11}=x_{32}=x_{23}=1$，

$$e_{11}=1.9$$

现在取 $e=1.9$，再计算节点 2，$x_{21}=1$，

$$e_2=0.5+\max(0.3,\ 0.4)+\max(0.6,\ 0.4)=1.5<e=1.9$$

不必再算下去。

算节点 3，$x_{31}=1$，

$$e_3=0.2+\max(0.3,\ 0.4)+\max(0.3,\ 0.6)=1.2<e=1.9,$$

$\therefore$ 最优解为 $x_{11}=x_{32}=x_{23}=1$，$e=1.9$。

二、割平面法

整数线性规划最优解很可能是位于可行解集合内部的一点。而用单纯形算法只能在可行解集顶点上求解，因此不能找到整数最优

解。将原来的可行解集割去一部分，（二维空间用一条直线，三维空间用一个平面，n 维用超平面）。使最优整数解成为新的线性规划问题中可行解集的一个顶点，就可用线性规划解出。这种方法称为割平面法。高莫雷法是其中的一种。

1． 解整数规划问题时，先忽略整数约束的要求，然后用单纯形法解线性规划问题。

2． 如果最优解是整数值，则求解到此为止。

3． 否则要引入一个新的约束直线（平面或超平面），割掉一部分可行域从而压缩原来的可行解集合。新的约束超平面应当使原问题的线性规则最优解成为不可行。

4． 然后用单纯形法解这个新的线性规划问题，如果新的最优解还不是整数，则需要再引入另一个约束超平面。关键问题是如何构成新的约束。

［例］ $\max f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

约束：$0 \leqslant x_2 \leqslant 3$，$x_1 \geqslant 0$

$2x_1 + x_2 \leqslant 6$

x_1，x_2 为整数。

由作图法可知（见图 3-18）整数规划最优解为：

$$X^* = [1, 3]^T。$$

现在引入松弛变量 x_3、x_4，约束为：

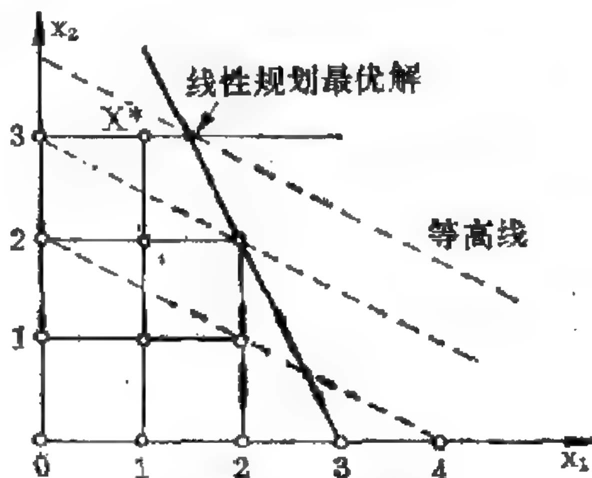
$$0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 6$$

线性规划问题为

$\max C^T X$，$C = [1,2,0,0]^T$

$AX = B$，$X = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$



整数规划图解

图 3—18 $f(X) = x_1 + 2x_2$

$$F=\{X|X\in E^{m+n},\ AX=B,\ X\geqslant 0\}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad B=[3,\ 6]^T$$

如果不考虑整数约束，用单纯形法得最优的线性规划解为：

$$X^0=[1.5,\ 3,\ 0,\ 0]^T$$

令：

$$X=[X_1,\ X_2]^T$$

$$[A_1,\ A_2]\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=B$$

由（3—17）式得：

$$X_1=A_1^{-1}B-A_1^{-1}A_2X_2$$

本例中，$A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$\therefore\ X_1=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=A_1^{-1}B-A_1^{-1}A_2\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.5\\ 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.5\\ 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$x_1=1.5+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4=1+\ \frac{1}{2}(1+x_3-x_4)$$

即将 x_1 分成整数与小数部分。

为求得整数应令 $\quad 1+x_3-x_4\leqslant 0$

$$x_3=3-x_2$$

$$x_4=6-2x_1-x_2$$

$\therefore\quad 1+3-x_2-6+2x_1+x_2\leqslant 0$ 或 $-2+2x_1\leqslant 0$，即 $x_1\leqslant 1$

实际上： $x_1 = 1 + \frac{1}{2}(1 + x_3 - x_4) \leqslant 1 + 0$

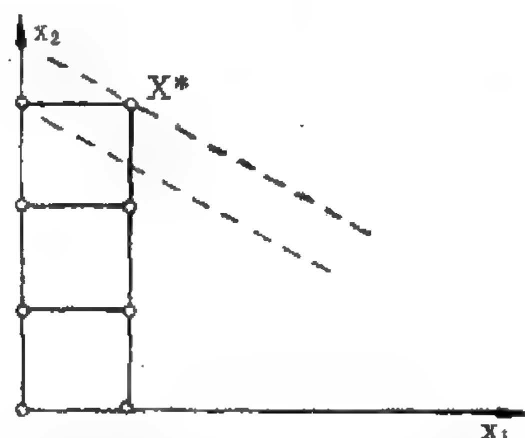
$x_1 \leqslant 1$ 为新的约束，原有约束 $2x_1 + x_2 \leqslant 6$ 多余，于是我们得到新的线性规划问题为：

$$\max f(X) = x_1 + 2x_2$$
$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant 3$$
x_1、x_2 为整数。

再用单纯形法求解得（见图 3—19），

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3,$$

即为整数规划的最优解。



割平面法求解线性整数规划问题

图 3—19

习　　题

1. 某电阻网络由 5 个电阻元件组成（图 3—20），第 k 个元件

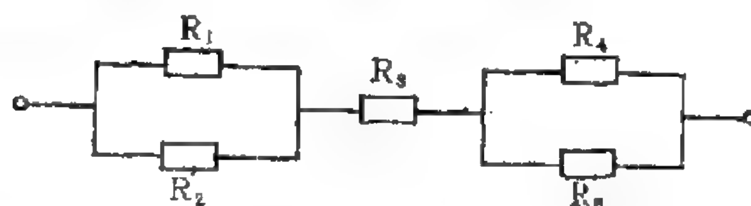


图 3—20

的电阻值为 R_k。令 x_k 为流过 R_k 的电流，$k=1, 2, \cdots, 5$，现在要确定流过该网络的最大电流，约束条件：$0 \leqslant x_k \leqslant I_k$，$1 \leqslant k \leqslant 5$，将上述问题列成线性规划模型。

2. 在图 3—21 电阻网络中，要决定每个电阻元件的阻值，使网络中消耗的总功率为最小，将问题列成线性规划的数学模型，设约束条件为：

给定电阻 R_k 上的电压 U_k 时，

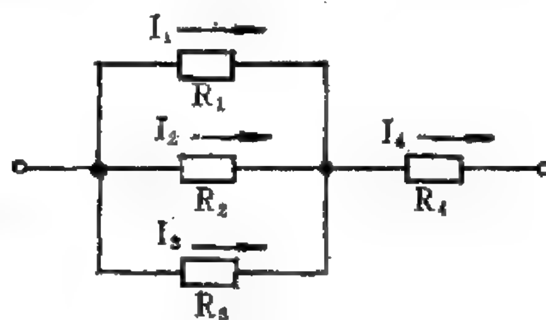


图 3—21

$I_{k\min} \leqslant I_k \leqslant I_{k\max} \quad k=1,2,\cdots,4$。

(注)：解题时可用电导 $G_k = \frac{1}{R_k}$。

3. 图解法求解线性规划问题

$\max\ f(X) = x_1 + 2x_2$

约束：$3x_1 + 2x_2 \leqslant 60$

$2x_1 + 6x_2 \leqslant 90$

$x_1 + 3x_2 \geqslant 30$

$2x_1 + x_2 \geqslant 20$

4. 求 $\max\ f(X) = 8x_1 - 4x_2$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

$x_1 - x_2 \leqslant 2,$

$2x_1 - x_2 \leqslant 6$

5. 线性规划问题

$f(X) = x_1 + 2x_2$

$AX \geqslant B$

$X \geqslant 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = [4,\ 12,\ 2]^T,\ X = [x_1,\ x_2]^T$$

已知其最优解为 $X^* = [2,\ 2]^T$，求对偶线性规划问题。

(注)：约束条件可化为 $-AX \leqslant -B$，表示成标准形。

6. 用割平面法解线性整数规划：

$\max\ f(X) = x_1 + 4x_2$

$-2x_1 + 3x_2 \leqslant 3$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$

$x_1,\ x_2 \geqslant 0$，并为整数。

7. 用分枝定界法解线性整数规划：

$$\max f(X)=x_1+2x_2$$

$$x_1\geqslant 0,\ 0\leqslant x_2\leqslant 3,$$

$$2x_1+x_2\leqslant 6$$

x_1，x_2 为整数。

第四章　非线性规划

§ 4-1　非线性规划的数学模型

静态规划的一般数学模型为

$$\min \quad f(X) \tag{4—1}$$

约束　$g_i(X)=0 \quad i=1, 2, \cdots, m, \ m<n$

$h_j(X)\geqslant 0 \quad j=1, 2, \cdots, r$

$X\in E^n$

如果在上述数学模型中，有一个或几个函数是变量 X 的非线性函数，则这种最优化问题称为非线性规划（或非线性最优化）。

线性规划可以看作是非线性规划的特殊情况，它要求数学模型中所有函数都是线性的。当约束为线性，而目标函数为二次型或二次函数时，则称为二次规划，其数学模型为：

$$\min \quad f(X)=X^TQX+C^TX+K \tag{4—2}$$

约束：$AX\geqslant B$（或 $AX\leqslant B$）

$X\geqslant 0$

式中 Q 为正定或半正定方阵。

除了二次规划以外，另一类典型的非线性规划就是几何规划。几何规划是在工程设计中常见的。它的目标函数及约束不等式具有多元多项式的形式。

例如目标函数

$$f(X)=6+3x_1-8x_2+7x_3+2x_1x_2-3x_1x_3+\frac{4}{3}x_2x_3+\frac{8}{7}x_1^2-$$
$$-9x_2^2+x_3^2$$

是一个二次函数，它是变量 x_1、x_2、x_3 的二次多项式函数。

而目标函数

$$f(X)=x_1x_2x_3+x_1^2x_2+4x_3+\frac{2}{x_1x_2}+5x_3^{-\frac{1}{2}}$$

则是 x_1、x_2、x_3 的三次多项式函数。

最简单的几何规划例子是：

1. $$\min \quad f(x)=x^{1/3}$$
$$g(x)=x^{1/6}\geqslant 1$$

2. $$\min \quad f(X)=x_1^{-4}x_2^{-1}x_4^2+3x_1^2x_2^{-2}$$
$$g(X)=\frac{1}{3}x_2x_3+3x_1^{-1/2}x_2^{-3/4}x_3^{-1}+$$
$$+\frac{9}{2}x_2^{1/2}x_3^{-1}x_4^{-1/2}\leqslant 1$$
$$X>0$$

几何规划数学模型的一般形式如下

$$\min \quad f(X)=c_1x_1^{p_{11}}x_2^{p_{12}}\cdots x_n^{p_{1n}}+\cdots$$
$$+c_mx_1^{p_{m1}}x_2^{p_{m2}}\cdots x_n^{p_{mn}}=\sum_{i=1}^{m}c_i\left[\prod_{j=1}^{n}x_j^{p_{ij}}\right]$$

式中 $c_i\geqslant 0$，p_{ij} 为正或负实数，也可以为零。

约束 $$g(X)=a_1x_1^{q_{11}}x_2^{q_{12}}\cdots x_n^{q_{1n}}+\cdots+a_rx_1^{q_{r1}}x_2^{q_{r2}}\cdots x_n^{q_{rn}}$$
$$=\sum_{i=1}^{r}a_i\left[\prod_{j=1}^{n}x_j^{q_{ij}}\right]\leqslant 0$$

式中$a_i \geqslant 0$，q_{ij} 为正或负的实数，或为零。

变压器、磁放大器及管式热交换器等的优化设计均具有几何规划形式的数学模型。

还有一类非线性规划的目标函数具有变量平方和的形式。例如

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

求上式的极小值问题称为最小二乘问题。

一个非线性规划问题可以近似为一连串的线性规划或二次规划问题，逐个进行求解，这种方法称为近似规划方法。

目标函数为凸函数而可行域为凸集时，这种非线性规划称为凸规划。

对不等式约束，可以通过加松弛变量，化为等式约束，例如：

$$h_j(X) \leqslant 0 \tag{4—3}$$

化为

$$v_j^2+h_j(X)=0 \tag{4—4}$$

如果 $h_j(X) \geqslant 0$，则也可以化为

$$-h_j(X) \leqslant 0 \tag{4—5}$$

对等式约束 $g_i(X)=0 \quad i=1, 2, \cdots, m$；可以化成 $2m$ 个不等式约束

$$\begin{cases} g_i(X) \geqslant 0 \quad i=1, 2, \cdots, m \\ -g_i(X) \geqslant 0 \end{cases} \tag{4—6}$$

这样，非线性规划问题是在约束包围所形成的可行解域内求极值，根据约束条件对目标函数影响的程度，最优解 X^* 可能在约束集合形成的边界上，也可能在可行域以内。一般情况下，显然不能用求 $f(X)$驻点的方法求最优值的条件。

［例］ 图 4—1 表示用图解法求解一个二维的二次规划。

数学模型为

$$\max \quad f(X) = 40x_1 - 0.1x_1^2 + 11x_2$$

约束：①$4x_1 + 5x_2 \leqslant 1500$

②$5x_1 + 3x_2 \leqslant 1575$

③$x_1 + 2x_2 \leqslant 420$

$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2$

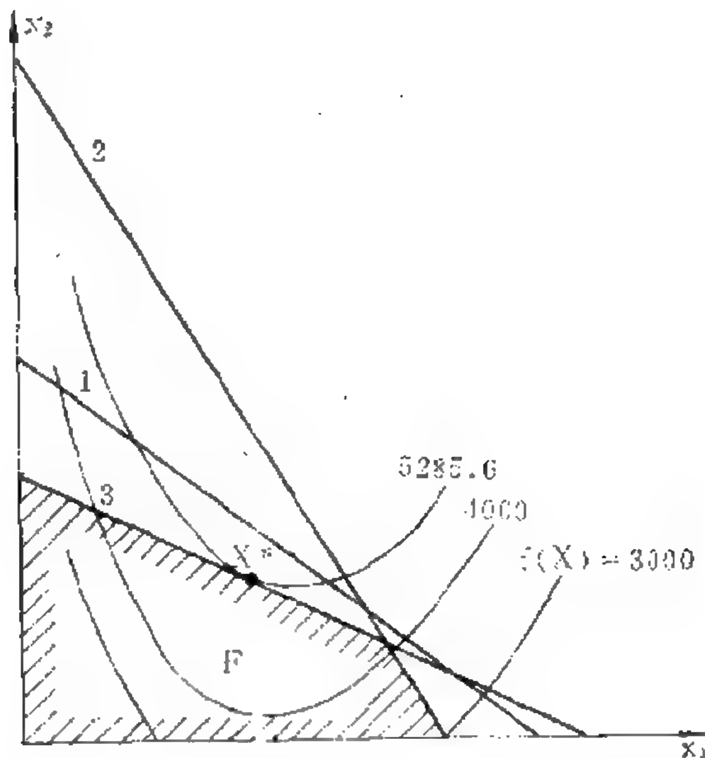


图 4—1 图解法求解非线性规划问题

本例除目标函数为非线性以外，其他约束条件均与第三章中(§ 3—3)线性规划例题相同。由图 4—1 可见，这个非线性规划问题的最优解是在约束边界上，最优目标函数 $f(X^*) = 5285.6$ 与可行域边界相切，最优点 $x_1^* = 172$，$x_2^* = 124$。

与线性规划最优解相比较，（见第三章图 3—6），上述非线性规划的解的特点是，最优解不一定在可行域顶点。

此外非线性规划问题的最优解还有如下的特点：某个无约束极值问题可能没有局部极小值，但加上非线性约束以后，却可能出现两个或两个以上的局部极小值点，而且这些极小值点不一定是无约束极值问题的全局极小值点。

§ 4-2 非线性规划应用举例

[例 1] 非线性曲线拟合问题

设某个物理现象的数学模型为

$$\varphi(t)=x_1+x_2e^{-x_3t}$$

用试验求得 t_i 时 $\varphi(t_i)$的值如表所示（$i=1, 2, \cdots, m$）。现在要确定参数 x_1、x_2、x_3，使所得试验点构成的曲线与理论曲线（数学模型）误差平方和为最小，即在最小二乘意义下求最优参数 x_1、x_2、x_3，约束为 x_3 非负，且 $x_1+x_2=1$，称为曲线拟合问题。

t	0	t_1	t_2	$\cdots$	t_m
φ	1	φ_1	φ_2	$\cdots$	φ_m

这个非线性规划的数学模型可表示为

$$\min \quad f(x_1, x_2, x_3)=\sum_{i=1}^{m}[\varphi(t_i)-x_1-x_2e^{-x_3t_i}]^2 \tag{4—7}$$

约束 $x_1+x_2=1$

$x_3\geqslant 0$

[例 2] 变压器的最优设计

对变压器进行优化设计时，要考虑在满足对性能要求的前提下，使变压器的总重量、体积或材料消耗为最小。

设我们规定使变压器总重量G为最小，变压器主要尺寸为铁心截面 s_c及磁路平均长l_c，则 G 可表为 s_c、l_c、j、B 等的函数。j

及 B 分别为电流密度及磁通密度。性能要求是变压器容量 $P \geqslant P_0$，效率 $\eta \geqslant \eta_0$，温升 $\theta \leqslant \theta_0$，它们也都是 s、l、j、B 等的函数，P_0、η_0、θ_0 为给定值。

因此，变压器优化设计问题的数学模型可表示如下，选变量为 s_c，l_c，j，B。

$$\min \quad G(s_c, \ l_c, \ j, \ B)$$

$$\text{约束：} P(s_c, \ l_c, \ j, \ B) \geqslant P_0$$

$$\eta(s_c, \ l_c, \ j, \ B) \geqslant \eta_0$$

$$\theta(s_c, \ l_c, \ j, \ B) \leqslant \theta_0$$

以小型变压器（输出功率为 $500VA$ 左右）的优化设计为例。设变压器的结构型式为壳型（铁心为 E 形），有三个铁心柱，中柱上套线圈）。给定额定电压、频率。已知变压器的额定功率为 P_0，运行时的功率损耗 W_0，为了保证变压器不会过热，规定了变压器单位面积散发功率 w_0。

要求确定变压器的几何尺寸及电磁参数 B 和 j，使变压器的材料和运行费用为最小（假设变压器寿命为 20 年，每天运行 24 小时），并满足给定要求，即设计结果应有：变压器输出功率为 P_0，功率损耗 $\leqslant W_0$，单位面积散发功率 $\leqslant w_0$。

假设变压器绕组塞满窗口，铁心柱宽为 x_1，铁心柱厚为 x_4，绕组截面积（即一个窗口面积）为 x_2x_3，绕组厚为 x_2，铁心轭宽为$\frac{1}{2}x_1$，则变压器几何尺寸与变量 x_1、x_2、x_3、x_4 的关系如下：

铁心（磁路）的平均长

$$l_c = 2(x_1 + x_2 + x_3)$$

铁心（视在）面积

$$s_c = x_1 x_4$$

绕组每匝平均长

$$l_m = 2(x_1 + \frac{\pi}{2}x_2 + x_4)$$

绕组（视在）面积

$$S_m = x_2x_3$$

铁心（视在）体积

$$V_c = S_cl_c = 2x_1x_4(x_1 + x_2 + x_3)$$

绕组（视在）体积

$$V_m = S_ml_m = 2x_2x_3(x_1 + \frac{\pi}{2}x_2 + x_4)$$

变压器散热面积可计算得：

$$S_h = 2x_1[2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4] + 2x_2[\pi x_2 + \pi x_3 + 2x_4] + 2x_3x_4$$

变压器额定功率＝额定电压×额定电流

或 $$VA = 4.44fBS_ck_cN \times I$$

$$= (4.44fBS_ck_c) \times (jS_mk_m)$$

式中 B 为铁心磁密，单位为 $Tesla$。

k_c 及 k_m 分别为铁心迭片系数及绕组填充系数，将 S_c 及 S_m 与变量 x_1、x_2、x_3、x_4 关系代入上式得：

$$VA = kx_1x_2x_3x_4jB$$

式中 $k = 4.44fk_ck_m$ 为常数。

变压器铁损 W_c 及铜损 W_m 可分别列出式子：

$$W_c = \gamma V_cB^2 = 2\gamma(x_1x_4)(x_1 + x_2 + x_3)B^2$$

$$W_m = \delta V_m j^2 = 2\delta(x_2 x_3)(x_1 + \frac{\pi}{2} x_2 + x_4) j^2$$

式中 γ 及 δ 分别为铁损系数及铜损系数。则总损耗 $W = W_o + W_m$

变压器优化设计的约束条件为：

设计的伏安数 = 所需伏安数；

设计的功率损耗值≤对损耗的限制；

设计的单位面积散发功率≤对该值的限制。

即：
$$g_1(X) = k x_1 x_2 x_3 x_4 j B - P_0 = 0$$

$$g_2(X) = 2\gamma x_1 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) B^2 + 2\delta x_2 x_3 (x_1 + \frac{\pi}{2} x_2 + x_4) j^2 - W_0 \leqslant 0$$

$$g_3(X) = \frac{2\gamma x_1 x_4 (x_1 + x_2 + x_3) B_2 + 2\delta x_2 x_3 (x_1 + \frac{\pi}{2} x_2 + x_4) j^2}{2x_1(2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4) + 2x_2(\pi x_2 + \pi x_3 + 2x_4) + 2x_3 x_4} - w_0 \leqslant 0$$

$$X = [x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ j,\ B]^T > 0$$

约束函数是多元多项式，因此变压器优化设计的数学模型是几何规划形式。

变压器优化设计的目标函数为

$$f(X) = f_1(X) + f_2(X)$$

其中 $f_1(X) = \alpha V_c k_c + \beta V_m k_m$ 表示材料费，

α 及 β 分别为硅钢片及铜线的单位价格。

$$f_2(X) = T p (W_c + k_L W_m)$$

表示运行费，T 为寿命（若以 20 年计，共合 175000 小时），p 为每度电费，k_L 为负荷系数，即平均负荷与满负荷之比。

$$f(X)=\alpha V_c k_c+\beta V_m k_m+(W_c+k_L W_m)Tp$$

$$=2x_1x_4(x_1+x_2+x_3)(\alpha k_c+\rho B^2)+$$

$$2x_2x_3(x_1+\frac{\pi}{2}x_2+x_4)(\beta k_m+\sigma j^2)$$

式中 $$\rho=Tp\gamma,\ \ \sigma=Tp\delta k_L$$

于是变压器优化设计问题的数学模型为：

$$\min\ \ f(X)=f_1(X)+f_2(X)$$

$$g_1(X)=0$$

$$g_2(X)\leqslant 0$$

$$g_3(X)\leqslant 0$$

$$X=[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ j,\ B]^T>0$$

[例 3]　选频网络的设计

选频网络可用计算机辅助设计，也经常遇到寻优问题。

图 4—2 表示一个梯形低通网络。网络的阶次为 n，n 为无功元件（L、C）的数目。R_0 为电源内阻，R_L 为负载电阻，均假设为已知的。

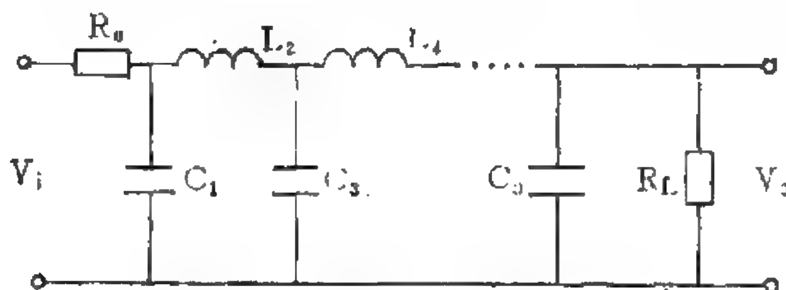


图 4—2　梯形 LC 低通网络

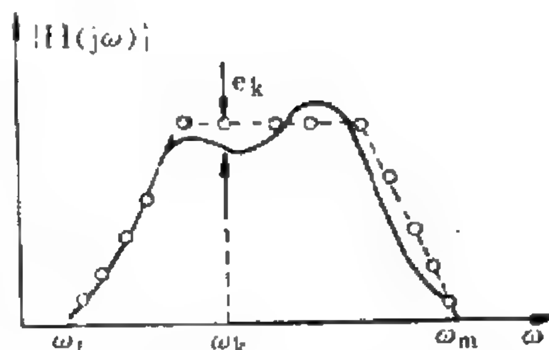
网络的响应函数为 $H(j\omega)=\dfrac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}$，其中 $V_i(j\omega)$ 为输入电压的频率特性，$V_0(j\omega)$ 为输出电压的频率特性。显然这个网络响应函数是 n 维变量 $X=(C_1, L_2, C_3, L_4, \cdots, C_n)^T$ 的函数。

以二阶系统为例，可以证明（这时 $n=2$，$C_1=C$，$L_2=L$）：

$$\frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}=\frac{1}{\left(\frac{R_0}{R_L}\right)LC(j\omega)^2+\left(R_0C+\frac{L}{R_L}\right)(j\omega)+\left(1+\frac{R_0}{R_L}\right)}$$

$$=\frac{1}{a_2(j\omega)^2+a_1(j\omega)+a_0} \qquad (4\text{—}8)$$

网络优化设计的任务是选择这 n 个网络元件参数，使实际计算的网络函数与给定要求的网络函数间的误差平方和为最小。



实线——计算值 $|H(j\omega)|$

虚线——给定值 $|H_s(j\omega)|$

图 4—3 网络响应函数

图 4—3 表示网络函数幅值给定值 $|H_s(j\omega)|$ 与计算值 $|H(j\omega, X)|$ 之差，在感兴趣的一段频率特性上选择 m 个点，其中点 k 的误差为

$$e_k=|H_s(j\omega_k)|-|H(j\omega_k, X)| \qquad (4\text{—}9)$$

实际响应 $H(j\omega_k)$ 与 n 个变量（$C_1, L_2, C_3, \cdots, C_n$）有关。

目标函数为

$$\sum_{k=1}^{m} W_k e_k^2 \qquad (4\text{—}10)$$

W_k 为非负的权函数。

因此这是无约束非线性极值问题，其数学模型为：

$$\min \quad \sum_{k=1}^{m} W_k e_k^2 \tag{4—11}$$

如果我们还要求网络功率消耗为最小，则可将目标函数改写为：

$$\min \quad K_1\sum_{k=1}^{m} W_k e_k^2 + K_2 P \tag{4—12}$$

K_1 及 K_2 为权函数。

[例 4] 电厂发电机组间的经济负荷分配

设有三台发电机组并联运行，功率分别为 x_1、x_2、$x_3(KW)$，每台发电机的发电费用分别为

$$f_1(x_1) = 2x_1^2 + 3x_1 + 1$$

$$f_2(x_2) = x_2^2 + 4x_2 + 2$$

$$f_3(x_3) = x_3^2 + x_3 + 6$$

要求三台发电机总功率为 L，求发电机组间最优负荷分配，使发电总费用为最小。则经济负荷分配问题的数学模型为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{3} f_i(x_i)$$

$$约束 \quad \sum_{i=1}^{3} x_i = L$$

[例 5] 动态最优控制问题的参数化方法

求动态系统最优控制近似解的最简单方法是将控制变量 $u(t)$ 参数化，例如表达成下述形式：

$$u(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i f_i(t) \tag{4—13}$$

调整有限个参数$\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$，使目标函数为最小。

设系统的状态方程为

$$\dot{x} = -0.2x + 10\tanh u \text{[注]} \tag{4—14}$$

求 $u(t)$ 在$[0,\ t_f]$上的数值，使得到：

$$\min \quad J = \int_0^{t_f} (10x^2 + u^2)dt + 10x^2(t_f) \tag{4—15}$$

取 $$u(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2$$

目标泛函中的 x 可由状态方程取积分求得，再代入目标泛函，可将 J 变成三个参数 a_1、a_2、a_3 的非线性函数。

$$J = J(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

于是可用非线性规划求解。

§ 4-3 库恩—图克定理——有不等式约束的最优化理论

设最优化问题

$$\min \quad f(X) \tag{4—16}$$

约束条件 $g_i(X) \leqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$

$f(X)$及 $g_i(X)$为不同的函数。

第二章中已经说过，引入松弛变量，将不等式约束变为等式约束，就可以用拉格朗日古典理论求解，库恩—图克定理与拉格朗日方法有一定联系，因此我们先讨论一下拉格朗日乘子法求最优化问题。

[注] $\tanh u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$ 称为双曲正切。

由于非线性规划中不一定有变量为非负的约束，因此一般取松弛变量的平方项，将约束不等式化为等式：

$$g_i(X)+v_i^2=0$$

拉格朗日函数为：

$$L(X,\ \lambda,\ V)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[g_i(X)+v_i^2] \tag{4—17}$$

$L(X,\ \lambda,\ V)$为极值的必要条件如下：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{\partial L}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}\right]=0,\ k=1,2,\cdots,n \\ (2) & \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}=g_i(X)+v_i^2=0,\ i=1,2,\cdots,m \\ (3) & \dfrac{\partial L}{\partial v_i}=2\lambda_i v_i=0,\ i=1,2,\cdots,m\end{array}\right\} \tag{4—18}$$

条件(3) 有三种情况：

(a) $\lambda_i^*=0,\ v_i^*\neq 0,$

(b) $v_i^*=0,\ \lambda_i^*\neq 0,$

(c) $\lambda_i^*=v_i^*=0$。

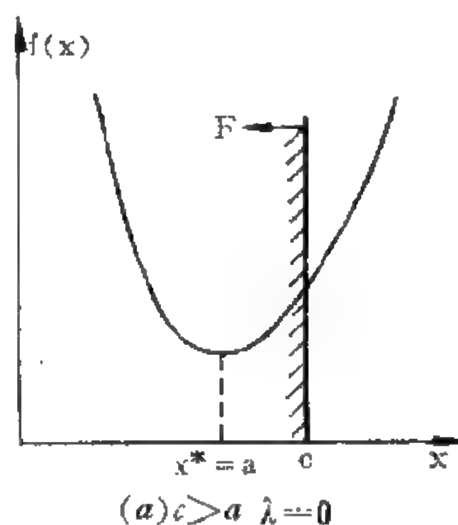
需要分别讨论。

讨论：

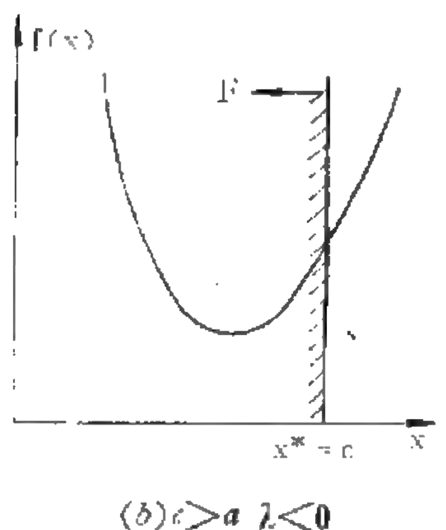
(a) 设 $\lambda_i^*=0$，而 $v_i^*\neq 0$,则 $g_i(X^*)<0$，说明最优解在约束边界以内。由(4—18) 式条件 (1)，$\dfrac{\partial f}{\partial x_k}=0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。或$\nabla f(X^*)=0$，这是无约束极值的必要条件。

(b) 设 $v_i^*=0$,而 $\lambda_i^*\neq 0$,则 $g_i(X^*)=0$，即最优解在第 i 个约束边界上。由于 $\lambda_i^*\neq 0$，故这是有约束的最优化问题，最优解不满足 $\nabla f(X^*)=0$ 的条件。

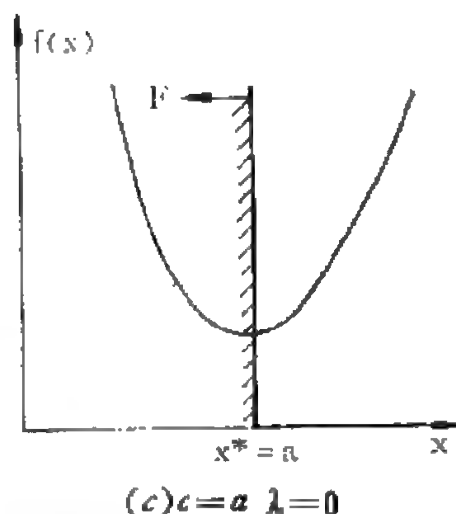
(c) $v_i^* = 0$, $\lambda_i^* = 0$, 则 $g_i(X^*) = 0$,由 (4—18) 式条件 (1) $\nabla f(X^*) = 0$,说明最优解既在约束边界上,又满足 $\nabla f(X^*) = 0$, 即约束边界恰好经过无约束最优点。



$(a) c>a \ \lambda=0$



$(b) c>a \ \lambda<0$



$(c) c=a \ \lambda=0$

图 4—4 求 $f(x)=(x-a)^2+b$ 的最小值, $x\leqslant c$, $c\geqslant a$,

[例] $\min \quad (x-a)^2+b$

约束 $\quad x\leqslant c$

$\quad c\geqslant a$

$$L=(x-a)^2+b+\lambda(x-c+v^2)$$

① $\dfrac{\partial L}{\partial x}=2(x-a)+\lambda=0$

② $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x-c+v^2=0$

③ $\dfrac{\partial L}{\partial v}=2\lambda v=0$

讨论: (a) $\lambda^*=0, x=a, v^2=c-a$, $c>a$, 则 v 为实数, 最优解 $x^*=a$, $c>a$ (见图 4—4a)

(b) $v^*=0$, $x^*=c$, $\lambda^*=2(a-c)<0, c>a$, 最优解在约束边界上。(图 4—4b)

(c) $v^*=0$, $\lambda^*=0, x^*=c, c=a$, 最优解为 $x^*=a$, 约束边界穿过该点。(图 4—4c)

当不等式约束很多时,要引人很多个松弛变量,因此用这种方法求解是很

困难的。

1951 年库恩—图克提出了处理不等式约束条件下非线性最优化问题的完整理论，得到一组不等式约束最优问题的必要条件，称为库恩—图克定理，使非线性最优化理论发展到一个新的阶段。

定理 1.

设最优化问题为[注 1][注 2]

$$\left.\begin{aligned}&\min \quad f(X)\\&\text{约束}\ g_i(X)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{aligned}\right\}\qquad(4-19)$$

设 $f(X)$ 及 $g_i(X)$ 均为可微函数。

与拉格朗日函数类似，定义

$$L(X,\lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)$$

并假设乘子 λ_i 存在，则在最优点 X^*，必定满足下述条件：

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad \frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j}=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,n\\
&\quad\ \text{或}\nabla_X L(X^*,\ \lambda^*)=0\\
&2.\quad g_i(X^*)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\cdots,m,\text{或}\nabla_\lambda L(X^*,\lambda^*)\leqslant 0\\
&3.\quad \lambda_i^* g_i(X^*)=0, i=1,2,\cdots,m,\text{或}(\lambda^*)^T G(X^*)=0\\
&4.\quad \lambda_i^*\geqslant 0
\end{aligned}\right\}\qquad(4-20)$$

式中 $\lambda=[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m]^T$

$$G(X)=[g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_m]^T$$

以上条件称为库恩—图克条件，λ_i 称为库恩—图克乘子。

[注 1]：若约束条件为 $g_i(X)\geqslant 0$，（驻点条件②也跟着改变），则上述驻点条件 ④ 应改为 $\lambda_i^*\leqslant 0$。

[注 2]：若求 $\max f(X)$，满足约束 $g_i(X)\geqslant 0$，则驻点条件④应仍为 $\lambda_i^*\geqslant 0$。

[定理 1 的证明]：将不等式约束 $g_i(X)\leqslant 0$ 变为等式约束：

$$S_i+g_i(X)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

S_i 为松弛变量，$S_i\geqslant 0$

则拉格朗日函数为：

$$L(X,S,\lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i[S_i+g_i(X)]$$

于是：

$$\frac{\partial L(X^*,S^*,\lambda^*)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(X^*)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i(X^*)}{\partial x_j}=0$$，即条件①。

$$\frac{\partial L(X^*,S^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_i}=S_i^*+g_i(X^*)=0$$

已知 $S_i^*\geqslant 0$，故得：

$g_i(X^*)\leqslant 0$（约束条件），即条件②。

又 $\frac{\partial L(X^*,S^*,\lambda^*)}{\partial S_i}\geqslant 0$，($\because S_i^*\geqslant 0$。若 $S_i^*=0$ 时，$\frac{\partial L}{\partial S_i}<0$，则移动到 $S_i>0$，$L(X,S,\lambda)$ 将更小，因而 $S_i^*=0$ 不是最优，有矛盾），从而得 $\lambda_i^*\geqslant 0$，即条件④。

在 $S_i^*=0$ 边界上，$S_i^*\frac{\partial L(X^*,S^*,\lambda^*)}{\partial S_i}=0$，或 $S_i^*\lambda_i^*=0$，已知 $S_i^*+g_i(X^*)=0$，$S_i^*=-g_i(X^*)$

$\therefore\quad \lambda_i^*g_i(X^*)=0$，即条件③。

证毕

注意，这里 λ_i 与拉格朗日乘子类似，但拉格朗日乘子可正可负，而库恩—图克乘子 λ_i 的符号是确定的。

[例 1]　min　$f(x)=(x-a)^2+b$

约束　$x\geqslant c$，或　$x-c\geqslant 0$

[解]：定义

$$L(x,\lambda)=(x-a)^2+b+\lambda(x-c)$$

则　$$\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-a)+\lambda=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x-c\geqslant 0 \qquad (2)$$

$$\lambda(x-c)=0 \qquad (3)$$

$$\lambda\leqslant 0 \qquad (4)$$

讨论三种情况：(a) $\lambda=0$，$x\neq c$，

(b) $x-c=0$，$\lambda\neq 0$，

(c) $\lambda=0$，$x=c$，

于是：

(a) 由 (1)，若$\lambda^*=0$，则 $x^*=a$，

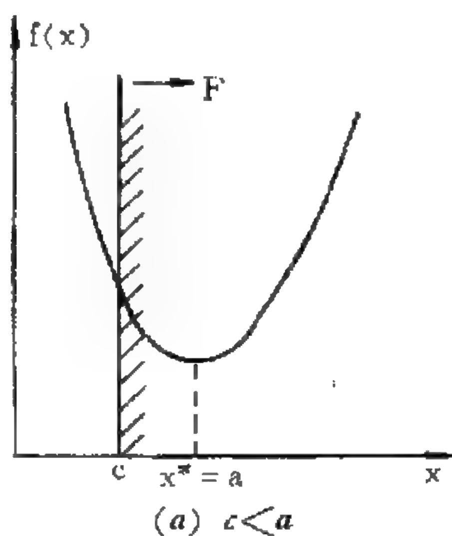
(b)、(c)若$x^*=c$则$\lambda^*=2(a-c)$、0

因此，当 $a\geqslant c$，则 $x^*=a$，$\lambda^*=0$；

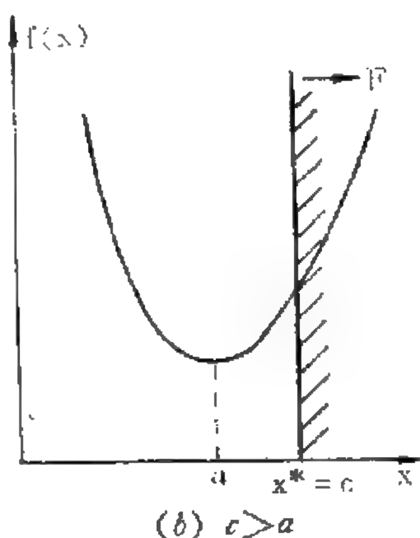
当 $a<c$，则 $x^*=c$，

$\lambda^*=2(a-c)<0$

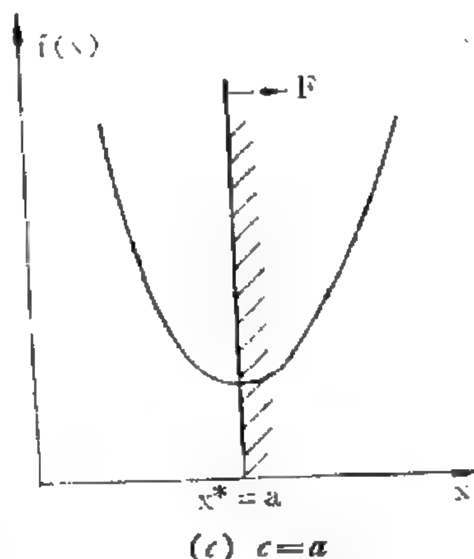
与拉格朗日乘子法所得结果相同（见图 4—5）。



(a) $c<a$



(b) $c>a$



(c) $c=a$

图 4—5　用库恩—图克定理求解例题 1

[例 2] $\min\ f(X)=x_1^2+6x_1x_2-4x_1-2x_2$

$$g_1(X)=x_1^2+2x_2-1\leqslant 0$$

$$g_2(X)=x_2-x_1-\tfrac{1}{2}\leqslant 0$$

由库恩—图克定理

1.　$2x_1+6x_2-4+2\lambda_1x_1-\lambda_2=0$

$$6x_1 - 2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

2. $\begin{cases} x_1^2 + 2x_2 - 1 \leqslant 0 \\ x_2 - x_1 - \frac{1}{2} \leqslant 0 \end{cases}$

3. $\lambda_1(x_1^2 + 2x_2 - 1) = 0$

$\lambda_2(x_2 - x_1 - \frac{1}{2}) = 0$

4. $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$

由 $g_1(X) \leqslant 0$，$g_2(X) \leqslant 0$ 构成的可行域 F 如图 4—6 中 a、b、c、d 以下阴影线范围。

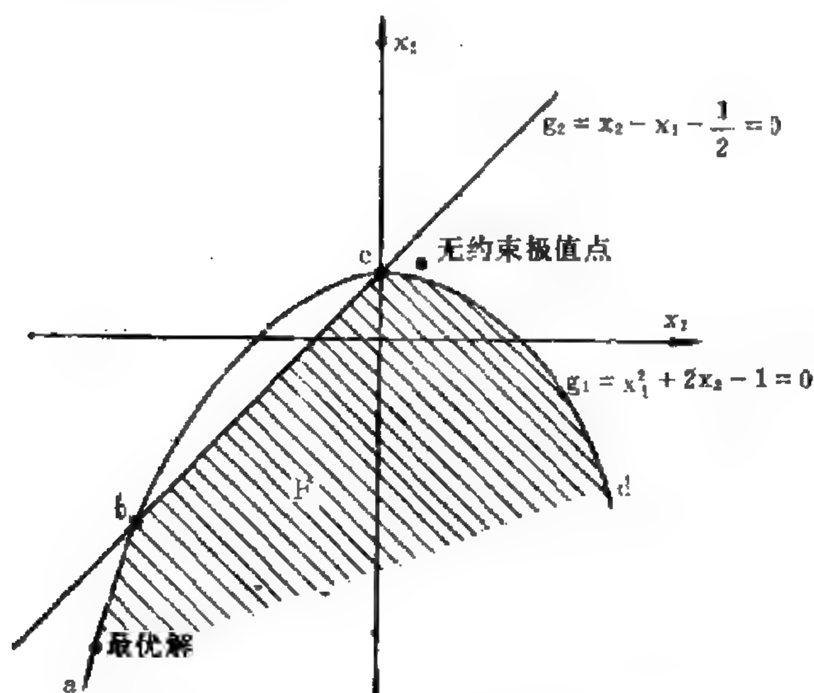


图 4—6 用库恩—图克定理求解例题 2

该目标函数可写成

$$f(X) = X^TQX + C^TX, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \ C = [-4, \ -2]^T$$

其无约束极小值点为 $x_1 = \frac{1}{3}$，$x_2 = \frac{5}{9}$，$f(X)$极小值为$-\frac{11}{9}$，

$(\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$在约束边界以外。

讨论：

由库恩—图克定理所得到的有约束最优的必要条件可分四种情况：

a. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $g_1(X) < 0$, $g_2(X) < 0$

即最优解在约束边界以内，这种情况予计是不可行的，也即不可能满足全部库恩—图克条件。

检验：解条件1，$x_1 + 3x_2 = 2$, $3x_1 = 1$，得 $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{5}{9}$，将这组解代入条件2，$x_1^2 + 2x_2 = \frac{11}{9} > 1$，即不满足 $g_1(X) \leqslant 0$，这个解实际上是由$\nabla f(X) = 0$ 得到的，因此是不可行的，可见这种情况不成立。

b. $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$，故 $g_1(X) = 0$, $g_2(X) = 0$,

即同时满足两个等式，在图中应该位于 b、c 两点上。解 $g_1(X) = 0$, $g_2(X) = 0$，得两组解：

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

将解代入条件1，

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{得 } \lambda_1 = 1.5, \quad \lambda_2 = -1, \text{不满足 } \lambda_2 \geqslant 0 \text{ 的条件。}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{得} \lambda_1 = -31/2, \text{不满足 } \lambda_1 \geqslant 0 \text{ 的条件。} \quad \lambda_2 = 45,$$

因此这种情况也不成立。

c. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$。

即 $g_1(X) < 0$, $g_2(X) = 0$，最优解应在直线 bc 段，即约束 $g_2(X) = 0$ 的边界上。

检验：由条件 1，$2x_1+6x_2-4-\lambda_2=0$

$$6x_1-2+\lambda_2=0$$

由条件 3，$x_2-x_1-\frac{1}{2}=0$

联解以上三式得：

$$x_1=3/14$$
$$x_2=10/14$$
$$\lambda_2=10/14$$

不满足 $g_1(X)<0$ 的条件。这时 $x_1^2+2x_2=\frac{289}{196}>1$，可见这种情况也不成立。

d．$\lambda_2=0$，即 $g_2(X)<0$

$\lambda_1\geqslant 0$，　　$g_1(X)=0$

最优解应在 $g_2(X)=0$ 边界以内，而位于 $g_1(X)=0$ 边界上，即曲线段 ab 或 cd 上。

由条件 1，$2x_1+6x_2-4+2\lambda_1x_1=0$

$$6x_1-2+2\lambda_1=0$$

由条件 3，$x_1^2+2x_2=1$

解得：$x_1^*=x_2^*=-1-\sqrt{2}$

$\lambda_1^*=4+3\sqrt{2}$

它满足所有约束条件。

由此可见库恩—图克定理告诉我们，如果目标函数 $f(X)$的无约束极值点位于约束的边界以外，则不等式约束下的最优解一定在某些约束的边界上。

如果 $f(X)$和 $g_i(X)$均为凸函数，则库恩—图克条件为 $f(X)$取极值的必要及充分条件。如果 $f(X)$是严格凸函数，约束 $g_i(X)$

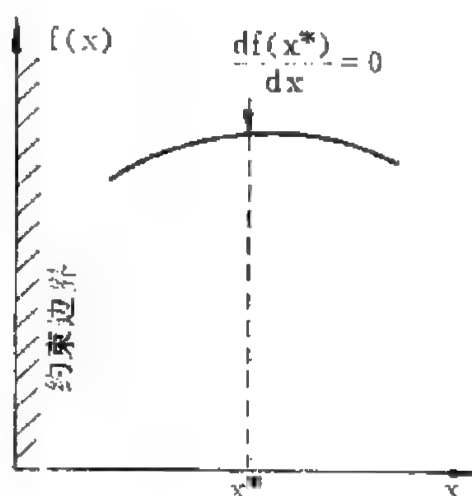
为凸函数，则库恩—图克条件是在不等式约束下目标函数取唯一（绝对）极小值的充分必要条件。

定理 2。

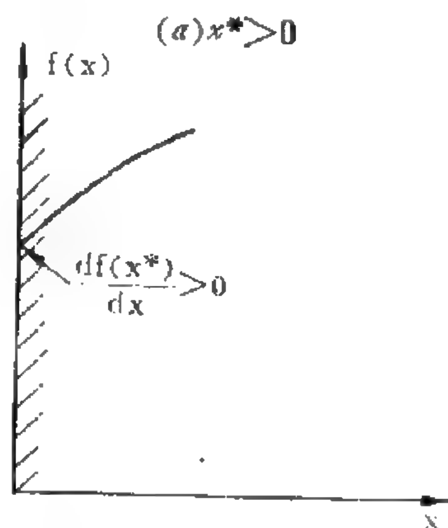
$$\left.\begin{array}{l}\min \quad f(X) \\ \quad x_i \geqslant 0, \ i=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \quad (4\text{—}21)$$

的必要条件为：

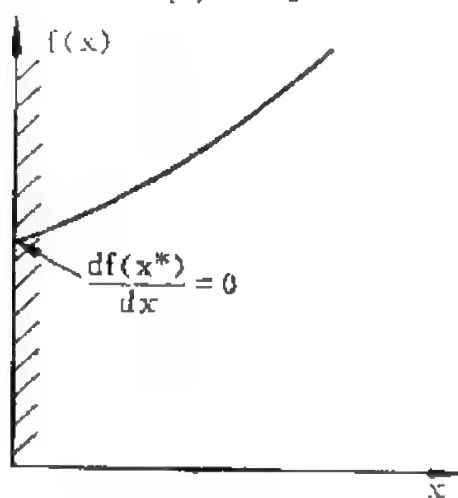
$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(X^*) \geqslant 0 \\ (X^*)^T \nabla f(X^*) = 0 \\ X^* \geqslant 0\end{array}\right\} \quad (4\text{—}22)$$



(a) $x^*>0$



(b) $x^*=0$



(c) $x^*=0$

图 4—7 (4—22)式的三种可能情况

分几种情况讨论（见图 4—7）：

a. 若最优解在约束边界内，即 $X^*>0$，则 $\nabla f(X^*)=0$

图 4—7(*a*)表示一维的情况。

$$x_j^* \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} = 0 \text{ 或}$$

$(X^*)^T \nabla f(X^*) = 0$ 也成立。

b. 如果 X^* 在边界上，则 $X^*=0$，这时又可能有两种情况 如图 4—7(*b*)及(*c*)所示。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{i.} & \frac{df}{dx}>0 \\ \text{ii.} & \frac{df}{dx}=0\end{array}\right\} \text{即可写成 } \frac{\partial f}{\partial x} \geqslant 0$$

而且 $x_j^*\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j}=0$ 也成立，即$(X^*)^T\nabla f(X^*)=0$。

综合上述几种情况，将必要条件写成一般形式，得

$$\nabla f(X^*)\geqslant 0$$

$$(X^*)^T\nabla f(X^*)=0$$

$$X^*\geqslant 0$$

定理 3。

$$\left.\begin{array}{ll}\min & f(X)\\ \text{约束} & g_i(X)\leqslant 0 \quad i=1,2,\cdots,m\\ & x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n\end{array}\right\} \qquad (4-23)$$

比定理 1 的模型多了一组约束 $x_j\geqslant 0$。

定义 $$L(X,\lambda,\mu)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j x_j \qquad (4-24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(X^*,\ \lambda^*,\ \mu^*)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X^*)+\mu_j^*=0,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

设法消去 μ^*，则必要条件中将不包含 μ。

令 $\mu_j^* x_j^*=0$，$\mu_j^*\leqslant 0$

定义 $$L(X,\ \lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(X^*,\lambda^*)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X^*)=-\mu_j^*\geqslant 0$$

$$j=1,2,\cdots,n$$

$$\because \quad \mu_j^* x_j^* = 0, \quad \therefore \quad -\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X^*)\right] x_j^* = 0$$

我们得必要条件为，

$$\left.\begin{array}{lll}
(1) & \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(X^*,\lambda^*) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(X^*) \geqslant 0, & \\
 & & \text{或} \nabla_X L(X^*,\lambda^*) \geqslant 0 \\
(2) & g_i(X^*) \leqslant 0 & \text{或} \ \nabla_\lambda L(X^*,\lambda^*) \leqslant 0 \\
(3) & x_j^* \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(X^*)\right] = 0 & \\
 & & \text{或} \ (X^*)^T \nabla_X L(X^*,\lambda^*) = 0 \\
(4) & \lambda_i^* g_i(X^*) = 0 & \text{或} \ (\lambda^*)^T \nabla_\lambda L(X^*,\lambda^*) = 0 \\
(5) & x_j^* \geqslant 0 & X^* \geqslant 0 \\
(6) & \lambda_i^* \geqslant 0 & \lambda^* \geqslant 0
\end{array}\right\} \quad (4-25)$$

［例］ 用库恩—图克条件解下述问题（见图 4—8）

$$\min \quad f(X) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

约束

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

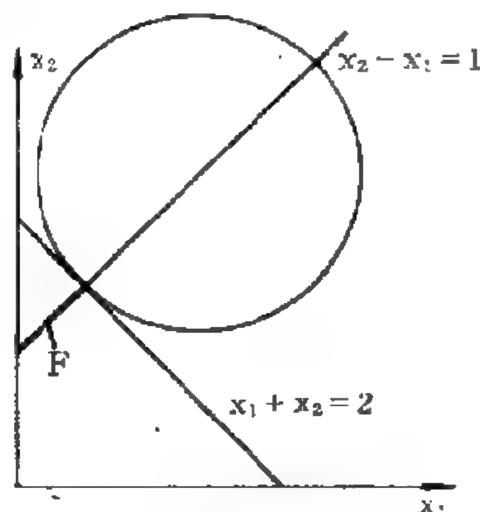


图 4—8 非线性规划问题举例

定义 $L(X,\lambda) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + \lambda_1(x_2 - x_1 - 1) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 2)$

由库恩—图克条件（4—25）式得：

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) - \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-2)+\lambda_1+\lambda_2\geqslant 0$$

(2) $x_1+x_2-2\leqslant 0$

$x_2-x_1-1=0$

(3) $x_1[2(x_1-1)-\lambda_1+\lambda_2]=0$

$x_2[2(x_2-2)+\lambda_1+\lambda_2]=0$

(4) $\lambda_2(x_1+x_2-2)=0$

(5) $x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0$

(6) $\lambda_2\geqslant 0$

讨论：

a. 设 $x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，$\lambda_2=0$

由（3） $2(x_1-1)-\lambda_1=0$

$2(x_2-2)+\lambda_1=0$

由（2） $x_2-x_1-1=0$

解得 $x_1^*=1$，$x_2^*=2$，$\lambda_1^*=0$

但由（2） $x_1+x_2-2\leqslant 0$，现 $x_1=1$，$x_2=2$，该条件不满足，

∴ 解不成立。

b. $\lambda_2\neq 0$

$$\left.\begin{aligned}&\text{由（4）}\quad x_1+x_2-2=0\\&\text{由（2）}\quad x_2-x_1-1=0\end{aligned}\right\}\text{解得}\quad x_2^*=\frac{3}{2},\ x_1^*=\frac{1}{2},$$

由（3） $2(x_1-1)-\lambda_1+\lambda_2=0$ $\quad\lambda_2^*=1$

$2(x_2-2)+\lambda_1+\lambda_2=0$ $\quad\lambda_1^*=0$

检验(5)、(6)均成立，故 $x_1^*=\frac{1}{2}$，$x_2^*=\frac{3}{2}$ 为最优解。

而 $f(x_1^*, x_2^*)=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$（见图 4—9）。

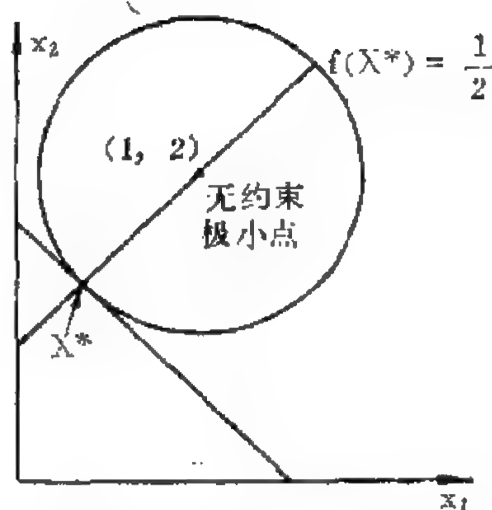


图 4—9 用库恩—图克定理求解图 4—8 例题结果

§ 4-4 库恩-图克条件的几何解释

我们已知，有不等式约束情况下求解最优化问题，应在可行域内寻优，若初始点 X^0在可行域内，则可沿负梯度方向搜索（如图 4—10）。当到达可行域边界时，例如 $X=X^k$，若继续沿负梯度方向 $-\nabla f(X^k)$搜索，则将超出可行域 F。所以这时只能沿可行域边界搜索，直到最优点 X^*。到达最优点后，如果还要继续向前搜索，则只能在约束 $g_1(X)=0$ 与 $g_2(X)=0$ 交点上两条（与约束相切的）切线形成的夹角范围内（可行域内）移动。在上述范围内的搜索方向是该点的可行方向。沿可行方向可以保证向前搜索的点仍在可行域范

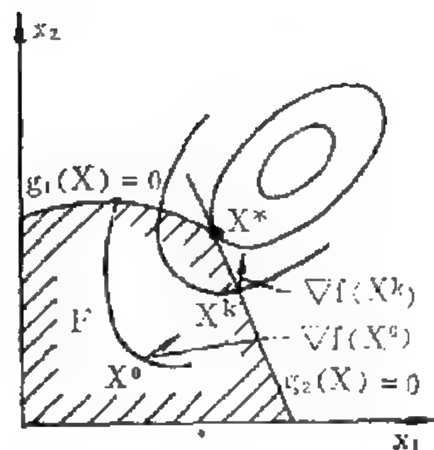


图 4—10 不等式约束下求解非线性最优化问题

围内。

[例]　min　$f(X)=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$

$$g_1(X)=x_1^2-x_2\leqslant 0$$

$$g_2(X)=x_1+x_2-2\leqslant 0$$

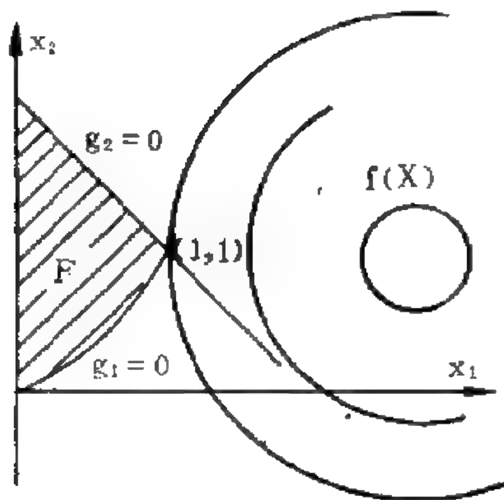


图 4—11 例题中的目标函数等高线及可行域

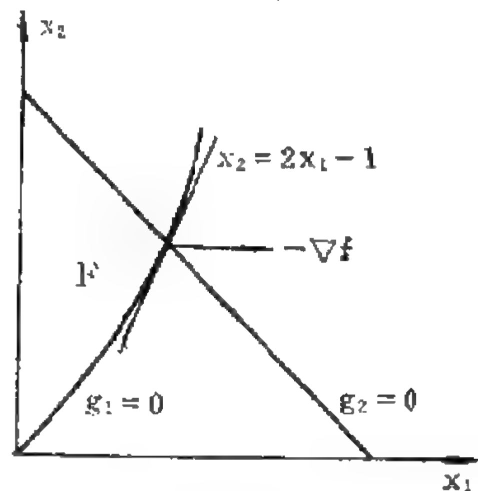


图 4—12 图 4—11 中约束方程交点上 $f(x)$ 的负梯度方向

$g_1(X)=0$ 与 $g_2(X)=0$ 的交点为(1,1),(图4—11)。在(1,1)点 $g_1(X)$ 的梯度为 $\nabla g_1(X)=\begin{bmatrix}2x_1\\-1\end{bmatrix}_{(1,\ 1)}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，切线方程为 $x_2=2x_1-1$。

$f(X)$ 沿该点的负梯度方向是最速下降方向（图 4—12）。

若从某点出发搜索，搜索方向 P 与 $-\nabla f(X)$ 夹角小于 90°，则沿 P 方向 $f(X)$ 是下降的，见图 4—13a（下降速度比沿 $-\nabla f(X)$ 方向小）。P 与 $-\nabla f(X)$ 相互垂直，则目标函数值不变。若 P 与 $-\nabla f(X)$ 夹角大于90°，则函数值沿 P 方向上升。（图 4—13b）。

如果搜索到点（1，1），则可行方向与 $-\nabla f(X)$ 夹角已大于

90°，没有使 $f(X)$ 下降的可行方向，由此可见，(1，1) 已是最优解 X^*。（见图 4—13c）。

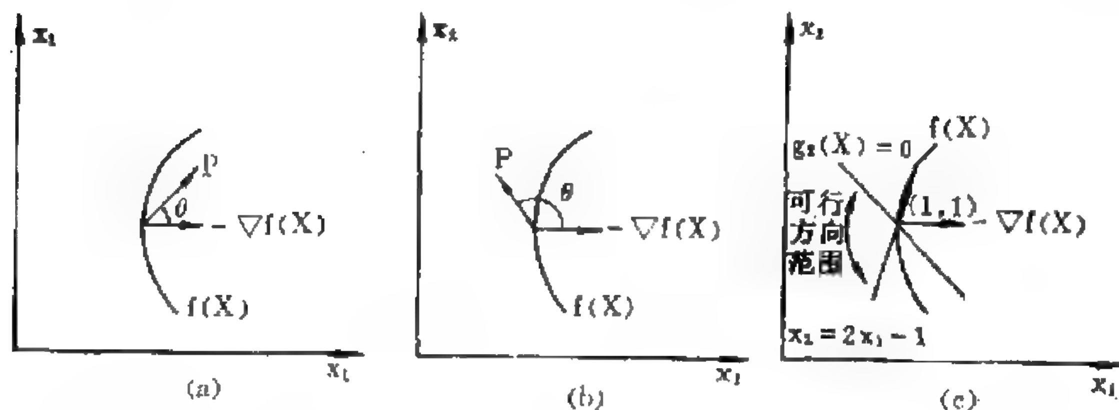


图 4—13　搜索方向 P 与负梯度方向夹角

一般情况下，$g_1(X)$、$g_2(X)$均是非线性的，求约束函数梯度 $\nabla g_i(X)$（其方向为 $g_i(X)$的法线方向），与 $g_i(X)$的切线方向垂直，若有一个约束为线性，则它的梯度与该线性函数垂直。（见图 4—14）。

在最优点X^*，负梯度方向 $-\nabla f(X^*)$ 位于$\nabla g_1(X)$与$\nabla g_2(X)$组成的扇形范围内（或∇g_1 与 g_2 形成的夹角内），其可行方向与 $-\nabla f(X)$夹角大于 90°，因此 X^* 已达最优。（见图 4—15a）

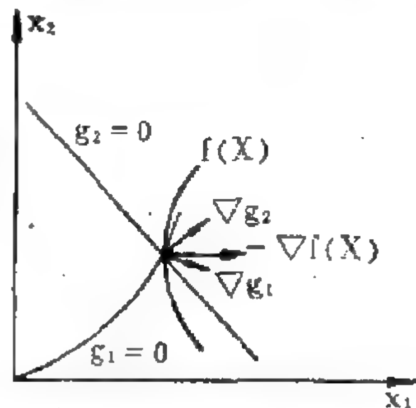


图 4—14　有一个约束为线性方程的情况

假设有某点的 $-\nabla f(X)$ 落在∇g_1与∇g_2 形成的扇形范围以外，则沿可行方向目标函数值还可下降。说明该点不是最优。（见图 4—15b 及 c）

在最优点 X^*，$-\nabla f(X^*)$一定处于$\nabla g_1(X^*)$和$\nabla g_2(X^*)$之间。所以若有m个约束，$-\nabla f(X^*)$可用$\nabla g_1(X^*)$ 和$\nabla g_2(X^*)$，…，$\nabla g_m(X^*)$的非负线性组合表示：

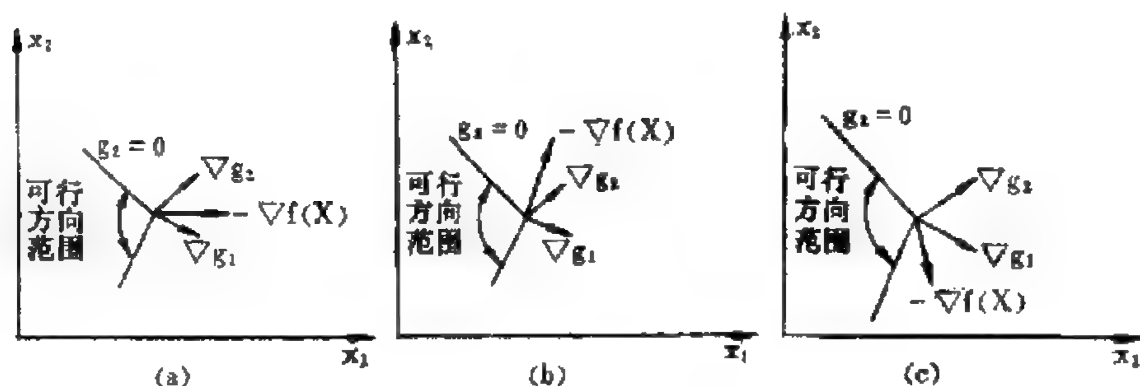


图 4—15 负梯度方向与可行方向范围

$$
\left.\begin{aligned}
&1.\quad -\nabla f(X^*)=\lambda_1^*\nabla g_1(X^*)+\lambda_2^*\nabla g_2(X^*)+\cdots+\lambda_m^*\nabla g_m(X^*)\\
&\qquad =\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^*\nabla g_i(X^*)\\
&2.\quad \text{式中 } \lambda_i^*\geqslant 0,\ \lambda^* \text{ 为非负系数（即非负条件）}\\
&3.\quad \text{约束经过最优点，} g_i(X^*)=0,\ \lambda_i^*\geqslant 0,\\
&\qquad \text{即}\quad \lambda_i^* g_i(X^*)=0\\
&\qquad \text{约束不经过最优点，} g_i(X^*)<0,\ \lambda_i^*=0,\ \text{组合系数为 0。}\\
&4.\quad \text{不等式约束}\quad g_i(X^*)\leqslant 0
\end{aligned}\right\}\qquad (4\text{—}26)
$$

这四个条件就是前面证明的库恩—图克条件，现在从几何上又作了证明。

定理。

若目标函数是严格凸的，约束函数是凸的，则库恩—图克条件是在不等式约束下目标函数取唯一（绝对）极小值的充分必要条件。

§ 4-5 鞍点条件

库恩—图克条件要求函数 $f(X)$及$g_i(X)$是可导的，并且只有在 $f(X)$ 及 $g_i(X)$ 为凸函数情况下这些条件才是驻点的充分必要条件，如果是非凸函数，它们只是必要条件。

由第二章已知，拉格朗日函数 $L(X,\lambda)$ 在 (X^*, λ^*) 处为鞍点，上述驻点条件也可用 $L(X,\lambda)$ 鞍点条件来叙述。下面说明当 $f(X)$ 及 $g_i(X)$ 不是可导的也不是凸函数的情况下求最优化问题的充分条件。

一、鞍点的意义

[例]函数 $f(X)=x_2^2-x_1^2$

在原点 (0, 0)，$\nabla f(X)=[-2x_1,2x_2]^T=[0,\ 0]^T$

Hesse 阵 $H(X^*)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$。这个阵既不是正定也不是负定，是不定的。所以它不是极点，称为鞍点。

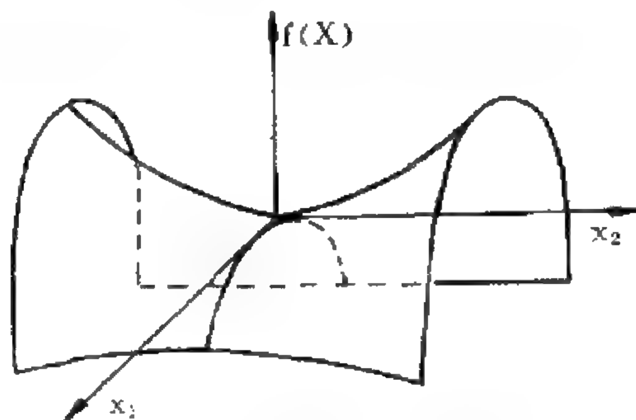


图 4—16 鞍点的几何解释

从几何上看（图 4—16），保持 x_1 不变，x_2变化，$f(x_2)$ 是下凸的函数，有极小点在原点，而保持 x_2 不变，$f(x_1)$ 是上凸的函数，原点是极大点，在原点附近曲面 $f(X)$ 形似马鞍，故称为鞍点。

二、鞍点条件

最优化问题

$$\left.\begin{aligned}&\min\quad f(X)\\&\text{约束}\quad g_i(X)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\\&f(X)\ \text{及}\ g_i(X)\ \text{均为实函数}\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{—}27)$$

没有对 $f(X)$ 及 $g_i(X)$ 规定可导性或凸性。

拉格朗日函数

$$L(X, \lambda)=f(X)+\lambda^T G(X)$$

$$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)^T$$

$$G(X)=[g_1(X), g_2(X), \cdots, g_m(X)]^T$$

或 $$L(X,\lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X) \qquad \lambda_i\geqslant 0$$

第二章已给出拉格朗日函数鞍点的定义为：

若 (X^*, λ^*) 满足下述条件，则 (X^*, λ^*) 是 $L(X, \lambda)$ 的鞍点，

$$L(X^*, \lambda)\leqslant L(X^*, \lambda^*)\leqslant L(X, \lambda^*)$$

即保持 λ^* 不变，则

$$L(X^*, \lambda^*)=\min \quad L(X, \lambda^*), \quad X\in S$$

保持 X^* 不变，

$$L(X^*, \lambda^*)=\max \quad L(X^*, \lambda), \quad \lambda>0$$

定理1。

在(4—27)式所示最优化问题中，若 $\lambda^*\geqslant 0$，则 (X^*,λ^*) 是拉格朗日函数 $L(X,\lambda)$ 的鞍点，当且仅当下述条件成立：

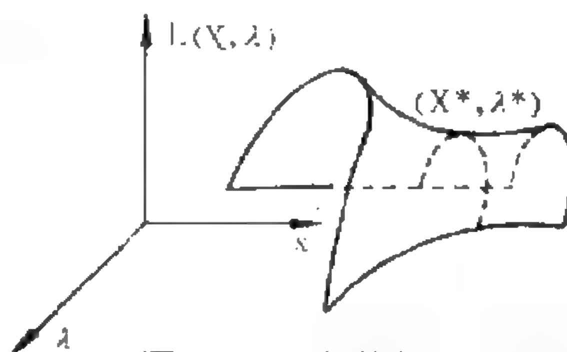


图 4—17 拉格朗日函数的鞍点

$$\left.\begin{array}{ll}1. & \text{对所有 } X,\ L(X^*, \lambda^*)=\min L(X, \lambda^*) \\ 2. & g_i(X^*)\leqslant 0,\ i=1, 2, \cdots, m, \\ 3. & \lambda_i^* g_i(X^*)=0,\ i=1, 2, \cdots, m\end{array}\right\} \qquad (4—28)$$

即上述条件是 $L(X, \lambda)$ 鞍点的充分必要条件。

[证明] 先证必要性：

若 $\lambda^* \geqslant 0$，(X^*, λ^*) 是 $L(X, \lambda)$的鞍点⇒条件 1、2、3 成立。

①由不等式（鞍点定义），$L(X^*, \lambda^*) \leqslant L(X, \lambda^*)$，即得条件 1，

$$X \in S, \ L(X^*, \lambda^*) = \min L(X, \lambda^*)$$

② $$f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*) \leqslant f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*)$$

即
$$L(X^*, \lambda) \leqslant L(X^*, \lambda^*)$$

或
$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_i^*) g_i(X^*) \leqslant 0, \quad \lambda_i \geqslant 0$$

若 $g_i(X^*)$ 为正，选任意大的 λ_i，结果与上式矛盾，故条件 2 成立，$g_i(X^*) \leqslant 0$，$i = 1, 2, \cdots, m$

③上述不等式在 $\lambda_i = 0$ 时也成立，所以

$$-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*) \leqslant 0 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*) \geqslant 0 \qquad (a)$$

又由给定条件

$$\lambda_i^* \geqslant 0, \ g_i(X^*) \leqslant 0$$

则要求

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*) \leqslant 0 \qquad (b)$$

(a)、(b)两式均需满足，只有 $\lambda_i^* g_i(X^*) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$。即条件 3 成立。

再证充分性：

即条件 1、2、3 成立⇒(X^*, λ^*) 为$L(X, \lambda)$ 的鞍点，
由条件1，$L(X^*, \lambda^*) \leqslant L(X, \lambda^*), X \in S$，即证明了一半。

已知 $$L(X^*, \lambda) = f(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X^*)$$

由条件 2 $g_i(X^*) \leqslant 0$ 及 $\lambda_i \geqslant 0$，

$$\therefore \quad \lambda_i g_i(X^*) \leqslant 0$$

即

$$L(X^*, \lambda) \leqslant f(X^*)$$

由条件 3

$$\lambda_i^* g_i(X^*) = 0, \quad L(X^*, \lambda^*) = f(X^*)$$

$$\therefore \quad L(X^*, \lambda) \leqslant L(X^*, \lambda^*)$$

[证毕]

对比（4—27）式表示的非线性规划问题的库恩—图克条件及拉格朗日函数鞍点条件可以看出两者的关系。

库恩—图克条件	拉格朗日函数鞍点条件
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(X^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(X^*) = 0$	$\nabla_X L(X, \lambda) = 0$，即鞍点条件 1
$g_i(X^*) \leqslant 0 \quad \lambda_i^* \geqslant 0$	即鞍点条件 2
$\lambda_i^* g_i(X^*) = 0$	即鞍点条件 3

因此库恩—图克条件也称为鞍点条件。

∴ 拉格朗日函数 $L(X, \lambda)$ 的鞍点与约束条件下 $g_i(X) \leqslant 0$，$f(X)$ 的极值点是一致的，故得定理 2。

定理 2。

若（X^*，λ^*）是（4—27）式所示最优化问题拉格朗日函数的鞍点，则 X^* 是该问题的最优解。

这个定理，将拉格朗日函数的鞍点与非线性规划问题联系起来。

[证明]：

只需证明（X^*，λ^*）是鞍点时，$f(X^*)\leqslant f(X)$，$X\in S$，$g_i(X)\leqslant 0$。

由鞍点定义

$$f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(X^*)\leqslant f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(X)$$

由鞍点条件 3

$$\lambda_i^* g_i(X^*)=0$$

$$\therefore \quad f(X^*)\leqslant f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(X)$$

$$\because \quad \lambda_i^*\geqslant 0,\ g_i(X)\leqslant 0$$

故在这条件下

$$f(X^*)\leqslant f(X)$$

[证毕]

如果 $g_i(X)$ 为凸函数，并且至少有一组 X 满足严格不等式 $g_i(X)<0$，$i=1, 2, \cdots, m$，则定理 2 所给出的鞍点条件是必要充分条件。

上述两定理的主要特点是，当函数既不是可导的，又不是凸的情况下，提出了解最优化问题的充分条件。

三、鞍点与极大极小定理

鞍点与对策论紧密相关，例如两个局中人（竞赛的双方）甲和乙对策（下棋，比赛或其他竞争），支付函数为 $\phi(x, y)$，甲关于 x 求 ϕ 的极小，即甲希望支付最小，乙关于 y 求 ϕ 极大，即乙希望甲支付最大，称为 ϕ 的极小极大值问题或 ϕ 的极大极小值问题。

[例]　一个实矩阵 $A=[a_{ij}]$可以看作是由

$$\phi(i, j)=a_{ij}$$

给定的变量 i，j 的实函数矩阵。

若　$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，则

$$\max_j \min_i a_{ij}=\max\left(\min_i a_{i1}, \min_i a_{i2}\right)$$

$$=\max(-1, -1)=-1$$

$$\min_i \max_j a_{ij}=\min\left(\max_j a_{1j}, \max_j a_{2j}\right)$$

$$=\min(1, 1)=1$$

$\therefore$　$\max_i \min_i \phi(i, j)<\min_i \max_j \phi(i, j)$

若　$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，则

$$\max_j \min_i a_{ij}=\max_j(-1, 2)=2$$

$$\min_i \max_j a_{ij}=\min_i(2, 3)=2$$

$\therefore$　$\max_i \min_i \phi(i, j)=\min_i \max_j \phi(i, j)$

定理1。

$$\max_{\lambda\geq 0}\min_{X} L(X,\lambda)\leqslant\min_{X}\max_{\lambda\geq 0} L(X,\lambda) \tag{4—29}$$

定理2。

$$\max_{\lambda\geq 0}\min_{X} L(X,\lambda)=\min_{X}\max_{\lambda\geq 0} L(X,\lambda)$$

$$=L(X^*,\lambda^*) \tag{4—30}$$

的充分必要条件为 (X^*,λ^*) 是 $L(X,\lambda)$ 的鞍点。

[证明] 先证充分性，$L(X,\lambda)$ 鞍点为 $(X^*,\lambda^*)\Rightarrow$

$$\max\min L=\min\max L$$

设 (X^*,λ^*) 是 $L(X,\lambda)$ 的鞍点，则

$$\max_{\lambda} L(X^*,\lambda)\leqslant L(X^*,\lambda^*)\leqslant\min_{X\in S} L(X,\lambda^*)$$

$$\min_{X\in S}\max_{\lambda\geq 0} L(X,\lambda)\leqslant\max_{\lambda\geq 0} L(X^*,\lambda)$$

$$\min_{X\in S} L(X,\lambda^*)\leqslant\max\min L(X,\lambda)$$

$$\therefore\ \min_{X\in S}\max_{\lambda\geq 0} L(X,\lambda)\leqslant L(X^*,\lambda^*)\leqslant\max_{\lambda\geq 0}\min_{X\in S} L(X,\lambda)$$

由 $\max\min L(X,\lambda)\leqslant\min\max L(X,\lambda)$，因而

$$\max\min L(X,\lambda)=L(X^*,\lambda^*)=\min\max L(X,\lambda)$$

再证必要性：$\max\min L=\min\max L\Rightarrow L(X,\lambda)$ 的鞍点为 (X^*,λ^*)

设

$$\max\min L=L(X^*,\lambda^*)=\min\max L$$

而

$$\max L(X^*,\lambda)=\min\max L(X,\lambda)$$

$$\min L(X, \lambda^*) = \max \min L(X, \lambda)$$

$$L(X^*, \lambda) \leqslant \max L(X^*, \lambda) = L(X^*, \lambda^*)$$

$$= \min L(X, \lambda^*) \leqslant L(X, \lambda^*)$$

故 $L(X, \lambda)$ 有鞍点 (X^*, λ^*)

[证毕]

§ 4-6 非线性规划的对偶问题

设原问题为：$\min f(X)$

约束 $g_i(X) \leqslant 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$

构造拉格朗日函数：

$$L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X)$$

$\min\limits_{X} L(X, \lambda)$ 是 λ 的函数

定义 $h(\lambda) = \min\limits_{X} L(X, \lambda)$，$h(\lambda)$ 称为非线性规划的**对偶函数**.

式中 λ 取作固定参数，改变 X，求 $L(X, \lambda)$ 的极小值。λ 的范围为 $\lambda \in D$。

$$D = \{\lambda \mid h(\lambda) \text{ 存在}, \lambda \geqslant 0\}$$

由 $h(\lambda)$ 可以求出最优值 λ^*。

定理 3

对所有满足约束 $g_i(X) \leqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 的 X 以及所有 D 集内的 λ，均有

$$h(\lambda)\leqslant f(X)$$

即对偶函数 $h(\lambda)$ 是 $f(X)$ 下界。

[证明]

由定义

$$h(\lambda)=\min_{X} L(X,\ \lambda)\leqslant L(X,\ \lambda)$$

或 $$h(\lambda)\leqslant f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)$$

由假设 X 满足 $g_i(X)\leqslant 0$, $(i=1,2,\cdots,m)$, 并且 $\lambda\geqslant 0$,

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)\leqslant 0$$

因而对于 $\lambda\in D$, $X\in\{X\,|g_i(X)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\cdots,m\}$,

$$h(\lambda)\leqslant f(X)$$

$h(\lambda)$ 为 $f(X)$ 的下界，最大的下界发生在 $h(\lambda)(\lambda\in D)$ 的极大值处，故可定义非线性规划 $\min\ f(X)$, $g_i(X)\leqslant 0$ 的对偶问题为

$$\max_{\lambda\in D}\ h(\lambda)$$

[证毕]

定理 4。对偶定理

$(X^*,\ \lambda^*)$ 是 $L(X,\ \lambda)$ 的鞍点，当且仅当

1. X^* 是原问题的解,
2. λ^* 是对偶问题的解,
3. $f(X^*)=h(\lambda^*)$

原问题 $\min_{X} f(X)$　　　对偶问题 $\max_{\lambda\in D}\ h(\lambda)$

约束: $g_i(X)\leqslant 0$　　　$D=\{\lambda\,|h(\lambda)$ 存在, $\lambda\geqslant 0\}$

$X=\{X \mid g_i(X)\leqslant 0\}$

$f(X)$、$g_i(X)$ 为实函数

拉格朗日函数

$$L(X,\ \lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)$$

对偶函数　$h(\lambda)=\min\limits_{X} L(X,\ \lambda)$，$h(\lambda)$存在，$\lambda\geqslant 0$。

[证明]

先证必要条件：$(X^*,\ \lambda^*)$ 为 $L(X,\ \lambda)$ 的鞍点⇒条件①②③成立

1．由鞍点定理2（见 §4—5），X^* 是 $f(X)$ 的最优解，∴条件①成立。

2．由定义 $h(\lambda)=\min\limits_{X\in S} L(X,\ \lambda)$

$$h(\lambda^*)=f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(X^*)$$

由鞍点定理1条件3(见4—28式)，$\lambda_i^* g_i(X^*)=0$，∴$h(\lambda^*)=f(X^*)$，即对偶定理条件③成立．$\max\ h(\lambda)=h(\lambda^*)=L(X^*,\ \lambda^*)=f(X^*)$。

3．由定理3 $h(\lambda)\leqslant f(X^*)=h(\lambda^*)$，$\lambda\in D$。$\lambda^*$ 是 $h(\lambda)$ 的极大值，∴条件②成立。

再证充分条件：①②③成立⇒$L(X,\ \lambda)$的鞍点为 $(X^*,\ \lambda^*)$ 或鞍点定理1三条件成立。见（4—28）式。

1．因为 X^* 是 $f(X)$ 的最优解，

$g_i(X^*)\leqslant 0$，　$\lambda_i^* g_i(X^*)=0$，即鞍点定理1条件②③成立。

因为 $f(X^*)=h(\lambda^*)=\min\limits_{X\in S} L(X,\ \lambda^*)=f(X^*)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* g_i(X^*)$故必有 $\lambda_i^* g_i(X^*)=0$

2．λ^* 是 $h(\lambda)$的最优解，$\lambda_i^*\geqslant 0$，

现要证明 $L(X^*, \lambda^*)=\min L(X, \lambda^*)$

假设 (X^*, λ^*) 不是最优点，则一定有 X° 存在，使

$$L(X^\circ, \lambda^*)<L(X^*, \lambda^*) 。$$

由定义

$$h(\lambda^*)=L(X^\circ,\lambda^*)=f(X^\circ)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^\circ)<$$

$$f(X^*)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*)$$

但已假设 $h(\lambda^*)=f(X^*)$,

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*)\geqslant 0$$

这是矛盾的，因前已证明 X^* 是原问题的解，故必有

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(X^*)=0$$

$\therefore \quad X^\circ=X^*$，$L(X^*, \lambda^*)=\min L(X, \lambda^*)$，即条件①成立。充分性得证。

对偶问题也称为 min—max 对偶。

因为 $\max\limits_{\lambda\geqslant 0} h(\lambda)=\max\limits_{\lambda\geqslant 0}\left\{\min\limits_{X\in S} L(X, \lambda)\right\}$

$$=\min_{X\in S}\left\{\max_{\lambda\geqslant 0} L(X, \lambda)\right\}$$

[例] 问题 min $(-x^2-x^3)$

约束 $x^2\leqslant 1$

解 已知约束 $x^*\in[-1, 1]$，由图解 $x^*=1$。

$$L(X, \lambda)=-x^2-x^3+\lambda(x^2-1)$$

由库恩—图克条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2x - 3x^2 + \lambda(2x) = 0 \\ x^2 \leqslant 1 \\ \lambda \geqslant 0 \\ \lambda(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

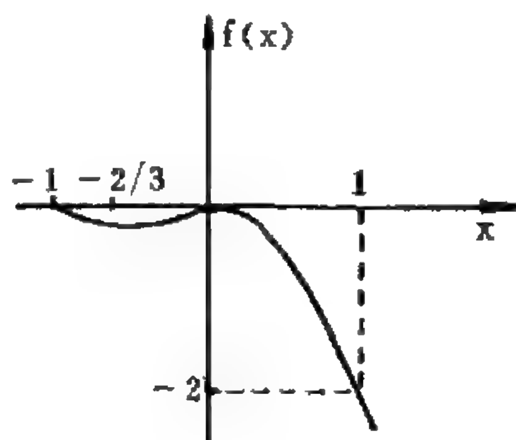


图 4—18 $f(x) = -x^2 - x^3$

a． 设 $\lambda = 0$,

$x(-2-3x) = 0$

$$\therefore \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

b． $\lambda \neq 0$, $x = 1$, 则 $\lambda = \dfrac{5}{2}$

$x = -1$，则 $\lambda = -\dfrac{1}{2}$，不满足 $\lambda \geqslant 0$ 的条件。

故得三个解：

$x = -\dfrac{2}{3}$, $\lambda = 0$, $L(X, \lambda) = -4/27$

$x = 0$, $\lambda = 0$, $L(X, \lambda) = 0$

$x = 1$, $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $L(X, \lambda) = -2$ 为最优点

由 $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$，可知当 $x \neq 0$ 时，$2\lambda = 2 + 3x$，驻点 $x = \dfrac{2}{3}(\lambda - 1)$ 代入 $L(X, \lambda)$，可得

$$h(\lambda) = -\frac{4}{9}(\lambda-1)^2 - \frac{8}{27}(\lambda-1)^3 + \lambda\left[\frac{4}{9}(\lambda-1)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{4}{9}(\lambda-1)^3 - \frac{8}{27}(\lambda-1)^3 - \lambda$$

$$= \frac{4}{27}(\lambda-1)^3 - \lambda$$

即 $h(\lambda) = \min\limits_{x} L(X, \lambda)$。

故得对偶问题为：

$$\max_{\lambda \geq 0} h(\lambda) = -\frac{4}{27}(\lambda - 1)^3 - \lambda$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = \frac{4}{9}(\lambda - 1)^2 - 1 = \frac{4}{9}\lambda^2 - \frac{8}{9}\lambda - \frac{5}{9} = 0$$

$$4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 0$$

$$(2\lambda - 5)(2\lambda + 1) = 0 \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \ \text{（舍去）} \\ \lambda = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \lambda^* = \frac{5}{2}, \ h\left(\frac{5}{2}\right) = -2 = f(1)$$

$$h(\lambda^*) = f(X^*)$$

$$\max_{\lambda} \min_{X} L(X, \ \lambda) = \min_{X} \max_{\lambda} L(X, \ \lambda)$$

§ 4-7 二 次 规 划

一、二次规划的数学模型

二次规划的数学模型可表示如下：

$$\min f(X) = C^T X + \frac{1}{2} X^T Q X \qquad (4—31)$$

$$AX \leqslant B$$

$$X \geqslant 0$$

由（4—31）式可见，它是最接近于线性规划的一种非线性规划。因此，二次规划可以说是从线性规划到非线性规划的一种过渡，线性规划的单纯形算法经过修改以后，也可用于二次规划。

由第三章可知，线性规划问题的最优解 X^* 在可行域的顶点

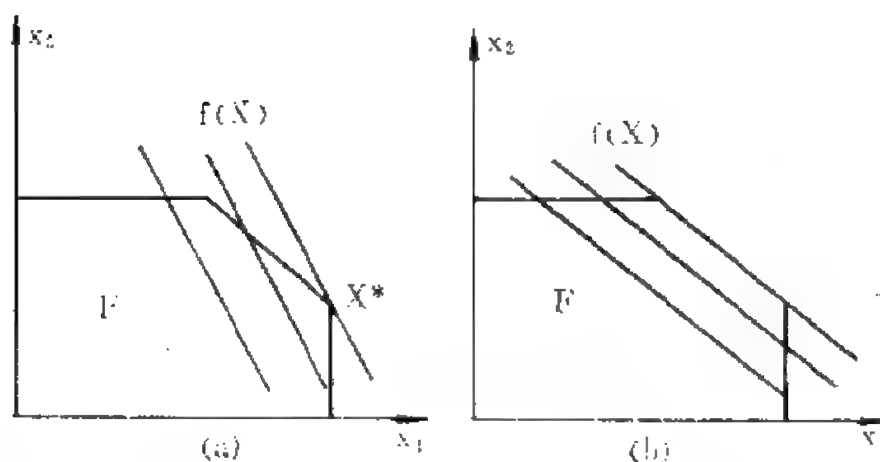


图 4—19 线性规划图解

上（如图 4—19*a*）或者是顶点的凸组合（图 4—19*b*）。

二次规划的最优解不一定位于可行域顶点上，要根据具体情况进行分析。

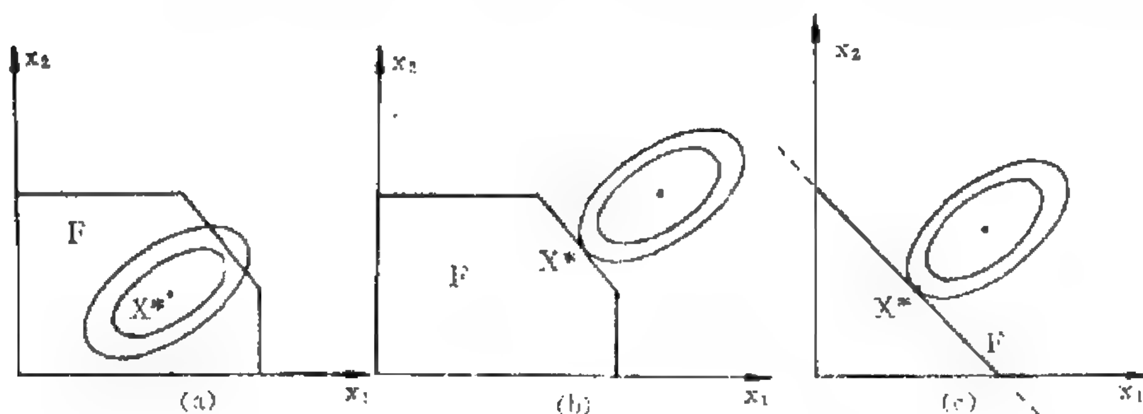


图 4—20 二次规划图解

如图 4—20*a*，二次目标函数的无约束极小值点在可行域 F 内，因此（4—31）式所表示的二次规划最优解在可行域内部，就是无约束最优点。

图 4—20*b*中，二次目标函数的无约束极小值点在可行域以外，

这时二次规划问题的最优解在可行域F的边界上。对于等式约束，则二次规划最优解恰好是等式约束直线（或平面）与目标函数的切点（如图 4—20c）。

我们以最小输电费用为例，说明二次规划数学模型的建立。设输电网络如图 4—21 所示。

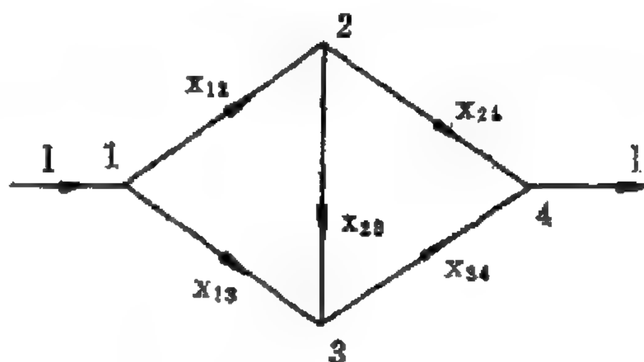


图 4—21 输电网络

输送电流总量为 I，各支路电流为 x_{ij}，i、j 为节点标号。设每个支路允许电流为 R_{ij}，则显应满足约束：

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant R_{ij} \qquad (4\text{—}32)$$

此外还应满足电路第一定律 KCL：

$$\left.\begin{aligned} I &= x_{12} + x_{13} \\ x_{12} &= x_{23} + x_{24} \\ x_{34} &= x_{13} + x_{23} \\ I &= x_{24} + x_{34} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{—}33)$$

假设输电费用为 x_{ij} 的二次函数，则应有：

$$\min \quad f(X) = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} q_{ij} x^2_{ij} + \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \qquad (4\text{—}34)$$

显见（4—32），（4—33），（4—34）是在一组等式约束和一组不等式约束下求二次目标函数的极小值，是二次规划问题。

二次目标函数在无约束时的最优解可如下求得：

$$\min \quad f(X) = C^T X + \frac{1}{2} X^T Q X$$

$$C^T = [c_1, \ c_2, \ \cdots, \ c_n]$$

$Q=[q_{ij}]_{n\times n}$ 为对称阵， Q 为正定时， $f(X)$ 有极小值。

$$\nabla f(X)=QX+C=0$$

$$X^*=-Q^{-1}C$$

二、二次规划的库恩—图克条件

§4—3 中已将一般非线性规划问题的库恩—图克定理作了论述。定理假设，约束和目标函数都是凸函数。二次规划的数学模型符合这一假设。我们可将库恩—图克条件应用于二次规划。

(1) $\min f(X)=C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$ $\quad Q$ 为严格正定，

可行解集合为

$$F=\{X\mid X\in E^n,\ AX=B,\ X\geqslant 0\} \tag{4—35}$$

$$L(X,\ \lambda,\ \mu)=f(X)+\lambda^T(AX-B)-\mu^TX$$

则由库恩—图克条件可得

$$\left.\begin{aligned}&C+QX^*+A^T\lambda^*-\mu^*=0\\&AX^*=B\\&\mu^{*T}X^*=0\\&X^*\geqslant 0,\ \mu^*\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{4—36}$$

因为是等式约束，所以没有 $\lambda^*\geqslant 0$ 这一项要求。

(2) 目标函数同 (1)。

若可行解域为

$$F=\{X\mid X\in E^n,\ AX\leqslant B\} \tag{4—37}$$

则引入松弛变量 V，令

$$AX+V=B \tag{4—38}$$

$$L(X,\ \lambda,\ V)=f(X)+\lambda^T(AX+V-B)$$

这时库恩—图克条件为

$$
\left.\begin{array}{l}
C+QX^{*}+A^{T}\lambda^{*}=0 \\
AX^{*}+V^{*}=B \\
\lambda^{*T}V^{*}=0^{[注]} \\
\lambda^{*}\geqslant 0,\ V^{*}\geqslant 0
\end{array}\right\} \tag{4—39}
$$

(3) 若目标函数同 (1), 可行解域为

$$
F=\{X\,|X\in E^{n},\ AX\leqslant B,\ X\geqslant 0\} \tag{4—40}
$$

则不等式约束可变为:

$$
AX-B+V=0
$$

$$
-X\leqslant 0
$$

$$
L(X,\ \lambda,\ V)=f(X)+\lambda^{T}(AX-B+V)-\mu^{T}X
$$

得库恩—图克条件为

$$
\left.\begin{array}{l}
C+QX^{*}+A^{T}\lambda^{*}-\mu^{*}=0 \\
AX^{*}+V^{*}-B=0 \\
\lambda^{*T}V^{*}=0 \\
(\mu^{*})^{T}X^{*}=0 \\
\lambda^{*}\geqslant 0,\ \mu^{*}\geqslant 0,\ X^{*}\geqslant 0, V^{*}\geqslant 0
\end{array}\right\} \tag{4—41}
$$

三、二次规划的等效形式

[注]: $\because\ \lambda^{*}\geqslant 0,\ AX^{*}+V^{*}-B=0$

$\therefore\ \lambda^{*T}(AX^{*}+V^{*}-B)=0$

由库恩—图克条件: $\lambda^{*T}(AX^{*}-B)=0$

故得 $(\lambda^{*})^{T}V^{*}=0$

有时为了计算方便，常将二次规划改变一下形式，使所得最优结果与原规划问题等效。

设二次规划的数学模型为

$$\left.\begin{aligned}&\min \quad f(X)=C^TX+\frac{1}{2}X^TQX，Q \text{ 为正定}\\&F=\{X\,|\,X\in E^n,\ \ AX\leqslant B\}\end{aligned}\right\}\tag{4—42}$$

则由（4—39）式可得

$$X^*=-Q^{-1}(A^T\lambda^*+C),$$

$$-AQ^{-1}(A^T\lambda^*+C)+V^*=B$$

令 $D=AQ^{-1}A^T$，$E=B+AQ^{-1}C$，则上式变为

$$\text{而}\qquad\left.\begin{aligned}&D\lambda^*-V^*=-E\\&(\lambda^*)^TV^*=0\\&\lambda^*\geqslant 0,\ \ V^*\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{4—43}$$

（4—43）式恰为下述二次规划的库恩—图克条件[注]：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\lambda\geqslant 0}\ \{E^T\lambda+\frac{1}{2}\lambda^TD\lambda\}\\&\lambda\geqslant 0\end{aligned}\right\}\tag{4—44}$$

（4—44）式所表示的二次规划即为（4—42）式的等效规划，它比原问题容易求解，因为只有一个约束式 $\lambda\geqslant 0$。若 λ^* 为（4—44）式的最优解，则原问题的最优解可求得为

$$X^*=-Q^{-1}(A^T\lambda^*+C)。$$

四、二次规划问题计算举例

［例 1］ $\min \quad f(X)=\frac{1}{2}[(x_1-2)^2+(x_2-2)^2]$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \qquad \text{即} \quad x_1 \leqslant 1 \qquad -x_1 \leqslant 0$$

$$0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \qquad\qquad x_2 \leqslant 1 \qquad -x_2 \leqslant 0$$

这四组条件可统一写为

$$AX \leqslant B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\min \quad f(X) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1 + x_2) + 4$$

$$= \frac{1}{2}X^T Q X + C^T X + K$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^T = [-2, \ -2] \quad K = 4$$

写成等效规划形式：

$$\min_{\lambda} \quad \varphi(\lambda) = E^T \lambda + \frac{1}{2}\lambda^T D \lambda$$

$$D = AQ^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = B + AQ^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = [-1 \ -1 \ 2 \ 2]^T$$

[注] (4—42) 式中只要将 C 换成 E，Q 换成 D，X 换成 λ，即得 (4—44) 式

求 $\min \quad \varphi(\lambda)=[-1, \ -1, \ 2, \ 2]\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}$

$$+\frac{1}{2}[\lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3, \ \lambda_4]\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_1}=0, \quad -1+\lambda_1-\lambda_3=0 \qquad ①$$

$$\frac{\partial\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_2}=0, \quad -1+\lambda_2-\lambda_4=0 \qquad ②$$

$$\frac{\partial\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_3}=0, \quad 2-\lambda_1+\lambda_3=0 \qquad ③$$

$$\frac{\partial\varphi(\lambda)}{\partial\lambda_4}=0, \quad 2-\lambda_2+\lambda_4=0 \qquad ④$$

初选 $\lambda^0=[0, \ 0, \ 0, \ 0]^T$，不满足上述条件，求 λ^1。

由① 令 $\lambda_3=0$，得 $\lambda_1=1$，

由② 令 $\lambda_4=0$，得 $\lambda_2=1$，

由③ 令 $\lambda_1=0$，得 $\lambda_3=-2$，

不满足库恩—图克条件，仍取 $\lambda_3=0$，

由④ 令 $\lambda_2=0$，得 $\lambda_4=-2$，同上，仍取 $\lambda_4=0$，得

$\lambda^1=(1, \ 1, \ 0, \ 0)^T$

再做一次，得结果与 λ^1 一样，即 $\lambda^2=(1, \ 1, \ 0, \ 0)^T$

如果 $\lambda^1=\lambda^2$，则认为已稳定。

得 $\lambda^*=(1, \ 1, \ 0, \ 0)^T$

代入 $C+QX+A^T\lambda=0$

$$X^*=-Q^{-1}[A^T\lambda^*+C]$$

$$=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

$$=-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}\right\}=[1,\ 1]^T$$

图 4—22 表示例 1 的图解。

[例 2] min $\quad f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+C^TX$

$$Q=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix},\ C=[-1,\ 0]^T$$

$$3x_1+2x_2\leqslant 6$$

$$-x_1\leqslant 0$$

$$-x_2\leqslant 0$$

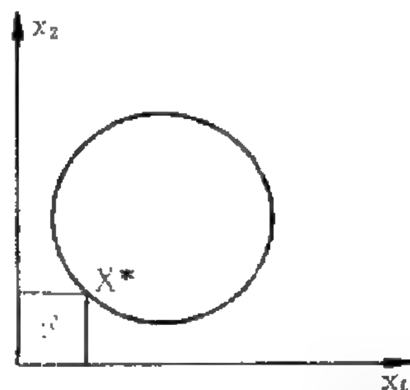


图 4—22 例 1 的图解

或写成
$$\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$D=AQ^{-1}A^T=\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1&0\\2&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29&-5&-7\\-5&1&1\\-7&1&2\end{bmatrix}$$

$$E=B+AQ^{-1}C=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\varphi(\lambda)=[1,1,1]\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}+\frac{1}{2}[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]\begin{bmatrix}29&-5&-7\\-5&1&1\\-7&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \frac{1}{2}[(29\lambda_1 - 5\lambda_2 - 7\lambda_3)\lambda_1 + (-5\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_2 + (-7\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)\lambda_3]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1} = 1 + 29\lambda_1 - 5\lambda_2 - 7\lambda_3 = 0$$

取初始解 $\lambda^\circ = [0,\ 0,\ 0]^T$，上式中令 $\lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = 0$，则 $\lambda_1 = -\frac{1}{29}$（不满足条件），取 $\lambda_1{}^1 = 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2} = 1 + \lambda_2 - 5\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

令 $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$，得 $\lambda_2 = -1$，（不满足条件），取 $\lambda_2{}^1 = 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3} = 1 + 2\lambda_3 - 7\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

令 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$，得 $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$（不满足条件），取 $\lambda_3{}^1 = 0$

$\lambda^1 = [0,\ 0,\ 0]^T$，与 λ° 相同，即为 λ^*。

$$X^* = -Q^{-1}[A^T\lambda^* + C]$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

实际上最优解在可行域内，所以上述解即为全局无约束最优解，由梯度 $\nabla f(X) = QX + C = 0$，可得

$$X^* = -Q^{-1}C = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$= [1,\ 1]^T$。图 4—23 为例 2 的图解。

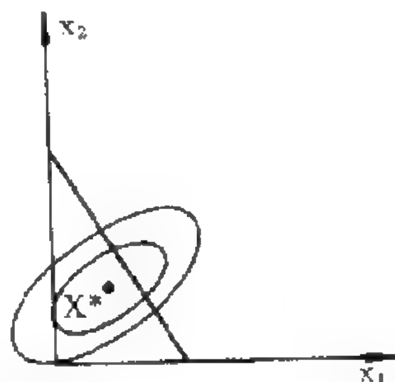


图 4—23　例 2 的图解

§ 4-8 一般凸规划的对偶定理

定理。

设 $f(X)$ 及 $g_i(X)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 为凸函数且可导，则原问题和对偶问题可表述如下：

原问题：

$$\min \quad f(X) \tag{4—45}$$

$$g_i(X) \leqslant 0 \quad i=1,2, \cdots, m$$

对偶问题：

$$\max \quad f(X)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X) \tag{4—46}$$

$$\nabla_X f(X)+\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla_X g_i(X)=0$$

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad i=1, 2, \cdots, m$$

类型	原问题	对偶问题
线性规划	$\min \quad C^T X$ $AX \leqslant B$ $X \geqslant 0$	$\max \quad (-B^T \lambda)$ $A^T \lambda + C \geqslant 0$ $\lambda \geqslant 0$
二次规划	$\min \ C^T X + \frac{1}{2} X^T Q X$ $AX \leqslant B$	$\max(-\frac{1}{2} X^T Q X - B^T \lambda)$ $A^T \lambda + C + QX = 0$ $\lambda \geqslant 0$
非线性规划	$\min \quad f(X)$ $AX \leqslant B$	$\max f(X) + \lambda^T AX - B^T \lambda$ $\nabla f(X) + A^T \lambda = 0$ $\lambda \geqslant 0$

对于约束式为线性的三种目标函数，数学规划模型的对偶关系可用上页的表表示。其证明见附注。

［注 1］ 对于线性规划由公式（4—46）可写出对偶问题为:

$$\max \quad C^T X + \lambda^T (AX - B)$$

$$约束\ C + A^T \lambda = 0$$

$$\lambda \geqslant 0$$

因此目标函数变为

$$\max \quad (-\lambda^T B) = \max \quad (-B^T \lambda)$$

考虑线性规划有 $X \geqslant 0$ 的条件，因此由公式（4—25），应将约束改为不等式 $C + A^T \lambda \geqslant 0$。

λ 是 m 维的，令 $\lambda = Y$，对偶线性规划问题就和第三章中（3—22）式一样，(3—22)式目标函数取极小值：$\min\ Y^T B$，现改为极大则为 $\max\ (-Y^T B)$，即$\max\ (-\lambda^T B)$。注意（3—22）式中线性规划原问题为 $\max\ C^T X = \min\ (-C)^T X$，系数 C 有负号。

［注 2］ 对于二次规划由公式（4—46）可写出对偶问题为:

$$\max \quad C^T X + \frac{1}{2} X^T Q X + \lambda^T (AX - B)$$

$$约束：A^T \lambda + C + QX = 0$$

$$\lambda \geqslant 0$$

将约束改写为 $A^T \lambda = (\lambda^T A)^T = (-C - QX)$

代入目标函数，得:

$$C^T X + \frac{1}{2} X^T Q X + (-C - QX)^T X - \lambda^T B$$

$$= -\frac{1}{2} X^T Q X - B^T \lambda$$

即目标函数为：

$$\max \quad (-B^T\lambda-\frac{1}{2}X^TQX)$$

［注 3］ 对于非线性规划由公式（4—46）可写出对偶问题：

$$\max \quad f(X)+\lambda^TAX-B^T\lambda^*$$

$$\nabla f(X)+A^T\lambda=0$$

$$\lambda\geqslant 0$$

令 $$f(X)+\lambda^TAX-B^T\lambda=L(X, \lambda).$$

则 $$\nabla f(X)+A^T\lambda=0$$

即为 $L(X, \lambda)$ 取极小值的必要条件；于是令

$$h(\lambda)=\min_{\lambda\geqslant 0} \quad L(X, \lambda)$$

对偶规划即为求 $\max\limits_{\lambda\geqslant 0} \quad h(\lambda)$，与 § 4—6 结果相同。

习 题

1. $\min \quad f(X)=x_1$

   $g(X)=16-(x_1-4)^2-x_2^2\geqslant 0$

   $h(X)=(x_1-3)^2+(x_2-2)^2-13=0$

   作图画出可行域，求出可能的最优解。
   代入库恩—图克条件验算，并求库恩—图克乘子。

2. 确定下述问题的库恩—图克条件

   $\max\limits_{X} \quad f(X)$

   $g_i(X)\geqslant 0, \ i=1, \ 2, \ \cdots, \ m$

3. 用库恩—图克条件解下述非线性规划问题。

$\max \quad x$

$(x^2-4)^2-25\leqslant 0$

4. 用非线性规划对偶函数写出下述问题的对偶规划，并求鞍点

$\min \quad f(X)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2$

$x_2-x_1=1$

$x_1+x_2\leqslant 2$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

5. 用等效二次规划求下述最优化问题

$\min f(X)=\frac{1}{2}X^TQX+C^TX$

$Q=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ C=[-15,\ -7]^T$

$x_1+x_2\leqslant 3$

$2x_1-x_2\leqslant 4$

$x_2\leqslant 2$

$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$

第五章　直接搜索法求解无约束非线性函数极值问题

§ 5-1　概　　述

最优化问题的求解方法可以分为间接法和直接法两大类。

非线性最优化问题中，如果目标函数能以解析函数表示，而可行域由不等式约束确定，我们可以利用目标函数和可行域的已知性质，从理论上求出目标函数为最优值的必要条件，这就是解析法或称间接法。

但是如果目标和（或）约束不能表示成待定变量 X 的显函数，则需要用数值方法求问题的最优解，许多工程设计问题具有这一特点。

数值法的基本思想是经过一系列的迭代，产生点的序列 $\{X^k\}$，以下简称点列，使之逐步接近最优点。

迭代步骤如下：

(1) 从初始试验点 X^0 开始。

(2) 寻找一个合适的方向 P^k，$k=0, 1, 2, \cdots$，P^k 为第 $k+1$ 步的搜索方向。

(3) 沿 P^k 方向前进一步的步长设为 λ^k，求合适的步长 λ^k。

(4) 得到新的点为 X^{k+1}，它应当比原来的点 X^k 更接近最优点，$X^{k+1}=X^k+\lambda^k P^k$。

(5) 检验 X^{k+1} 是否最优，若是最优，则迭代停止。否则令

$k=k+1$，重复（2）以后各步。

由上述可知，用数值方法求解最优化问题的计算效率取决于确定搜索方向 P^k 和步长 λ^k 的效率。

以上迭代步骤既适用于无约束的最优化问题，也适用于有约束的优化问题。求解有约束的最优化问题常常可以用某些方法将它化为无约束的极值问题。在本章及下章内我们介绍无约束极值问题求解方法，有约束的最优化问题将在第七章内介绍。

我们将先介绍一维搜索方法，即求最优步长 λ^k 的方法，然后再介绍多维搜索，即确定搜索方向 P^k 的方法。

无约束极值问题的数值解法可以分成两大类，即：1. 不求导数的算法。不必计算目标函数的导数，只靠计算函数值来搜索，这种方法发展最早，其中有的算法收敛较慢，尚待改进。一般称为直接搜索法。2. 以求目标函数的导数为基础的算法（其中包括梯度法和一些改进的算法），在近 20 年间发展较快，较为有效。

我们先介绍无约束非线性函数极值问题的数值计算求解方法，本章讨论直接搜索法，下一章讨论梯度法以及其它改进的算法。

直接搜索法可以分为函数逼近法，区间消去法和爬山法三种。

1. 函数逼近法。

又称插值法或曲线拟合法。这种方法是在若干点上估计出目标函数值，给出目标函数的近似曲线，再用区间消去法寻优。这种方法对一维（单变量）函数较为有效。

2. 区间消去法

这是单变量函数无约束极值较为有效的一种直接搜索法。早在 1953 年就有基弗（Kiefer）等人进行研究。这种方法实质上是在搜索过程中不断缩小最优点存在的区域，即通过搜索区间的逐步缩小来确定最优点。对多变量函数说，区间消去法不十分有效，因为这时消去的不是线段，而是平面、立体或多维空间的一部分。

设单峰函数 $f(x)$，其极小值点在 $[a_0, b_0]$ 闭区间内[注]，在 $[a_0, b_0]$ 内任取两点 λ_1，λ_2。这时可能出现三种情况：

1. $f(\lambda_1)<f(\lambda_2)$，如图 5—1。

最优点 x^* 总在 $[a_0, \lambda_2]$ 内，因此可将区间 $[\lambda_2, b_0]$ 消去，使搜索范围由 $[a_0, b_0]$ 缩减为 $[a_1, b_1]$，$a_1=a_0$，$b_1=\lambda_2$。

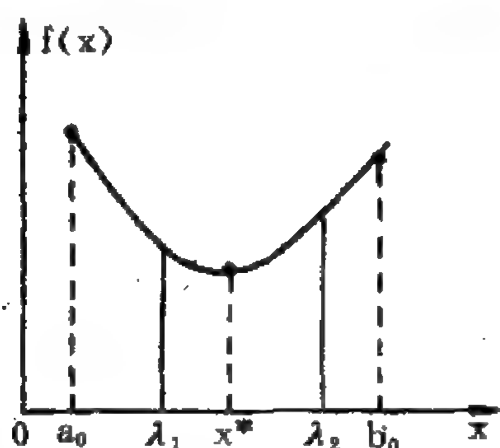


图 5—1 $f(\lambda_1)<f(\lambda_2)$

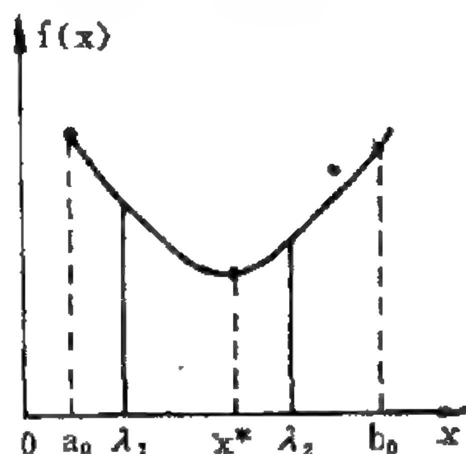


图 5—2 $f(\lambda_1)>f(\lambda_2)$

2. $f(\lambda_1)>f(\lambda_2)$，如图 5—2。

这时最优点 x^* 总在 $[\lambda_1, b_0]$ 内，因此可将区间 $[a_0, \lambda_1]$ 消去，使搜索区间由 $[a_0, b_0]$ 缩减为 $[a_1, b_1]$，$a_1=\lambda_1$，$b_1=b_0$。

3. $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$，如图 5—3

这时 x^* 在 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 内，可以将两头都去掉，取 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 为 $[a_1, b_1]$。或取 $a_1=\lambda_1$，$b_1=b_0$。

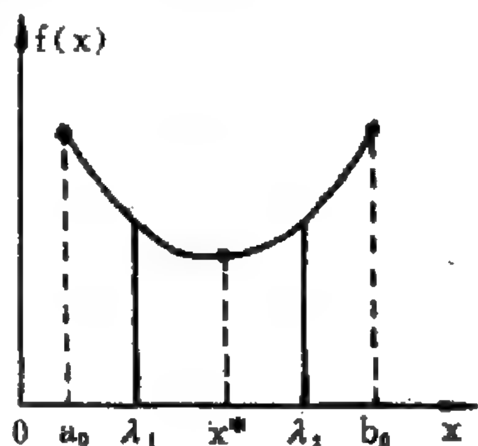


图 5—3 $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$

图 5—4 表示 $f(\lambda_2)>f(\lambda_1)$、$f(\lambda_1)>f(\lambda_2)$、$f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$ 三种情况，请读者自己划掉应消去的区间。对于前两种情况，因为在

注：$[a, b]$ 表示闭区间，$a\leqslant x\leqslant b$。(a, b) 表示开区间，$a<x<b$。半开区间 $(a, b]$ 表示 $a<x\leqslant b$，半开区间 $[a, b)$ 表示 $a\leqslant x<b$。

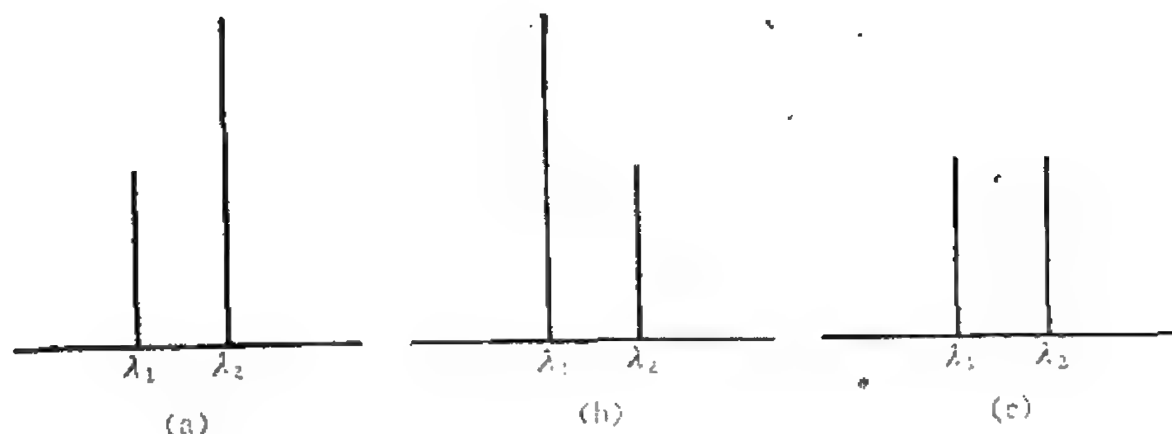


图 5—4 $f(\lambda_1)$ 与 $f(\lambda_2)$ 比较，分三种情况

$[a_1, b_1]$ 中已有一点（λ_1 或 λ_2）的函数值计算过，因此只要在 $[a_1, b_1]$ 中再任取一点，计算该点函数值，进行比较，再消去一段区间得 $[a_2, b_2]$，经过 n 次迭代，可将搜索区间减缩为 $[a_n, b_n]$，$x^* \in [a_n, b_n]$。如果 $|b_n - a_n| < \varepsilon$，$\varepsilon$ 为规定的误差，则可认为 $x^* = \frac{a_n + b_n}{2}$。

我们希望尽可能减少搜索次数，尽快收敛得到最优点，即达到一定的区间 $[a_n, b_n]$，搜索次数为最少，或一定的搜索次数，所得区间 $[a_n, b_n]$ 为最小。

3. 爬山法

这是多变量函数的直接寻优方法，代表多变量函数无约束极值求取方法的早期成就。这种方法的实质是利用已有信息，通过空间点（例如 X^k 到 X^{k+1}）的移动、比较，逐步改善目标函数，最后达到最优点。

爬山法每次迭代计算，包括两个内容，（一）计算该步的目标函数值，（二）选择下一步的搜索方向和迭代步长，为下一步爬山提供必要的信息。

但是求多变量极值问题时，也常常要用一维搜索法，例如求 $\min\limits_{X} f(X)$。从 X^0(初始点)出发，沿规定的单位搜索方向 S^0 前

进，设步长为 α_0，得到新的点为 X^1，

$$X^1 = X^0 + \alpha^0 S^0 \tag{5—1}$$

依此类推，第 $k+1$ 次迭代，从 X^k 点沿搜索方向 S^k 前进，达到 X^{k+1} 点：

$$X^{k+1} = X^k + \alpha^k S^k \tag{5—2}$$

我们要求取最优步长 α^k 使得

$$\begin{aligned} f(X^{k+1}) &= f(X^k + \alpha^k S^k) = \min_{\alpha} f(X^k + \alpha S^k) \\ &= \min_{\alpha} \varphi(\alpha) \end{aligned} \tag{5—3}$$

这也就变成了一维搜索问题。

这样每迭代一次需要用一维搜索法求最优步长 α^k，将 n 维多变量极值问题变成了若干一维搜索问题。

一维搜索较常用的方法有 Fibonacci 法、黄金分割法（或称 0.618 法），这两种方法均属于区间消去法。在求多维函数最优化问题时引伸出来的最优步长问题常常用函数逼近法，如二次插值及三次插值法等等。在 §5—2——§5—5 中将介绍一维搜索的各种方法，§5—6——§5—10 中将介绍多维搜索方法。

§ 5-2 Fibonacci 法

这种方法是按 Fibonacci 数列的规律进行区间缩减的一种搜索最优点的方法。

下述整数数列称为 Fibonacci 数列

$$\{F_k\} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

这个数列是由差分方程

$$\begin{cases} F_{k+2}=F_k+F_{k+1} & k\geqslant 0 \\ F_0=1, \quad F_1=1 \end{cases} \tag{5—4}$$

的递推关系产生的。

整数序列为 1，1，2，3，5，8，13，21，…

前后两项之比为一分数序列

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{8}{13}, \quad \frac{13}{21}, \quad \cdots$$

分数序列可表示为 $\left\{\frac{F_k}{F_{k+1}}\right\}$.

由整数序列可以看出从 $k=2$ 起，每一项都是前两项之和

即
$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}, \quad k>1. \tag{5—5}$$

或
$$\frac{F_k}{F_{k+1}}+\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}=1 \tag{5—6}$$

研究分数序列，可以发现一种很有趣的关系，如下表：

k	F_k	$\frac{F_{k-1}}{F_k}$
0	1	—
1	1	1
2	2	0.5
3	3	0.66667
4	5	0.6
5	8	0.625
6	13	0.61538
7	21	0.61905
8	34	0.61765
9	55	0.61818

10	89	0.61798
11	144	0.61806
12	233	0.618026
13	377	0.618037
14	610	0.618033
15	987	0.618034
16	1597	0.6180338
	······	······
∞		0.618034

即存在下列关系

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_k}{F_{k+1}}=\frac{F_{k-1}}{F_k}=0.618 \tag{5—7}$$

实际上由（5—5）式可知

$$\frac{F_{k+1}}{F_k}=1+\frac{F_{k-1}}{F_k}$$

令

$$\lim_{k\to\infty}\frac{F_k}{F_{k+1}}=\frac{F_{k-1}}{F_k}=\tau$$

则有

$$\frac{1}{\tau}=1+\tau \quad 或 \quad \tau^2+\tau-1=0$$

解得

$$\tau=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=0.61803398\approx0.618$$

Kiefer 首先研究用 Fibonacci 数列搜索一维函数 $f(x)$ 最优值。其方法为：在 [0, 1] 区间选择 λ_1、λ_2 两点例如令 $\lambda_1=\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$，$\lambda_2=\frac{F_k}{F_{k+1}}$，比较 $f(\lambda_1)$ 及 $f(\lambda_2)$，然后消去一段区间，缩短了搜索范围，再做第二步迭代……，如此继续迭代下去，共做 n 次迭代，使搜索区间小于给定值时，迭代结束。因为选择 λ 是一个

分数，故这种方法也称分数法。

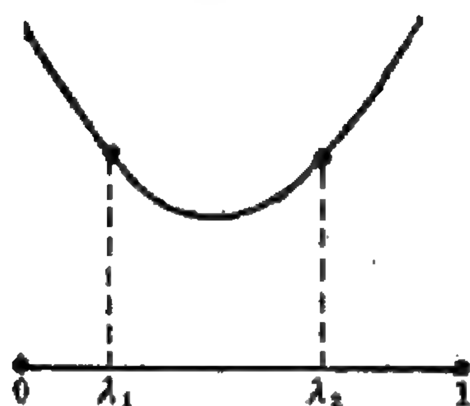
下面我们详细介绍这一方法，为了说明问题的本质，我们先设区间为 [0，1]。

第一次搜索时，在 [0，1] 区间取 $\lambda_1{}^1$、$\lambda_2{}^1$ 两点，右上角标号表示迭代次数。

取
$$\lambda_1{}^1 = \frac{F_{k-1}}{F_{k+1}} \quad \text{[注]} \tag{5—8}$$

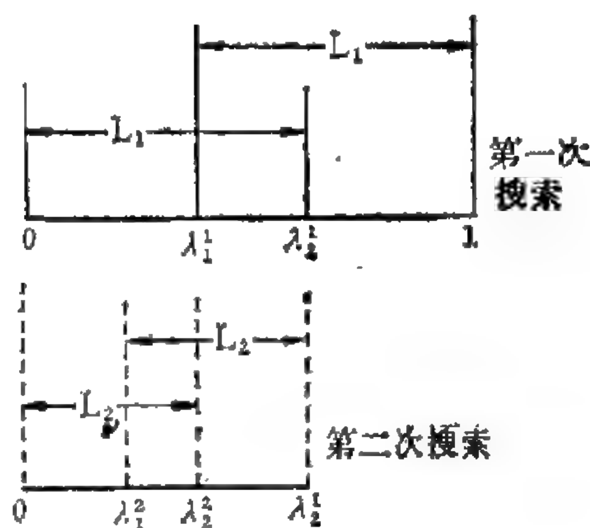
$$\lambda_2{}^1 = \frac{F_k}{F_{k+1}} \tag{5—9}$$

由（5—6）式得
$$\lambda_1{}^1 + \lambda_2{}^1 = 1 \tag{5—10}$$



[0，1] 区间选择 λ_1、λ_2 两点

图 5—5



第一次第二次搜索区间长度

图 5—6

由（5—8）式、（5—9）式得

$$\lambda_2{}^1 - \lambda_1{}^1 = \frac{F_k - F_{k-1}}{F_{k+1}} \tag{5—11}$$

注：当 $k\to\infty$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{F_{k-1}}{F_{k+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{F_{k-1}}{F_k}\dfrac{F_k}{F_{k+1}} = \tau^2 = 0.382$

按 (5—8)、(5—9) 两式选择的点，保证使区间$[0, \lambda_1^1]$长度等于区间 $[\lambda_2^1, 1]$ 的长度，即 $\lambda_1^1=1-\lambda_2^1$.

设 $f(\lambda_1^1)\leqslant f(\lambda_2^1)$，则消去 $[\lambda_2^1, 1]$ 这一段，在剩下的区间 $[0, \lambda_2^1]$ 进行第二次搜索。若 $f(\lambda_1^1)>f(\lambda_2^1)$ 则应消去 $[0,\lambda_1^1]$ 这一段，在 $[\lambda_1^1,1]$ 区间进行第二次搜索。

无论那种情况都使区间长度由 $L_0=1$ 减少为 $L_1=\frac{F_k}{F_{k+1}}$。

第二次搜索时，设在 $[0, \lambda_2^1]$ 区间，取新的两点为 λ_1^2、λ_2^2，其中令 $\lambda_2^2=\lambda_1^1=\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$，则 $[\lambda_2^2、\lambda_2^1]$ 这一段长度为

$$\lambda_2^1-\lambda_2^2=\frac{F_k}{F_{k+1}}-\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}=\frac{F_{k-2}}{F_{k+1}}$$

由于对称性，即区间 $[0,\lambda_1^2]$ 和区间 $[\lambda_2^2,\lambda_2^1]$ 的长度相等，故有

$$\lambda_1^2=\lambda_2^1-\lambda_2^2=\frac{F_{k-2}}{F_{k+1}}$$

这样，我们只要取一个点 λ_1^2，求函数值 $f(\lambda_1^2)$，因为另一点 λ_2^2 的函数值 $f(\lambda_2^2)=f(\lambda_1^1)$ 是已知的。比较 $f(\lambda_1^2)$及$f(\lambda_2^2)$，消去一段，使搜索区间长度由 $L_1=\frac{F_k}{F_{k+1}}$ 缩减为 $L_2=\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$。

随着迭代次数 k 的增加，搜索区间长度变化如下表：

迭代次数 k	0	1	2	……	$k-1$	k
搜索区间长度 L_k	1	$\frac{F_k}{F_{k+1}}$	$\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}}$	……	$\frac{2}{F_{k+1}}$	$\frac{1}{F_{k+1}}$

给定k次迭代后的搜索区间长度 δ，可计算出应有的迭代次数 k。

[例 1] 原区间长 $L_0=1$，要求k次迭代计算后使搜索区间长 $\delta=0.08$。

$$L_k=\frac{1}{F_{k+1}}\leqslant 0.08,\ F_{k+1}\geqslant\frac{1}{\delta}=12.5$$

由 Fibonacci 数列，$F_6=13$，∴ $k=5$，即要进行 5 次迭代。

[例 2] 已知 $F_{20}=10946$，求进行 19 次迭代后搜索区间长度，设原区间长度为 1。

$$\delta=\frac{1}{F_{20}}=\frac{1}{10946}=0.000091$$

如果原区间为 $[a_0, b_0]$，原区间长度 $L_0=b_0-a_0$，设 n 表示要计算的函数值个数，则 $k=n-1$ 表示迭代次数。当迭代到第 $n-1$ 次时，区间长度缩减为 $L_{n-1}=b_{n-1}-a_{n-1}$，或

$$L_k=\frac{1}{F_n}(b_0-a_0)=\frac{1}{F_{k+1}}(b_0-a_0)=\frac{L_0}{F_{k+1}}$$

如果在 k 次迭代时搜索到最优点，则应有

$$\frac{b_0-a_0}{F_{k+1}}\leqslant e \tag{5—12}$$

e 为预先给定的很小的正数，

迭代公式为：

第一次迭代

$$\lambda_1{}^1=a_0+\frac{F_{n-2}}{F_n}(b_0-a_0)=b_0+\frac{F_{n-1}}{F_n}(a_0-b_0) \tag{5—13}$$

$$\lambda_2{}^1=a_0+\frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0-a_0)=b_0+\frac{F_{n-2}}{F_n}(a_0-b_0) \tag{5—14}$$

其中有： $\lambda_1{}^1+\lambda_2{}^1=a_0+b_0$

第 k 次迭代（见图 5—7）



图 5—7 第 k 步迭代时区间长度

$$\lambda_1^k = b_{k-1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(a_{k-1} - b_{k-1}) \tag{5—15}$$

$$\lambda_2^k = a_{k-1} + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_{k-1} - a_{k-1}) \tag{5—16}$$

$$\lambda_1^k + \lambda_2^k = a_{k-1} + b_{k-1} \tag{5—17}$$

得到 $[a_k, b_k]$ 区间。

若 $f(a_k) < f(b_k)$ 则 a_k 为极小点，

$f(a_k) \geqslant f(b_k)$ 则 b_k 为极小点。

Fibonacci 法的特点是

1. 给定试验次数时，可使区间缩短为最小，所以是最优搜索方法，是一种优选法。

2. 这种方法是序贯试验的方法，它是限定试验次数并且每次只做一个试验的最优方法。

3. 算法简单，用计算机计算很方便。

[例] 用 Fibonacci 法求 $f(x) = (x-3)^2$ 的极小值点，设区间长度为 $L_0 = [0,10]$，要求搜索三次，$n = 4$

由解析法可知，极小值点为 $x^* = 3$。

第一次迭代

$a_0 = 0$，$b_1 = 10$，在 $[0, 10]$区间取 λ_1^1、λ_2^1 两点

$$\lambda_1^1 = a_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_0 - a_0) = 6 \text{ ,}$$

$$\lambda_2^1 = a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_0 - a_0) = 4 \text{ 。}$$

则 $f(\lambda_1^1)=9$，$f(\lambda_2^1)=1$，剩下区间为 [0, 6]，其长度为 $L_1=6$。

第二次迭代

$a_1=0$，$b_1=6$，在 [0,6] 区间取 λ_1^2、λ_2^2 两点

$$\lambda_1^2=b_1+\frac{F_{n-2}}{F_{n-2+1}}(a_1-b_1)=2$$

$$\lambda_2^2=\lambda_2^1$$

$f(\lambda_1^2)=1$，$f(\lambda_2^2)=1$，两者相等，假设我们取 $a_2=2$，$b_2=4$，即消去 [0,2] 一段，这时 $L_2=2$，显然，$2<x^*<4$。

第三次迭代

因为 $f(\lambda_1^2)=f(\lambda_2^2)$，为了使函数值能区别开，令搜索区间为 [2, 3.99]，则 $f(3.99)=0.99^2=0.9801$，显然

$$2<x^*<3.99$$

这时 $a_2=2$，$b_2=3.99$，$L_2=1.99$。

$$\lambda_1^3=b_2+\frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}(a_2-b_2)=2.995$$

$$\lambda_2^3=a_2+\frac{F_{n-3}}{F_{n-2}}(b_2-a_2)\doteq 2.995$$

∴ 最优点 $x^*=2.995$

$f(x^*)=0.000025$

三次搜索过程如下

$[a_0\ b_0]=[0,10]$，$L_0=10$，$f(\lambda_1^1)=9$

$[a_1\ b_1]=[0,\ 6]$，$L_1=6$，$f(\lambda_1^2)=1$

$[a_2\ b_2]=[2,\ 4]$ 取 [2, 3.99]

$L_2=1.99$，$f(\lambda_1^3)=25\times10^{-6}$。

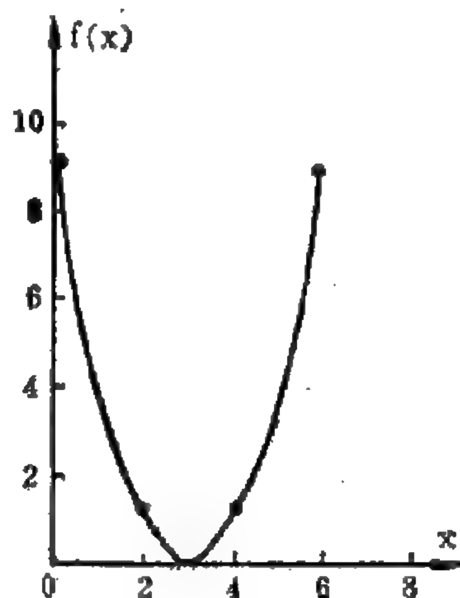


图 5—8 求 $(x-3)^2$ 最优点

Fibonacci 法程序框图如图 5—9

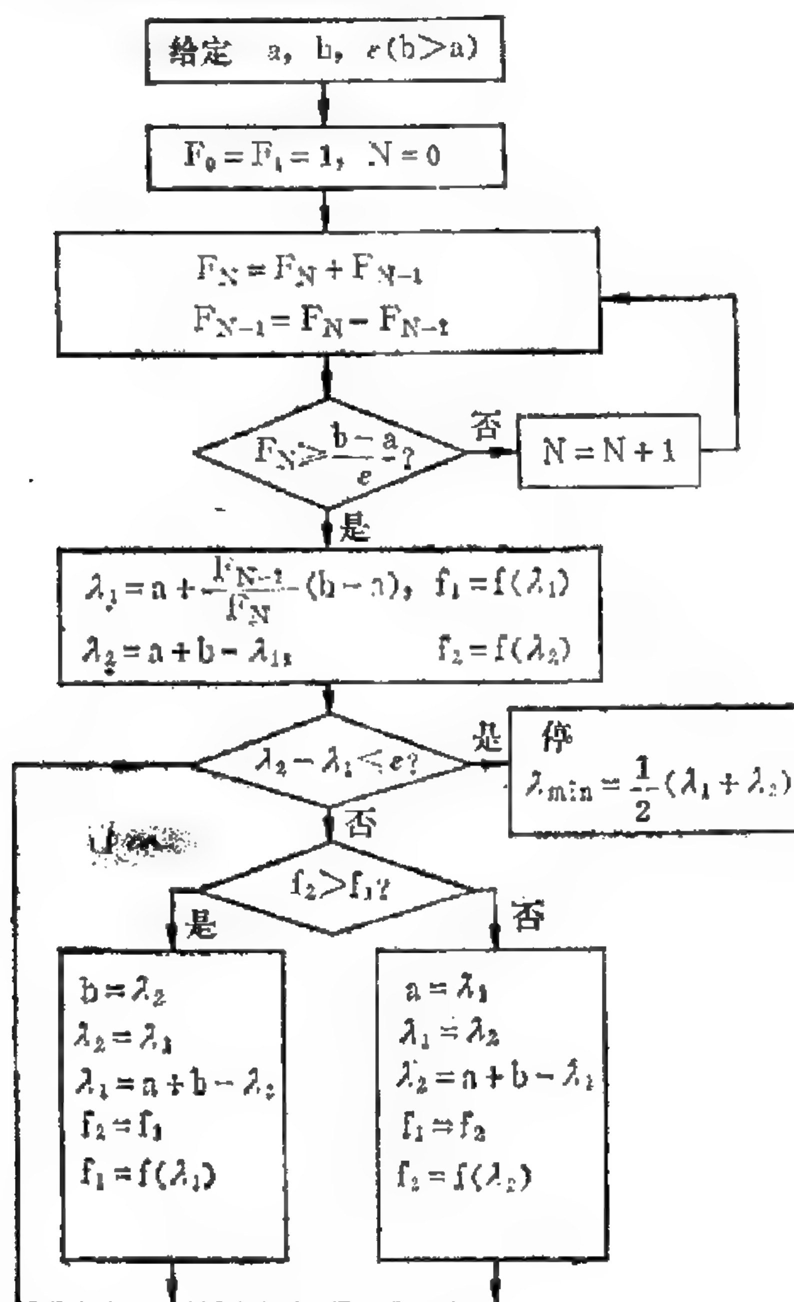


图 5—9 Fibonacci 法一维搜索程序框图

§ 5-3 黄金分割法（0.618 法）

在 Fibonacci 法中已经说明，当 $k\to\infty$ 时，Fibonacci 数列中前后两个数之比$\frac{F_k}{F_{k+1}}\to0.618$。如果每次缩短的区间比例均为

0.618，如图 5—10 所示。即选择 $\lambda_1=0.382$，$\lambda_2=0.618$（设 ab 区间原长度为 1）。而且每次迭代，这个比率均不变，这种搜索方法称为 0.618 法。

按 Fibonacci 法，前三次迭代后的区间长度分别为：

$$L_1=\frac{F_k}{F_{k+1}},$$

$$L_2=\frac{F_{k-1}}{F_{k+1}},$$

$$L_3=\frac{F_{k-2}}{F_{k+1}}。$$

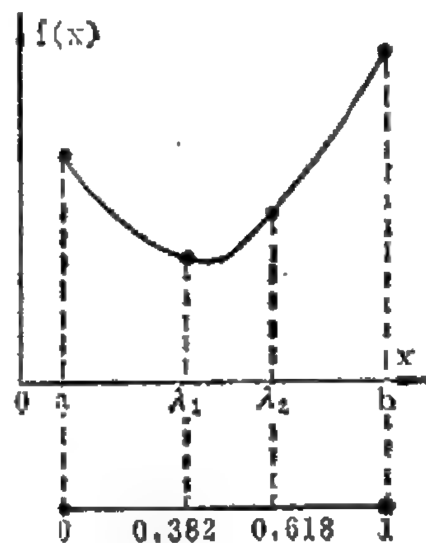


图 5—10 0.618 法

而按 0.618 法，要求每次所得区间长度比例不变，即

$$\frac{L_2}{L_1}=\frac{L_3}{L_2}$$

或
$$\frac{F_{k-1}}{F_k}=\frac{F_{k-2}}{F_{k-1}}=\frac{F_k-F_{k-1}}{F_{k-1}}$$

令
$$\lambda_2=\frac{F_{k-1}}{F_k},\qquad \lambda_1=1-\lambda_2=\frac{F_k-F_{k-1}}{F_k}$$

代入上式得
$$\lambda_2=\frac{1}{\lambda_2}-1$$

或
$$(\lambda_2)^2+\lambda_2-1=0 \tag{5—18}$$

$$\lambda_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618,\quad \lambda_1=0.382 \tag{5—19}$$

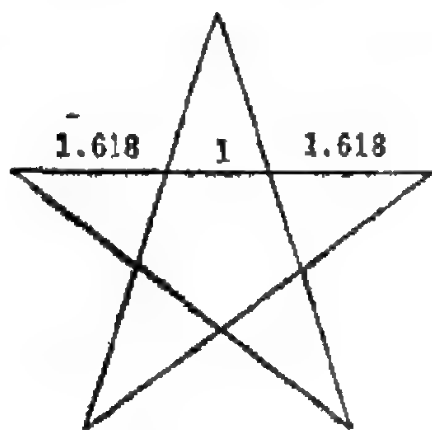
当区间长度为 1 时，迭代后区间长度缩短为 0.618。

当区间长度为 $b-a$ 时，

$$\lambda_1 = a + 0.382(b-a)$$

$$\lambda_2 = a + 0.618(b-a)$$

这种分割线段的方法是欧几里德发现的，古代称这种特殊分割线段的方法为黄金分割法。实际上古代欧洲将长与宽之比为 1.618 的长方形称为黄金长方形。也即定黄金分割比为 1.618，它是 $\tau^2-\tau-1=0$ 的解，$\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618$。例如五角星的各条边就是按照这一比例关系确定（见图 5—11），1.618 这个数过去在欧洲建筑设计方面应用较多。有趣的是 1.618 的倒数恰为 0.618。因此实际上 0.618 法只是黄金分割法的一种近似。



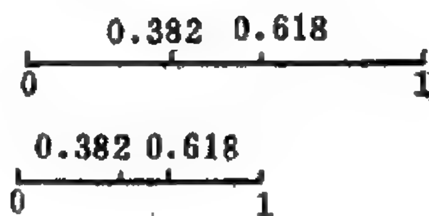


图 5—11　五角星中的黄金分割比　图 5—12　0.618 法两次迭代区间长度

0.618 法每次按固定的比例缩减区间长度，如图 5—12。因此用 0.618 法和用 Fibonacci 法每次迭代所得区间长度是不同的。例如设原区间长度为 L_0，则 k 次迭代后，用 Fibonacci 法所得区间长度 $L_k=\frac{L_0}{F_{k+1}}$，而 0.618 法所得区间长度 $L_k=(0.618)^k L_0$。

用两种方法计算所得区间长度比例 $\frac{L_k}{L_0}$ 如下表（见次页）。

0.618 法程序框图如图 5—13。

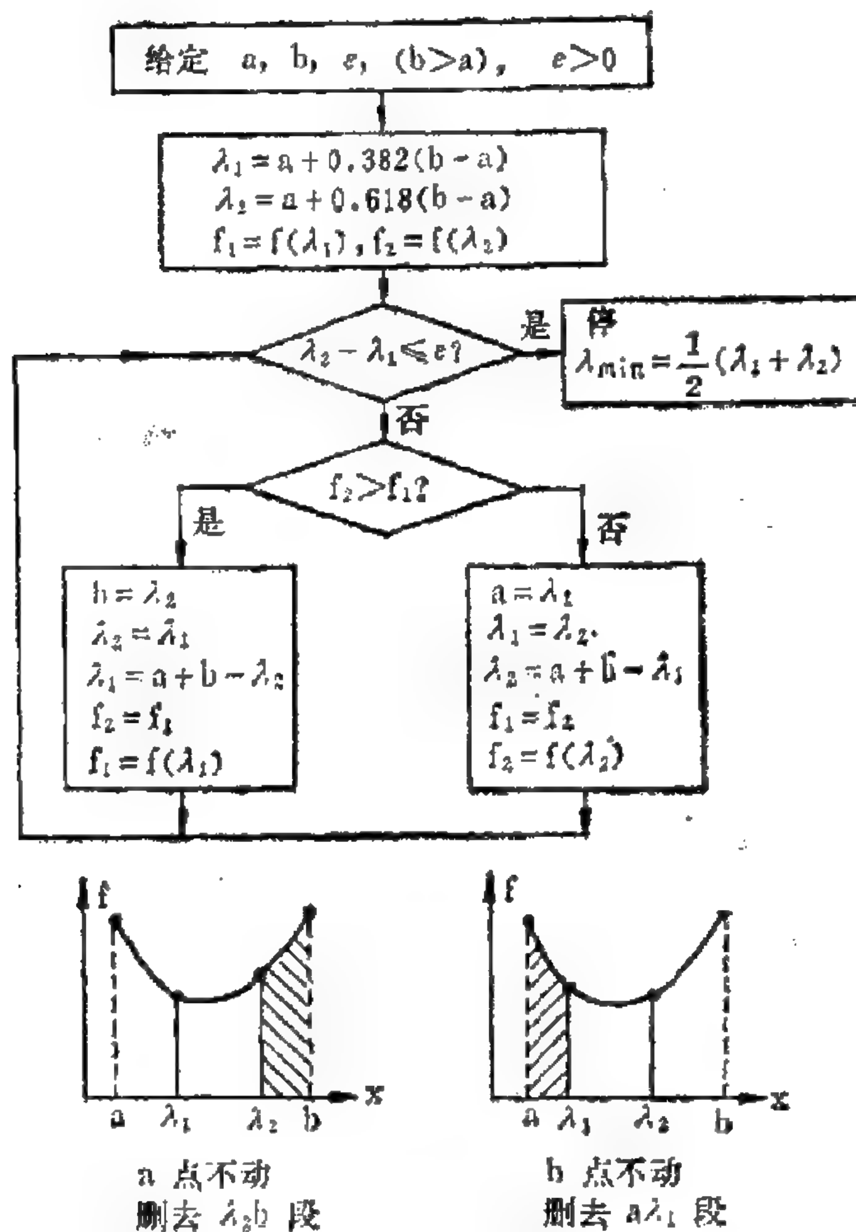


图 5—13 0.618 法程序框图

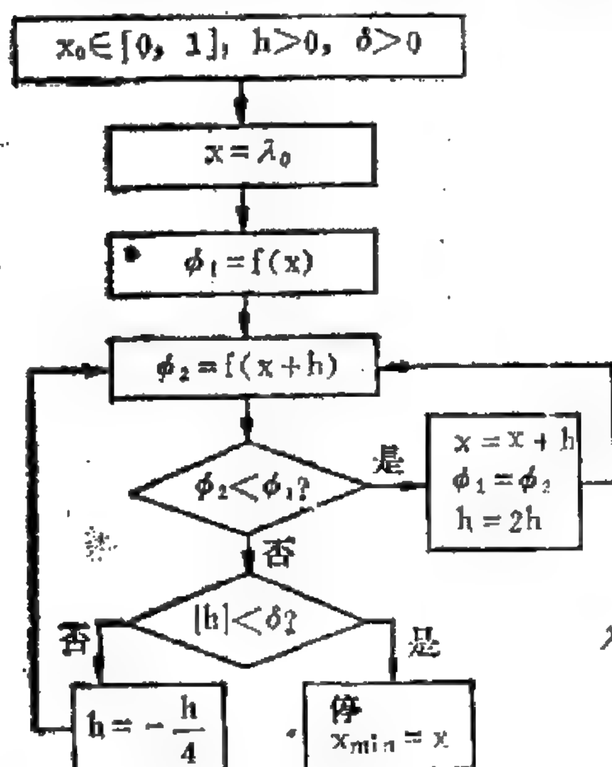
L_k/L_0 \ k 方 法	1	2	3	4	5
Fibonacci 法	0.5	0.333	0.2	0.125	0.0777
0.618 法	0.618	0.382	0.23	0.146	0.083

L_k/L_0 \ k 方法	6	7	8	9	10
Fibonacci 法	0.048	0.029	0.018	0.01	0.00694
0.618 法	0.054	0.034	0.0213	0.013	0.00813

§5-4 进退法（成功失败法）

进退法的基本思想是，每次搜索都要改变搜索步长。如果在第 k 次迭代沿某方向搜索成功，则函数值一定下降，下一步仍可沿该方向搜索，而且可以大步向前搜索。如果在第 k 次迭代，沿某方向搜索失败，即函数值上升，则应退回到原地，下一步沿相反方向，即向后小步搜索。

设一开始从 x_0 出发，步长取为 h，若 $f(x_0)>f(x_0+h)$，则



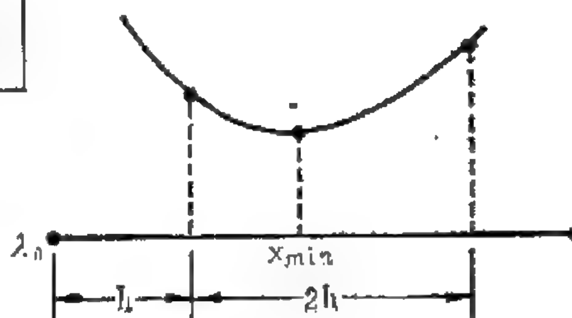


图 5—14 进退法程序框图

搜索成功，于是下一步可取步长为 $2h$；若第 k 步的步长为 nh，并搜索成功，下一步可取步长为 $2nh$。

如果 $f(x_0) \leqslant f(x_0+h)$，则搜索失败，退回原点并且再后退 $\frac{h}{4}$，若第 k 步步长为 nh，搜索失败，则退回到 x_0 后，还要后退 $\frac{nh}{4}$。直到最后搜索步长小于 δ，δ 为给定的任意小的正数，则停止搜索，得 x^* 的近似解。

$2h$，$\frac{h}{4}$ 都是按经验选取的，也可取 $3h$ 或 $\frac{h}{3}$。

进退法程序框图见图 5—14。

§ 5-5 插 值 法

一、线性插值

求 $f(x)$ 的最优值可用牛顿迭代方法求解非线性方程 $f'(x)=0$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的一阶导数，（如图 5—15）。假设初始点为 x_a，在 x_a 附近取 $f'(x)$ 的切线，也即用直线代替 x_a 附近的非线性函数 $f'(x)$。

$$f'(x)=f'(x_a)+f''(x_a)(x-x_a),$$

$f''(x)$ 为 $f(x)$ 二阶导数。令 $f'(x)=0$，求切线与 x 轴交点。

得
$$x_b = x_a - \frac{f'(x_a)}{f''(x_a)}$$

若 $|f'(x_b)|>e$，e 为给定误差，则 x_b 不是最优解，继续在 x_b 点作 $f'(x)$ 的切线，得

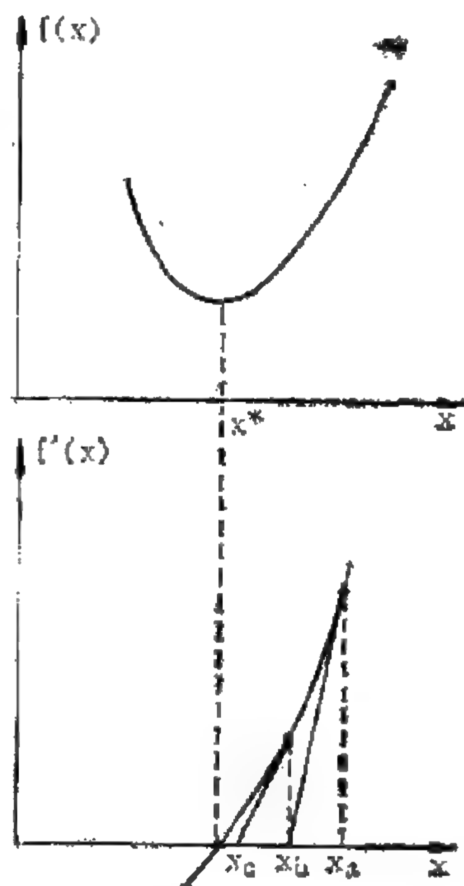


图 5—15　牛顿法求最优解

$$x_c = x_b - \frac{f'(x_b)}{f''(x_b)}$$

再检查是否满足不等式 $|f'(x_c)| < \varepsilon$？……，继续迭代，直到满足为止。

线性插值是用线性函数 $\varphi(x)$ 在 x_1、x_2 范围内逼近 $f'(x)$ 求解。这时用 1，2 两点间直线，即 $f'(x)$ 的割线代替切线，近似 $f'(x)$。见图 5—16，由图可知应有：

$$\frac{x - x_1}{f'(x) - f'(x_1)} = \frac{x_2 - x_1}{f'(x_2) - f'(x_1)}$$

直线 $\varphi(x)$ 与 x 轴的交点为：

$$x_0 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) f'(x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)} \tag{5—20}$$

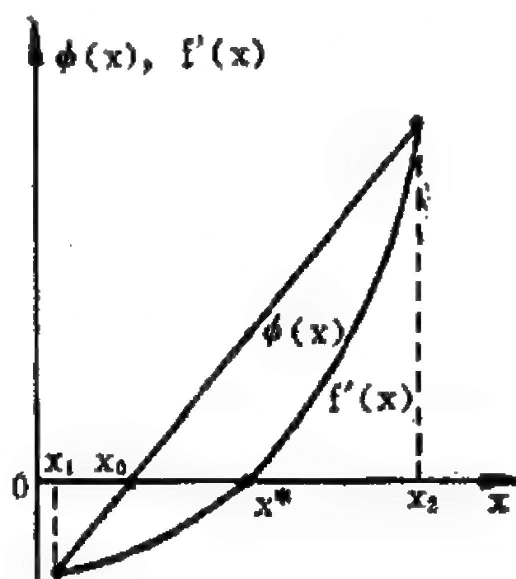


图 5—16 线性插值

解出 x_0 后，可求出与 x_0 对应的 $f'(x_0)$。

若 $f'(x_0) \leqslant \varepsilon$，则可认为 $x_0 = x^*$，

若 $f'(x_0) < -\varepsilon$，表示 x_0 在 x^* 左边，将 x_0 作为继续搜索的下界，即消去区间 $[x_1, x_0]$，在 $[x_0, x_2]$ 区间再作线性插值。

若 $f'(x_0) > \varepsilon$，表示 x_0 在 x^* 的右边，则消去区间 $[x_0, x_2]$，在 $[x_1, x_0]$ 区间继续作线性插值，直到新的 x_0 满足 $|f'(x_0)| \leqslant \varepsilon$ 为止。

线性插值法程序框图如图 5—17。

二、二次插值

上述各种方法（如线性插值、0.618 法，Fibonacci 法）要多

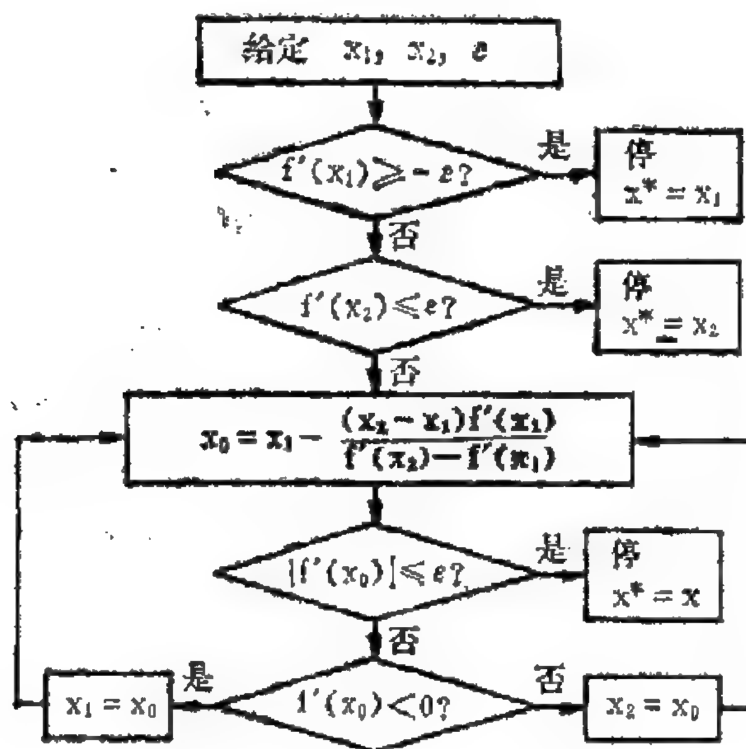


图 5—17 线性插值法程序框图

次计算函数值，才能得到较准确的极值点。

和线性插值方法类似的是用多项式 $\varphi(x)$ 逼近函数 $f(x)$，用解析法求 $\varphi'(x)=0$ 的根，作为 $f(x)$ 极小值的近似，重复应用这一方法进行迭代计算，直到得出满意的结果为止。一般用二次多项式或三次多项式逼近 $f(x)$，称为二次插值或三次插值。三次插值法收敛性较好，但导数计算不方便，比较简单的是二次插值又称抛物线插值方法，如图 5—18。

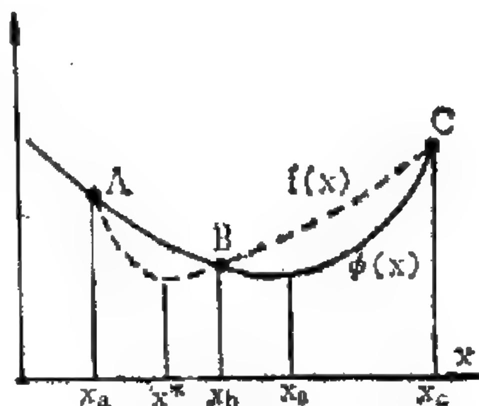


图 5—18 抛物线插值法

在函数 $f(x)$ 的寻优区间内任意确定 A、B、C 三点，相应的有 x_a、x_b、x_c。令二次多项式 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ 也通过这三点，则应有

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x_a)&=a_0+a_1x_a+a_2x_a^2=f(x_a)\\ \varphi(x_b)&=a_0+a_1x_b+a_2x_b^2=f(x_b)\\ \varphi(x_c)&=a_0+a_1x_c+a_2x_c^2=f(x_c)\end{aligned}\right\}\tag{5—21}$$

由（5—21）式可解出 a_0、a_1、a_2。$\varphi(x)$ 的最优解 x_0 应满足下述关系式

$$\varphi'(x_0)=a_1+2a_2x_0=0$$

$$x_0=-\frac{a_1}{2a_2}\tag{5—22}$$

直接由（5—21）式求出 a_1，a_2，可得

$$x_0=\frac{-\begin{vmatrix}1 & f(x_a) & x_a^2\\ 1 & f(x_b) & x_b^2\\ 1 & f(x_c) & x_c^2\end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix}1 & x_a & f(x_a)\\ 1 & x_b & f(x_b)\\ 1 & x_c & f(x_c)\end{vmatrix}}\tag{5—23}$$

［例］ $f(x)=8x^3-2x^2-7x+3$

取 $x_a=0$，$x_b=1$，$x_c=2$

$f(0)=3$，$f(1)=2$，$f(2)=45$

得
$$x_0=-\frac{1}{2}\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 45 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 45\end{vmatrix}}=\frac{23}{44}=0.52$$

由 $\dfrac{df}{dx}=0$ 求得极值点为 $x^*=0.63$，显见用 $x_0=0.52$ 作为 $f(x)$ 的最优值是有误差的，还应继续迭代。

［例］ 求 $\min f(x)=e^x-5x$

$\dfrac{df}{dx}=e^x-5=0$，$x^*=\ln 5=1.609$ 在区间［1,2］内。

令 $\lambda = x-1$，得 $g(\lambda)=f(\lambda+1)=e^{\lambda+1}-5(\lambda+1)$，

$\lambda^* = 0.609$.

取 $\lambda_a=0$，$\lambda_b=1$，$\lambda_c=2$.

$$g(0)=e-5=-2.282$$

$$g(1)=e^2-10=-2.611$$

$$g(2)=5.086$$

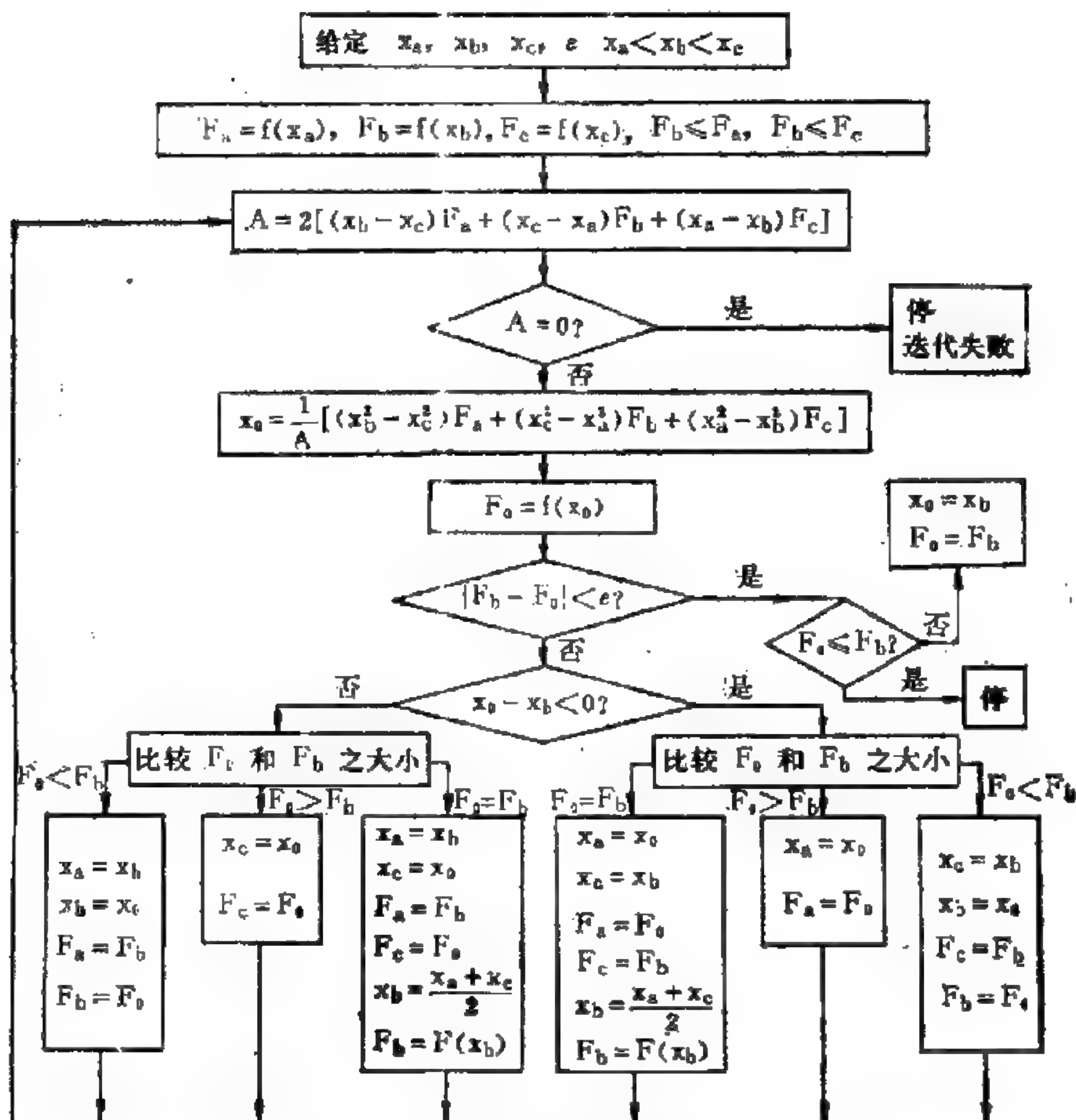


图 5—19 二次插值法程序框图

得 $\lambda_0=0.531$ 而 $\lambda^*=0.609$。这是用二次插值法进行一步迭代的结果，显然抛物线最优值 0.531 与实际函数最优值有相当差距，还应继续进行迭代。

一种迭代方法是，设预先给定目标函数值的允许误差为 $\varepsilon(>0)$，比较目标函数值 $f_a=f(x_a)$、$f_b=f(x_b)$、$f_c=f(x_c)$ 与 $f_0=\varphi(x_0)$ 的差值 f_0-f_a、f_0-f_b、f_0-f_c，若 $\min\{|f_0-f_a|$、$|f_0-f_b|$、$|f_0-f_c|\}<\varepsilon$，则可取 x_0 为近似解，否则再以 x_0 和 x_a、x_b、x_c 中与之相近的两点构成新的抛物线，再做第二步二次插值迭代，以其最小点近似目标函数最优点。这一方法在中间低两头高的情况，即当 $x_a<x_b<x_c$，而 $f(x_b)<f(x_a)$，$f(x_b)<f(x_c)$ 时，效果较好。

二次插值法的程序框图见图 5—19。

插值法原是为了解决多变量函数最优化问题中出现的一维极小化问题，与 Fibonacci 法相比，二次插值法更为有效。

[例] $f(X)=(x_1^2-x_2)^2+(1-x_1)^2$

$$X^0=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix},\qquad P^0=\begin{bmatrix}1\\0.25\end{bmatrix}$$

$$X^1=X^0+\alpha P^0=\begin{bmatrix}-2+\alpha\\-2+0.25\alpha\end{bmatrix}$$

则 $f(\alpha)=[(-2+\alpha)^2-(-2+0.25\alpha)]^2+[1-(-2+\alpha)]^2$

$$=\alpha^4-8.5\alpha^3+31.0625\alpha^2-57\alpha+45$$

我们可以用二次多项式 $\varphi(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2$ 近似上述函数 $f(\alpha)$。$\varphi(\alpha)$ 的极小值点 α_0 由（5—23）式决定，可表示如下

$$\alpha_0=\frac{f_a(\alpha_b^2-\alpha_c^2)+f_b(\alpha_c^2-\alpha_a^2)+f_c(\alpha_a^2-\alpha_b^2)}{2[f_a(\alpha_b-\alpha_c)+f_b(\alpha_c-\alpha_a)+f_c(\alpha_a-\alpha_b)]}$$

式中 $f_a=f(\alpha_a)$，$f_b=f(\alpha_b)$，$f_c=f(\alpha_c)$，

为了简便，一开始可取 $\alpha_a=0$，$\alpha_b=t$，$\alpha_c=2t$。t 为预先选好的试验步长。这样可以少做一次函数计算，因为 $f_a=f(\alpha_a=0)=a_0$ 是已知的。

解（5—21）式所示的联立方程可得

$$a_0=\left[\frac{f_a\alpha_b\alpha_c(\alpha_c-\alpha_b)+f_b\alpha_c\alpha_a(\alpha_a-\alpha_c)+f_c\alpha_a\alpha_b(\alpha_b-\alpha_a)}{(\alpha_a-\alpha_b)(\alpha_b-\alpha_c)(\alpha_c-\alpha_a)}\right]$$

$$a_1=\left[\frac{f_a(\alpha_b^2-\alpha_c^2)+f_b(\alpha_c^2-\alpha_a^2)+f_c(\alpha_a^2-\alpha_b^2)}{(\alpha_a-\alpha_b)(\alpha_b-\alpha_c)(\alpha_c-\alpha_a)}\right]$$

$$a_2=-\left[\frac{f_a(\alpha_b-\alpha_c)+f_b(\alpha_c-\alpha_a)+f_c(\alpha_a-\alpha_b)}{(\alpha_a-\alpha_b)(\alpha_b-\alpha_c)(\alpha_c-\alpha_a)}\right]$$

令 $\alpha_a=0$，$\alpha_b=t$，$\alpha_c=2t$ 代入得

$$a_0=f_a$$

$$a_1=\frac{4f_b-3f_a-f_c}{2t},$$

$$a_2=\frac{f_c+f_a-2f_b}{2t^2},$$ a_2 应大于 0，即应满足不等式

$$\frac{f_a+f_c}{2}>f_b.$$

而 $\varphi(\alpha)$ 的最优值 α_0 为

$$\alpha_0=\frac{(4f_b-3f_a-f_c)t}{4f_b-2f_c-2f_a}$$

迭代步骤如下：

1. 设已知 f_a 及初始步长 t_0，计算函数 $\alpha=t_0$ 时函数值。令 $f_1=f(\alpha=t_0)$。

可能有两种情况：$f_1>f_a$ 或 $f_1\leqslant f_a$

2. 若 $f_1>f_a$ 则令 $f_c=f_1$，即令 $\alpha_c=2t=t_0$，计算 $\alpha=\frac{t_0}{2}$ 时的函数值 $f_2=f(\alpha=\frac{t_0}{2})$ 以及 α_0 值。

3. 若 $f_1\leqslant f_a$，则令 $f_b=f_1$，即令 $\alpha_b=t=t_0$，计算 $\alpha=2t_0$ 时的函数值 $f_2=f(\alpha=2t_0)$。

4. 若 $f_2>f_1$，则令 $f_c=f_2$，并计算 α_0（令 $t=t_0$）。

5. 若 $f_2<f_1$，令新的 $f_1=f_2$，$t_0=2t_0$，重复第 2 步到第 4 步，直到收敛为止。

6. 判敛标准

$$\left|\frac{\varphi(\alpha_0)-f(\alpha_0)}{f(\alpha_0)}\right|\leqslant\varepsilon_1$$

或
$$\left|\frac{f(\alpha_0+\triangle\alpha_0)-f(\alpha_0-\triangle\alpha_0)}{2\triangle\alpha_0}\right|\leqslant\varepsilon_2$$

如果不满足判敛标准，则应用一个新的二次函数

$$\varphi(\alpha)=a_0'+a_1'\alpha+a_2'\alpha^2$$

近似 $f(\alpha)$。为了计算 a_0'，a_1'，a_2'，可以在 $\alpha=0$，$\alpha=t_0$，$\alpha=2t_0$ 及 α_0 中选择最好的三个点，即相应的函数值 f_a、f_b、f_c 及 $f(\alpha_0)$ 为最好的三个函数值所在点。

[例] $\min\ f(\alpha)=\alpha^5-5\alpha^3-20\alpha+5$

解：取 $t_0=0.5$，令 $\alpha_a=0$，$\alpha_b=0.5$，$\alpha_c=1$. 设 $\varepsilon_1=0.02$

第一次迭代，令 $f_a=f(\alpha=0)=5$，

$$f_1=f(\alpha=t_0)=(0.5)^5-5(0.5)^3-20(0.5)+5=-5.59375$$

现在 $f_1<f_a$，令 $f_b=f_1=-5.59375$，

计算出 $$f_2=f(\alpha=2t_0=1)=-19,$$

现在 $f_2<f_1$，令新的 $t_0=1$，新的 $f_1=-19$，重复计算。由于 f_1 仍小于 f_a，再令 $f_b=f_1=-19$，

得 $f_2=f(\alpha=2t_0=2)=-43$

因为 $f_2<f_1$，再令 $t_0=2$，$f_1=-43<f_a$，令 $f_b=f_1=-43$。

计算 $f_2=f(\alpha=2t_0=4)=629$，这次 $f_2>f_1$，因此可令 $f_c=629$ 并计算 α_0，将 $f_a=5$，$f_b=-43$，$f_c=629$，$t=t_0=2$ 代入

$$\alpha_0=\frac{(4f_b-3f_a-f_c)t}{4f_b-2f_c-2f_a}$$

得 $\alpha_0=1.135$

并求得二次函数的系数 $a_0=5$，$a_1=-204$，$a_2=90$。

$$\varphi(\alpha_0)=-116.5,\quad f(\alpha_0)=-23.127$$

根据判敛标准

$$\left|\frac{\varphi(\alpha_0)-f(\alpha_0)}{f(\alpha_0)}\right|=4.04$$

远未收敛，因此继续迭代下去。

第二次迭代

因为 $\alpha_0<\alpha_b=2$，$f(\alpha_0)>f_b=-43$，取新的三点为：

$\alpha_a=1.135$（即原来 α_0） $f_a=-23.127$

$\alpha_b=2$ （不变） $f_b=-43$

$\alpha_c=4$ （不变） $f_c=629$

计算得 $\alpha_0=1.661$，$a_0=288$，$a_1=-417$，$a_2=125.3$

$$\varphi(\alpha_0)=-59.7,\quad f(\alpha_0)=-38.37$$

$$\left|\frac{\varphi(\alpha_0)-f(\alpha_0)}{f(\alpha_0)}\right|=0.556$$

这个数还较大，应继续迭代。

第三次迭代

因为 $\alpha_0<\alpha_b=2$，$f(\alpha_0)>f_b=-43$，取新的三点为：

$$\alpha_a = 1.661 \qquad f_a = -38.37$$

$$\alpha_b = 2 \qquad f_b = -43$$

$$\alpha_c = 4 \qquad f_c = 629$$

计算得 $\alpha_0 = 1.875$，$a_0 = 484$，$a_1 = -561$，$a_2 = 149.7$

$$\varphi(\alpha_0) = -41.5 \qquad f(\alpha_0) = -42.3$$

$$\left|\frac{\varphi(\alpha_0) - f(\alpha_0)}{f(\alpha_0)}\right| = 0.01891 < \varepsilon_1 \text{（预先设定 } \varepsilon_1 = 0.02\text{）}$$

因此可以认为已收敛，取 $\alpha^* = \alpha_0 = 1.875$，迭代停止。

三、三次插值

三次插值法是用三次多项式

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$$

逼近函数 $f(\alpha)$，我们规定两函数近似的范围为区间 $[A, B]$，开始时可取 $A = 0$，$B = t_0$，$2t_0$，$4t_0$，$8t_0$……，并要求

$$\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} < 0, \qquad \left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha=B} > 0。$$

这样最优点 α^* 限制在下述范围内

$$0 < \alpha^* \leqslant B$$

为了计算 a_0、a_1、a_2、a_3 四个系数，应解下述联立方程：

$$f_A = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3$$

$$f_B = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3$$

$$f_A' = a_1 + 2a_2 A + 3a_3 A^2$$

$$f_B' = a_1 + 2a_2 B + 3a_3 B^2$$

解得： $a_0 = f_A - a_1 A - a_2 A^2 - a_3 A^3$

$$a_1 = \frac{1}{(A-B)^2}(B^2 f_A' + A^2 f_B' + 2ABC)$$

$$a_2 = -\frac{1}{(A-B)^2}[(A+B)C + Bf_A' + Af_B']$$

$$a_3 = \frac{1}{3(A-B)^2}[2C + f_A' + f_B']$$

$$C = \frac{3(f_A - f_B)}{B-A} + f_A' + f_B'$$

$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$ 为极小的必要条件是

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = a_1 + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 = 0$$

极小点 $$\alpha_0 = \frac{-2a_2 \pm \sqrt{4a_2^2 - 12a_1a_3}}{6a_3}$$

代入 a_1，a_2，a_3 诸式可得

$$\alpha_0 = A + \frac{(f_A' + C \pm D)(B-A)}{f_A' + f_B' + 2C}$$

式中 $D = \sqrt{C^2 - f_A' f_B'}$，要求 $D>0$，

当 $A=0$ 时，可得

$a_0 = f_A$

$a_1 = f_A'$ 并应有 $f_A'<0$，$f_B'\geqslant 0$

$a_2 = -\frac{1}{B}(C + f_A')$，其中 $C = \frac{3(f_A - f_B)}{B} + f_A' + f_B'$。

$a_3 = \frac{1}{3B^2}(2C + f_A' + f_B')$

$$\alpha_0 = B\left(\frac{f_A' + C \pm D}{f_A' + f_B' + 2C}\right), \quad 其中\ D = \sqrt{C^2 - f_A' f_B'}$$

判敛标准为

$$\left|\frac{\varphi(\alpha_0) - f(\alpha_0)}{f(\alpha_0)}\right| \leqslant \varepsilon_1 \quad 或 \quad \left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha_0} \leqslant \varepsilon_2$$

满足这一条件时，可取 $\alpha^* \approx \alpha_0$。

若不满足上述条件，则应用新的三次函数

$$\varphi(\alpha) = a_0' + a_1'\alpha + a_2'\alpha^2 + a_3'\alpha^3$$

近似 $f(\alpha)$，根据 A、B 及 α_0 三点中最好的两点计算 $f(\alpha)$ 及 $f'(\alpha)$ 可确定 a_0'、a_1'、a_2'、a_3'。若 $f'(\alpha_0)<0$，取 $A=\alpha_0$，B 不动；若 $f'(\alpha_0)>0$，取 $B=\alpha_0$，A 不动。

[例] 用三次插值法求 $\min f(\alpha) = \alpha^5 - 5\alpha^3 - 20\alpha + 5$

解：取 $A=0$，$t_0=0.4$

$$f_A' = \frac{df}{d\alpha}(\alpha = A = 0) = -20 < 0,$$

计算 $f_B'>0$ 的点 B：

$$f'(t_0=0.4) = -22.272$$

$$f'(2t_0=0.8) = -27.552$$

$$f'(4t_0=1.6) = -25.632$$

$$f'(8t_0=3.2) = 350.688$$

因此 $B=8t_0$ 并且 $0<\alpha^*<3.2$

$$A=0, \quad f_A=5, \quad f_A'=-20$$

$$B=3.2, \quad f_B=113, \quad f_B'=350.688.$$

第一次迭代

计算得　　$C=229.438$，$D=244.24$，

$$\alpha_0=1.84 \text{ 或 } -0.1396 \quad \text{舍去负数。}$$

如果 α_0 接近最优值 α^*，则 $\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha_0}\approx 0$ 或 $\leqslant \varepsilon$。

$$f'(\alpha)=5\alpha^4-15\alpha^2-20$$

$\therefore$　$f'(\alpha_0)=-13$，显见应继续迭代。

第二次迭代

因为 $f'(\alpha_0)<0$，取 $A=\alpha_0=1.84$，$B=3.2$，

$$A=1.84,\quad f_A=-41.7,\quad f_A'=-13,$$

$$B=3.2,\quad f_B=113,\quad f_B'=350.688,$$

并且应有　$1.84<\alpha_0<3.2$。

计算得　$C=-3.312$，$D=67.5$，

$$\alpha_0=2.05,$$

$f'(\alpha_0)=5.35$，还应继续迭代。

第三次迭代

因为 $f'(\alpha_0)>0$，取 $B=2.05$，$A=1.84$，

$$A=1.84,\quad f_A=-41.7,\quad f_A'=-13,$$

$$B=2.05,\quad f_B=-42.9,\quad f_B'=5.35,$$

并应有　　$1.84<\alpha_0<2.05$。

计算得　　$C=9.49$，$D=12.61$，

$$\alpha_0=2.0086,$$

$$f'(\alpha_0)=0.855,\quad f(\alpha_0)=-42.996。$$

如果认为该值已足够小，可取

$$\alpha^* \cong \alpha_0 = 2.0086,$$

并停止迭代。

以上我们介绍了几种常用的一维搜索方法，即：Fibonacci 法、黄金分割法、插值（包括二次及三次插值）法等。一维搜索方法在求解多变量函数最优值时也是很重要的，计算最优步长时就要用一维搜索，因此实际求解的最优化问题虽然常常是多维的，但是迭代过程中却是应用了多维搜索和一维搜索相结合的算法。

以下我们将介绍几种常用的直接搜索法，以求解多变量函数无约束极值。其中包括座标轮换法、模向搜索法（步长加速法），共轭方向法、单纯形法以及随机搜索法，我们可以统称为爬山法。

§ 5-6 坐标轮换法

这种方法是最古老的多维搜索算法，又称为变量轮换法，它的迭代过程是沿不同的坐标方向轮换地进行搜索。设初始点为 X^0，先只改变一个变量，保持其它变量为常数，进行一维寻优，得到第一个最优点 X^1，再换一个变量，同样进行一维搜索。得到第二个最优点 X^2，如此继续下去，直到完成一个循环，对 n 个变量都轮换完毕，得到第 n 个最优点 X^n，这是第一步迭代。

若范数 $\|X^n - X^0\| < \varepsilon$，$\varepsilon$ 为规定的误差值，X^0 为这一循环的起始点，则 $X^* = X^n$，即满足收敛判据时 X^n 为最优解。否则令第一步迭代结果 $X^n = X^0$，再重复以上过程。

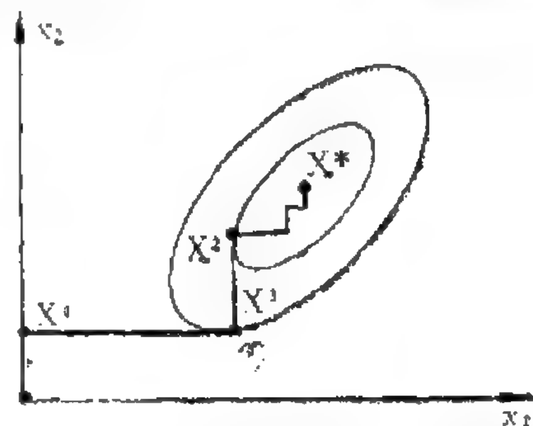


图 5—20 座标轮换法二维搜索

我们以二维搜索为例来说明这一方法，图 5—20 表示一个二次型函数，$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，从 X^0 出发分别沿 x_1、x_2 方向搜索并计算最优

步长 α_1、α_2。

1. 沿 x_1 方向搜索

$$\min_{\alpha} f(X^0+\alpha S_1)=f(X^1)$$
$$=f(X^0+\alpha_1 S_1)$$

S_1 为沿 x_1 轴的单位方向向量　$S_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$$X^1=X^0+\alpha_1 S_1$$

2. 沿 x_2 方向进行搜索求最优步长 α_2

$$X^2=X^1+\alpha_2 S_2$$

$S_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$为沿 x_2 轴的单位方向向量。

$$f(X^2)=\min_{\alpha} f(X^1+\alpha S_2)=f(X^1+\alpha_2 S_2)$$

这就完成了一个循环，如果 $\|X^2-X^0\|$ 不满足收敛判据要求，则以 X^2 为新的起点，再重复一个循环。

如果是 n 维函数，则一循环内包含 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 共 n 个坐标方向的轮换搜索。

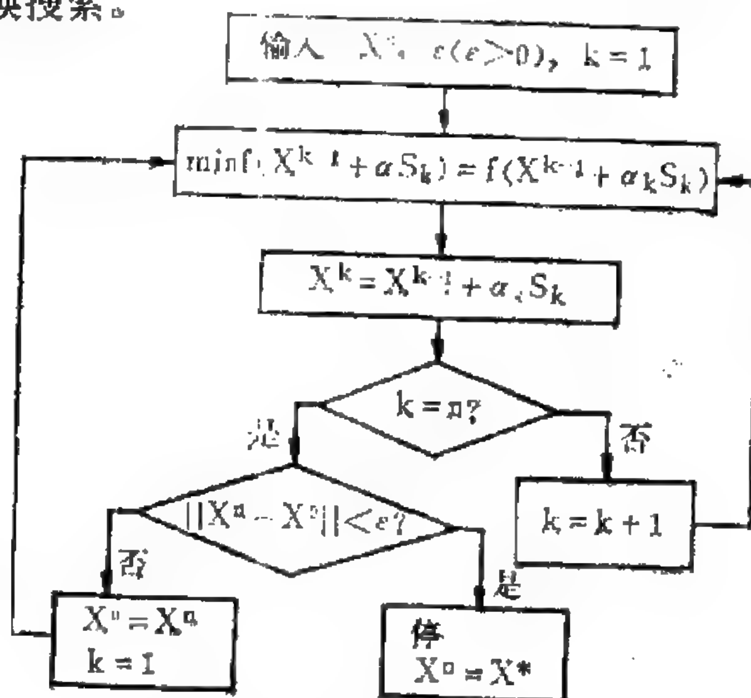


图 5—21　坐标轮换法程序框图

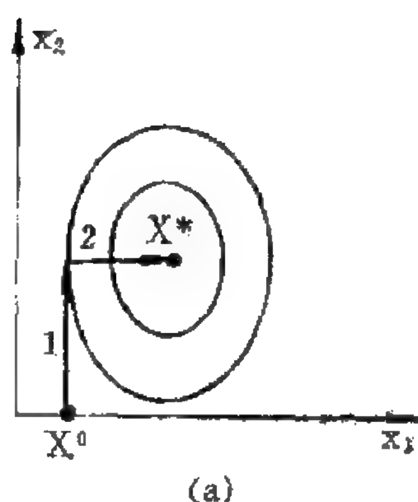
这个方法虽然简单，但收敛慢，计算时间较长。迭代程序框图如图 5—21。

坐标轮换法是把 n 个变量的函数寻优问题转化为 n 个单变量函数的寻优问题，因此实际上是一种降维的方法。

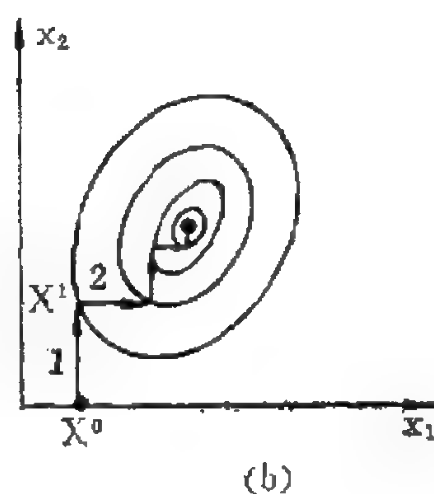
这种方法的效果与目标函数的形状有很大关系，以二元函数为例，有以下几种情况。

1. 如果目标函数为圆，或一个椭圆但其长短轴均平行于坐标轴，则这一方法很有效，一般经过两次搜索可达最优点，如图 5—22(a)，这种二元函数的特点是没有 x_1x_2 这一项，即调整 x_1 使 $f(X)$ 的变化与 x_2 取值无关，说明 x_1、x_2 之间没有"相互作用"。

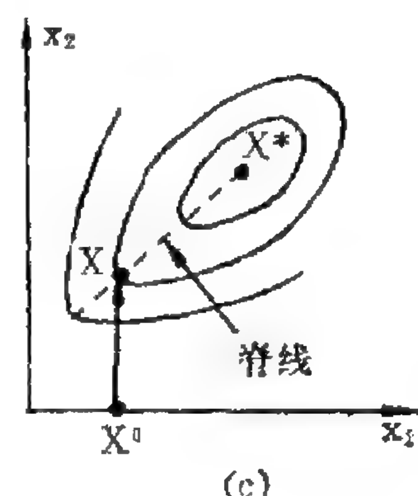
2. 如果目标函数的等高线接近椭圆，而长短轴不平行于坐标轴，则要经过多次迭代循环才能到达最优点，如图 5—22(b)。这种函数有 x_1x_2 这一项。因此改变 x_1 使 $f(X)$ 的变化也与 x_2 取值有关。



(a)



(b)



(c)

图 5—22 目标函数的三种形状

3. 目标函数出现了"脊线"，如图 5—22(c)。本来沿"脊线"方

向一步可达最优，但用坐标轮换法总是平行于某坐标轴搜索，不能沿脊线前进搜索，从 X^0 前进一步，如果恰好到达脊线上的X点，就无法继续向前搜索，搜索到X点为止，因而不能找到最优点。

§ 5-7　步 长 加 速 法

上一节，我们已经看到，用坐标轮换法爬山，不能沿脊线方向搜索，可是脊线方向却是到达最优点的有利方向。本节将要介绍的步长加速法正是一种遵循脊线方向加速爬山的方法。又称为模向搜索法。这是一种既简单又容易实现编程序的方法，由虎克（Hooke）杰夫斯（Jeeves）两人在 1961 年提出。

步长加速法的基本思路是：进行了某次试验搜索以后，发现沿某个方向移动使目标函数值有所改进，则说明继续沿该方向移动，目标函数值还有可能得到改进，如果原来移动的方向是沿脊线走的，在假设脊线是直线的条件下，沿这个方向继续加大步长，应该是有效的。

我们以二元函数为例，具体介绍这一方法（见图 5—23）。

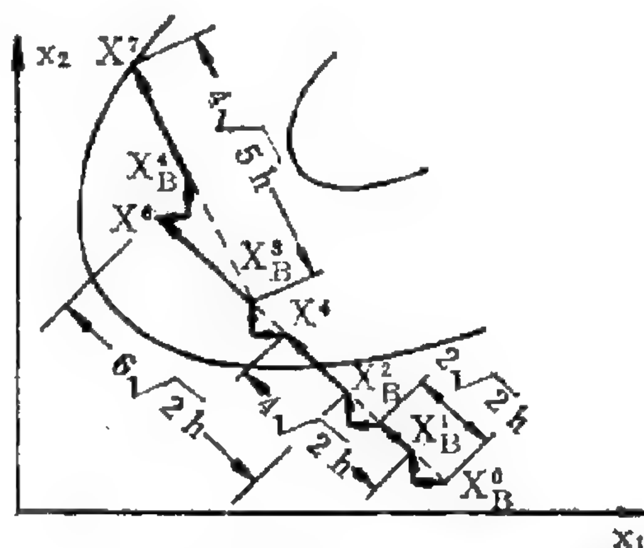


图 5--23　步长加速法二维搜索

步长加速法包括两种搜索和移动。一种是探测性搜索，在起始点附近按一定步长探测有利方向，然后进行移动。另一种是模向搜索，即遵循找到的有利方向，加速移动，并判断是否

到达更有利的点，探测搜索时按给定步长用坐标轮换法搜索。

设沿每个坐标轴的步长给定为 h。探测搜索步骤为：

1. 从基点 $X_1^0=X_B^0$ 出发，沿 x_1 正方向搜索，得

$$x_1^1=x_1^0+\triangle x_1=x_1^0+h$$

检验目标函数值是否减少，如果 $f(x_1^1, x_2^0)<f(x_1^0, x_2^0)$，说明沿 x_1 方向探测成功，取 $x_1^1=x_1^0+h$，否则，说明探测失败，沿 x_1 方向不是有利的。

2. 如果沿 $+x_1$ 方向探测失败，则可沿 $-x_1$ 方向搜索，得 $x_1^1=x_1^0-\triangle x_1=x_1^0-h$，若 $f(x_1^1, x_2^0)<f(x_1^0, x_2^0)$，说明探测成功。以 x_1^1 为起点沿 x_2 方向搜索。

3. 如果沿 $+x_1$、$-x_1$ 两方向探测搜索，目标函数值均不变，或均增大，说明探测失败，可以从 X_B^0 点沿 x_2 方向搜索，依次检验 $+x_2$、$-x_2$ 方向是否为有利方向，此时令 $x_2^1=x_2^0\pm h$，而 $x_1^1=x_1^0$。

如果沿某一方向（例如 $+x_2$）目标函数值下降，即 $f(x_1^1, x_2^1)<f(x_1^1, x_2^0)$，则取该方向为有利方向，令 $x_2^1=x_2^0+h$，得 $X^1=[x_1^1, x_2^1]^T$，作为模向搜索的基点（记作 X_B^1），从 X_B^0 移动到 X_B^1 称为探测移动。$X_B^1-X_B^0$ 为有利方向。$\|X_B^1-X_B^0\|=\sqrt{2}h$。从 X_B^1 沿该有利方向走一步称为模向移动，取步长为 $\sqrt{2}h$，则从 X_B^0 出发总共移动距离为 $2\sqrt{2}h$，这时到达新的点 X^2。

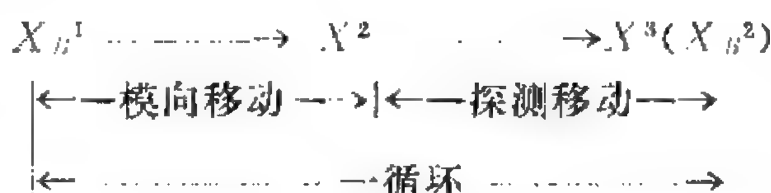
$$X^2=X_B^1+(X_B^1-X_B^0)$$

从 X_B^1 移动到 X^2，即沿有利方向加速移动，所以这一方法称为步长加速法。

如果 $X^2\neq X_B^0$，就可以进行一轮新的探测移动，以确定一个新的基点 $X_B^2(=X^3)$，否则说明 $X^2=X_B^0$，在 X_B^0 周围进行的以步长为 h 的探测移动均不成功，应当减小步长，在 X_B^0 附近再

作探测移动。

图 5—23 所示的例子中，X_B^1 到 X^2 的模向移动和从 X^2 探测移动到 X_B^2 都是成功的。从 X_B^1 到 X_B^2 称为一个循环，经历了两个阶段，即模向移动（沿有利方向加速）和探测移动（找新的有利方向）。



从 X_B^2 沿 $X_B^2-X_B^1$ 这一有利方向进行模向移动，得 X^4。从 X_B^1 到 X^4 总的移动距离为 $4\sqrt{2}h$。

$$X^4 = X_B^2 + (X_B^2 - X_B^1)$$

在 X^4 周围重新开始探测过程，如此反复进行下去，直到达到一个新的基点 X_B^k，若 $f(X_B^k) \geqslant f(X_B^{k-1})$，则应回到 X_B^{k-1}，从该点重新探测移动，若探测移动成功，就重新进行另一模向移动与探测移动（即新的循环），否则减小步长 h，（例如取 $\frac{h}{2}$），在 X_B^{k-1} 周围再作探测移动。当 h 减小到小于某个预定的值时，可认为已达最优点，算法终结。

由图 5—23 这一例子可见，从 X_B^2 经 X_B^3 到 X^6 总共移动 $6\sqrt{2}h$，这个移动是成功的，从 X_B^3 到 X_B^4 移动了

$$\sqrt{(\sqrt{2}h)^2 + (3\sqrt{2}h)^2} = 2\sqrt{5}h,$$

这是一个有利方向，可是沿该方向作模向移动到 X^7，（从 X_B^3 到 X^7 总移动距离为 $4\sqrt{5}h$），目标函数值又上升了，说明这一步模向搜索失败，应退回到 X_B^4，重新进行探测。

步长加速法需要做大量的函数值计算，但这种方法编程序容易，又可靠，这种方法的主要缺点是不能根据实际情况改变搜索方

向，和下章将说明的最速下降法相似，因此收敛速度较慢。

§ 5-8 共 轭 方 向 法

坐标轮换法和步长加速法都要经过很多次迭代才能找到函数的无约束极小值点。而 Powell 1964 年提出的共轭方向法是一种有效的算法，可以在有限步内找到 E^n 内二次函数的极小值点。对于非二次目标函数，只要它具有连续二阶导数，用这种方法也是有效的。这是因为在极值点附近目标函数都可用二次函数近似。

共轭方向法是以共轭方向为基础，迭代过程中通过一维搜索找到共轭方向，再沿共轭方向前进可以很快找到极值点。

我们先说明共轭方向的意义。

如果两个 n 维向量 X 与 Y 相互正交，见图 5—24，则其内积 $X^TY=0$，也可写成 $X^TIY=0$，I 为 n 阶单位阵。于是我们可以称 X 与 Y 关于单位阵共轭，记作

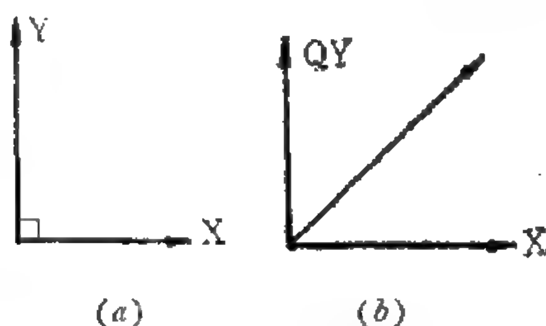


图 5—24 共轭方向

$X^TY=0$ 与 $X^TQY=0$

$$\left.\begin{aligned}(X,\ Y)=0\\ \text{或}\ (X,\ IY)=0\end{aligned}\right\} \tag{5—24}$$

设有 n 阶对称阵 Q，如果 $X^TQY=0$ 成立，即 X 与 QY 相互正交，则称 X、Y 关于 Q 互为共轭或 X 与 Y “Q 共轭”，记作

$$(X,\ QY)=0 \tag{5—25}$$

两向量互为正交是向量互为共轭的特殊情况。由线性代数我们

已知，如果方阵 Q，存在下述关系：$QX=\lambda X$，$X\neq 0$，λ 为标量，则称 λ 为 Q 的特征值，相应的特征向量为 X。

若 Q 为对称正定阵，X、Y 为 Q 的特征向量，则 $(X,Y)=0$，或 X，Y 相互正交，由于

$$(Y,QX)=(Y,\lambda X)=\lambda(Y,X)=0 \qquad (5-26)$$

因此正定阵 Q 的特征向量 X、Y 对 Q 相互共轭，给定一个正定阵，就一定至少有一组向量互为 Q 共轭。共轭方向算法就是利用一组互为共轭的向量，进行一维搜索，以求目标函数的极小值。

设有二次函数 $f(X)=K+C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$，如图 5—25。在初始点 X^0 做 $f(X)$ 的切线向量 Y。设最优点为 X^*，则连接 X^0 与 X^* 的向量

$$X^0-X^*$$

与切线 Y "Q 共轭"。

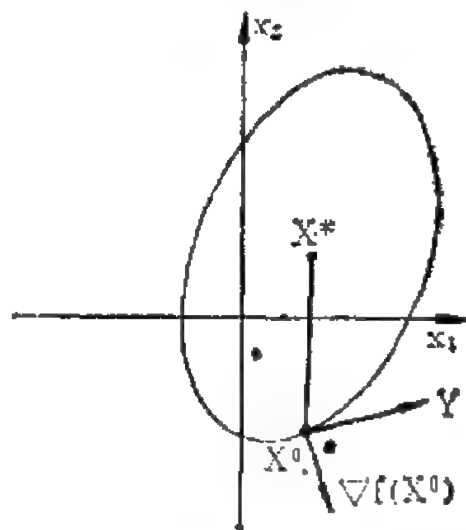


图 5—25 二次函数中的共轭方向

这一点可证明如下：

在最优点，$\nabla f(X^*)=0$，

$$C+QX^*=0,\quad X^*=-Q^{-1}C。\qquad (5-27)$$

在 X^0 点的梯度

$$\nabla f(X^0)=C+QX^0$$

切线向量 Y 与梯度向量 $\nabla f(X^0)$ 互为正交，

$$(Y,\ \nabla f(X^0))=0$$

而 $$X^0-X^*=X^0+Q^{-1}C$$

即 $$Q(X^0-X^*)=QX^0+C=\nabla f(X^0)$$

显见 Y 与 $Q(X^0-X^*)$ 互为正交，

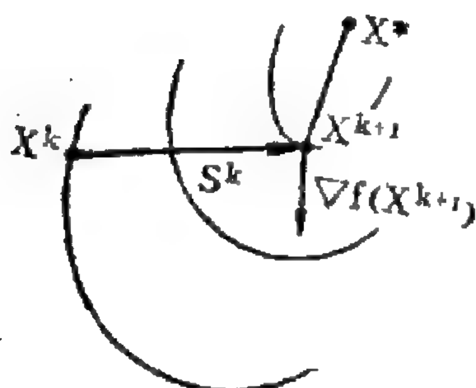
$$(Y,\ Q(X^0-X^*))=0 \tag{5—28}$$

即 Y 与 X^0-X^* "Q 共轭"。

上述性质表明，如果对二次函数 $f(X)=C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$，从某点出发，沿共轭方向搜索，可以很快得到函数的极值点。

如果从 X^k 出发，沿 S^k 方向，通过一维搜索到达一个局部极小点 X^{k+1}，如图 5—26，则 S^k 即为切线，与 X^{k+1} 点相切，故 $(S^k,\ \nabla f(X^{k+1}))=0$，因而

$$(S^k,\ Q(X^{k+1}-X^*))=0$$



S^k 与 $(X^{k+1}-X^*)$ "Q 共轭"

图 5—26

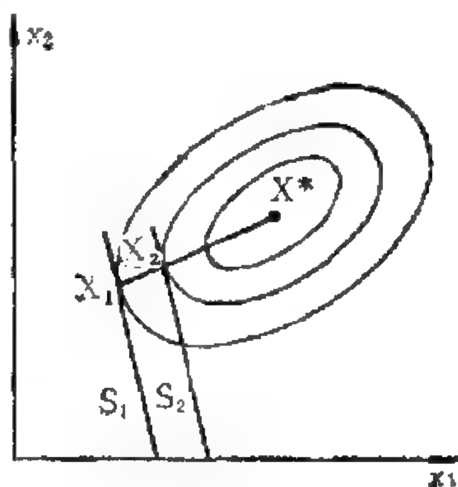


图 5—27　共轭方向的性质

由上述可知：如果从不同初始点出发，沿同一方向 S（$S_1=S$，$S_2=S$）通过一维搜索得到 X_1 及 X_2 两点，X_1 及 X_2 连线通过 X^*，如图 5—27，则向量 X_2-X_1 对 S 是互为共轭的，$(S,\ Q(X_2-X_1))=0$，共轭方向法就是要在搜索过程中找到 S^k 的共轭方向，于是沿共轭方向可以一步到达极值点。

我们先以一个简单例子说明共轭方向算法。

［例］　$f(X)=60-10x_1-4x_2+x_1^2+x_2^2-x_1x_2$

$$=60-C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$$

$$C=[10,\ 4]^T,\qquad Q=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

该函数的最优点 $X^*=[8,\ 6]^T$， $f(X^*)=8$。

设初始点为 $X^0=[0,\ 0]^T$，$f(X^0)=60$，

共轭方向法寻优是进行若干步迭代计算，每步进行 $n+1$ 次一维搜索。本例中 $n=2$，每步共进行三次一维搜索。

一、第一步迭代

令 $X_0{}^1=X^0=[0,0]^T$，右上标为第一步，右下标为该步迭代次数。

1． 沿 x_2 坐标方向，即 $S_1{}^1=[0,1]^T$，从 $X_0{}^1$ 到达 $X_1{}^1$ 进行一维搜索求最优步长。

$$X_1{}^1=X_0{}^1+\alpha_1S_1{}^1=[0,0]^T+\alpha_1[0,1]^T=[0,\alpha_1]^T$$

$$f(X_1{}^1)=60-4\alpha_1+(\alpha_1)^2$$

求 $\min\limits_{\alpha_1} f(X_1{}^1)$

$\dfrac{df}{d\alpha_1}=0$，求得 $\alpha_1{}^*=2$。

于是 $X_1{}^1=[0,2]^T$，$f(X_1{}^1)=56$。

2． 沿 x_1 坐标方向，即 $S_2{}^1=[1,0]^T$，从 $X_1{}^1$ 到达 $X_2{}^1$ 进行一维搜索求最优步长。

$$X_2{}^1=X_1{}^1+\alpha_2S_2{}^1=[0,2]^T+\alpha_2[1,0]^T=[\alpha_2,2]^T$$

$$f(X_2{}^1)=(\alpha_2)^2-12\alpha_2+56$$

求 $\min\limits_{\alpha_2} f(X_2{}^1)$

$\dfrac{df}{d\alpha_2}=0$，得 $\alpha_2{}^*=6$.

$$\therefore\quad X_2{}^1=[6,\ 2]^T,\quad f(X_2{}^1)=20。$$

3． 沿 $X_2{}^1-X_0{}^1$ 方向搜索

$$S_3{}^1 = \frac{X_2{}^1 - X_0{}^1}{\|X_2{}^1 - X_0{}^1\|}$$

为单位方向向量。

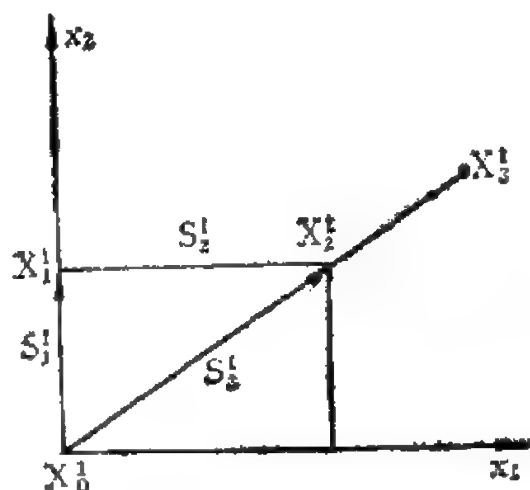


图 5—28　共轭方向算法举例
（第一步迭代）

$$S_3{}^1 = \frac{[6,2]^T - [0,0]^T}{\sqrt{36+4}}$$

$$= \left[\frac{6}{\sqrt{40}},\ \frac{2}{\sqrt{40}}\right]^T$$

$$X_3{}^1 = X_2{}^1 + \alpha_3 S_3{}^1$$

$$= [6,2]^T + \alpha_3\left[\frac{6}{\sqrt{40}}, \frac{2}{\sqrt{40}}\right]^T$$

$$= \left[6 + \alpha_3\frac{6}{\sqrt{40}},\quad 2 + \alpha_3\frac{2}{\sqrt{40}}\right]^T$$

$$f(X_3{}^1) = 60 - 60\left(1 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{40}}\right) - 8\left(1 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{40}}\right)$$

$$+ 36\left(1 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{40}}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{40}}\right)^2 - 12\left(1 + \frac{\alpha_3}{\sqrt{40}}\right)^2$$

令　　$\frac{df}{d\alpha_3} = 0$，　$\alpha_3 = \frac{3\sqrt{10}}{7} = 1.354$

$$X_3{}^1 = [7.286,\quad 2.429]^T$$

第一步迭代到此结束。注意 $S_1{}^1$，$S_2{}^1$，$S_3{}^1$ 三个搜索方向是线性独立的。

二、第二步迭代

1．以前一步终点 $X_3{}^1$ 为第二步起点，即令

$$X_0{}^2 = [7.286,\ 2.429]^T$$

按坐标轮换法应该沿 x_2、x_1 坐标方向 $[0,1]^T$ 及 $[1, 0]^T$，进行第二轮搜索。按共轭方向法，第二轮搜索方向 S_1^2，先沿 x_2 坐标即 S_1^1 方向搜索 $S_1^2=S_1^1$，得最优步长，再令 $S_2^2=S_3^1$，即沿着平行于 S_3^1 的方向搜索，得到 X_2^2 点，则连接 X_0^2 与 X_2^2的直线即 $X_2^2-X_0^2$ 的方向 S_3^2 与 S_3^1 “Q 共轭” （见图 5—29）。

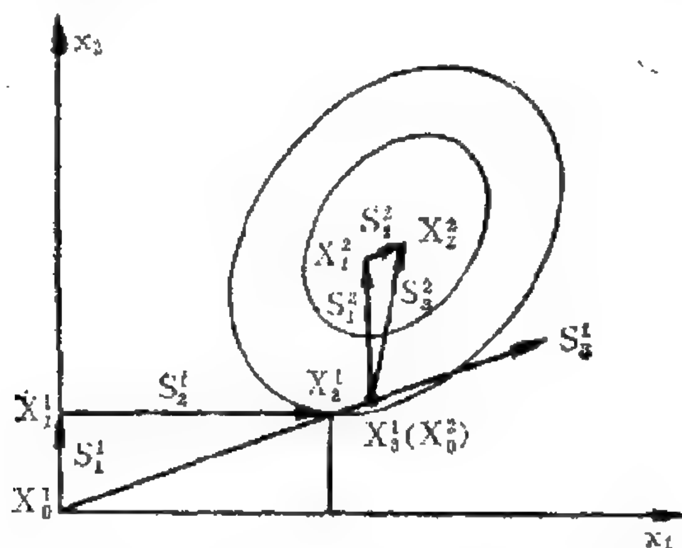


图 5—29 共轭方向算法举例，二次函数两步达最优

2. 从 X_0^2 出发沿 $S_1^2=S_1^1$ 方向，进行一维搜索，局部最优点为 $X_1^2=[7.286, 5.643]^T$。

3. 从 X_1^2 出发沿 $S_2^2=S_3^1$ 方向进行一维搜索，得局部最优点为 $X_2^2=[7.947, 5.872]^T$。

4. 沿 $S_3^2=\dfrac{X_2^2-X_0^2}{||X_2^2-X_0^2||}$ 方向进行一维搜索

$$S_3^2=\frac{[7.974,5.872]^T-[7.286,2.429]^T}{||X_2^2-X_0^2||}$$

$$=\frac{[0.688, 3.443]^T}{\sqrt{0.688^2+3.443^2}}$$

$$=\frac{[0.688, 3.443]^T}{3.511}=[0.196, 0.98]^T$$

得 $X_3^2=[7.999,\ 5.999]^T=X^*$

可见共轭方向法对二次二元函数，两步迭代计算即达最优点。

由共轭方向性质可知，S_3^1 与 S_3^2 关于 Q 共轭。我们来检验一下：

$$S_3^{1\,T}QS_3^2=\frac{1}{\sqrt{40}}[6,\ 2]\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.196\\ 0.98\end{bmatrix}$$

$$=[0.949,\ 0.316]\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.196\\ 0.98\end{bmatrix}$$

$$=0.31-0.31=0$$

的确是互为 Q 共轭的，这是因为 S_3^2 是沿着连接两条平行线的切点 X_0^2 和 X_2^2 联线的方向，由图 5—27 可知，S_3^2 一定与 S_3^1 "Q 共轭"，并指向最优点。应用共轭方向法时，应注意的是每步的三次搜索方向必须是独立的，否则可能经过任意次迭代仍不能到达极小值点。

本例中 $S_1^1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$S_2^1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，$S_3^1=\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$ 彼此线性无关。$S_1^2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$S_2^2=\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$，$S_3^2=\begin{bmatrix}0.196\\0.98\end{bmatrix}$，也是彼此线性无关的。

第二步迭代时，有一个坐标方向要用 S_3^1 代替，如何确定哪个坐标方向要更换，这由算法来保证。同样道理，n 维情况下，每步迭代都有一个坐标方向要被前一步 S^k_{n+1} 替换，而且每步迭代的 $n+1$ 个搜索方向应当是线性无关的。

n 维情况下，共轭方向算法步骤如下。

第一步。

1. 从 X^0 出发，沿 n 个线性独立的方向 e_n 进行一维搜索，

依次找出各方向最优步长 α^k ($k=1, 2, \cdots, n$)

$$X_k^1 = X^1_{k-1} + \alpha^k e_k \quad k=1, 2, \cdots, n$$

显然 $f(X^n)$ 应小于 $f(X^0)$

2. 求以上各 n 个点的目标函数值，比较相邻两点函数值的大小，用 △ 表示最大的差值

$$\triangle = \max_{1\leqslant k\leqslant n} [f(X^1_{k-1}) - f(X_k^1)]$$

$$= f(X^1_{m-1}) - f(X_m^1) \tag{5—29}$$

与 △ 对应的搜索方向为 e_m.

这一方向将于下一步迭代时舍弃。

3. 沿 $X_n^1 - X_0^1$ 方向继续向前搜索（如图 5—30），步长为

$\|X_n^1 - X_0^1\|$,

$$S = \frac{X_n^1 - X_0^1}{\|X_n^1 - X_0^1\|}$$

得：$X_n^1 + \|X_n^1 - X_0^1\| S$

$= 2X_n^1 - X_0^1$

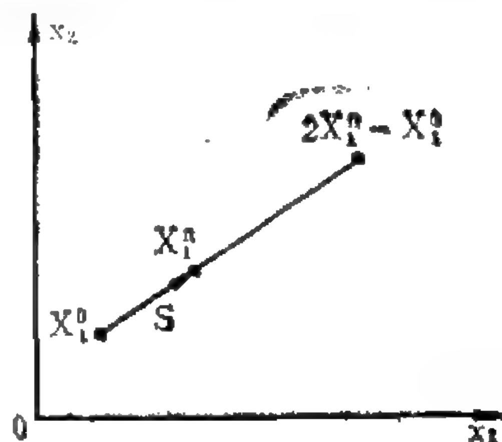


图 5—30 沿 $X_n^1 - X_0^1$ 方向搜索

（图中 X_1^n 应为 X_n^1

X_1^0 应为 X_0^1）

对应点的目标函数为：

$f_1 = f(X_0^1)$,

$f_2 = f(X_n^1)$,

$f_3 = f(2X_n^1 - X_0^1)$

4. 检验不等式

$f_3 \geqslant f_1$

$(f_1 - 2f_2 + f_3)(f_1 - f_2 - \triangle)^2 \geqslant 0.5(f_1 - f_3)^2 \triangle$

前例中，$\triangle = f(X_1^1) - f(X_2^1) = 56 - 20 = 36$,

$m=2$。

与 $\triangle$ 对应的搜索方向为 $e_2=S_2^1$（即例中的 $[1,0]^T$），应于第二步迭代时用 S_3^1 代替。

如果不等式成立，表示不应沿 S 方向延伸，则下一步迭代应以本步的 X_n^1 为初始点，按坐标轮换法沿各坐标进行搜索。

如果不等式不成立，表示可以沿 S 方向延伸，做第一步中最后一次迭代，$X^1_{n+1}=X_n^1+\alpha S$

$$\min_{\alpha} f(X_n^1+\alpha S)=f(X_n^1+\alpha^{n+1}S)$$

第一步迭代到此结束，经过沿 n 个坐标方向及沿 S 方向搜索（共 $n+1$ 次一维搜索），由 X_0^1 到达 X^1_{n+1}。X^1_{n+1} 为第一步搜索的最小点。

第二步。

1. 令 $X_0^2=X^1_{n+1}$，按 e_1，e_2，…，e_{m-1}，e_{m+1}，…，e_n 及 S 这 n 个方向进行迭代，这里用 S 代替了 e_m 方向（与上一次迭代中目标函数最大差值 $\triangle$ 的方向对应），S 方向搜索放在最后。得第二步的 n 次搜索最小点 X_n^2。重复以上各次迭代，最后沿

$$X_n^2-X_0^2=X_n^2-X^2_{n+1}$$

方向进行第 $n+1$ 次搜索。

$X_n^2-X_0^2$ 方向与 $X_n^1-X_0^1$ 方向关于 Q 共轭。

2. 收敛性检验判据为 $\|X_{n+1}-X_0\|\leqslant\varepsilon$。

X_{n+1} 及 X_0 为每步迭代的终点和始点。

或用目标函数值检验 $f(X_{n+1})-f(X_0)\leqslant\delta$。

如果是 n 维的一般函数，则在极小点附近，可用二次函数近似，因此上述共轭方向方法仍然可用。

正定二次函数，应用共轭方向算法，具有二次终结性质，所谓二次终结性质指的是：经过有限步迭代可以决定正定二次函数的极

小值。一般说，n 元二次函数，从任意的初始点 X^0 出发，经过 n 次迭代可得最优值，最大迭代次数为 n。

[例 1] $f(X)=1+x_1-x_2+x_1^2+2x_2^2$

由公式 $f(x_1,x_2)=K+dx_1+ex_2+cx_2^2+bx_1x_2+ax_1^2$

$$=K+[d,e]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}[x_1,x_2]\begin{bmatrix}2a & b\\b & 2c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \qquad (5\text{—}30)$$

可得

$$f(X)=1+C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$$

$$Q=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

令 $S_1=[1,0]^T$，$S_2=[0,1]^T$

$$S_1^TQS_2=[1,\ 0]\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$=[2,0]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=0$$

∴ S_1 与 S_2 互为 Q 共轭。

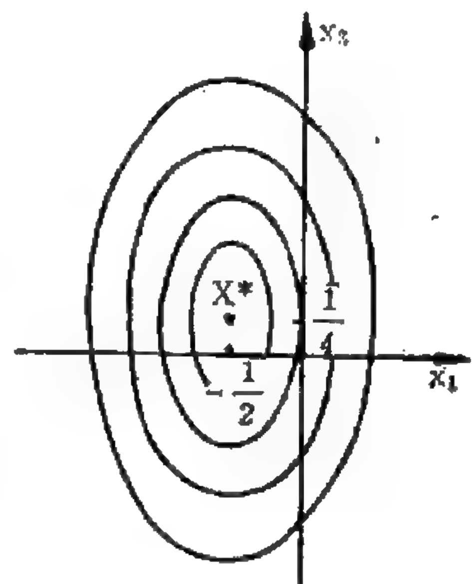
从 $[0,0]^T$ 出发，沿 S_1 方向做一维搜索得 $\alpha_1^*=-\frac{1}{2}$.

再沿 S_2 方向做一维搜索得

$$\alpha_2^*=\frac{1}{4},$$

$$X^1=X^0+\alpha_1S_1,$$

$$X^2=X^1+\alpha_2S_2,$$



$f(X)=1+x_1-x_2+x_1^2+2x_2^2$

图 5—31

或 $$X^2 = X^0 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \right]^T$$

它就是目标函数的极小值点

$$X^* = \left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \right]^T$$

（见图 5—31）。

[例 2] 求 $\min f(x_1,x_2) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1$

$$X^0 = [-2,\ 4]^T$$

第一步迭代：

沿 $S_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 方向一维搜索

$$\min_{\alpha_1} f(X_0^1 + \alpha_1 S_1^1) = \frac{3}{2}(-2+\alpha_1)^2 + \frac{16}{2} - 4(-2+\alpha_1) - 2(-2+\alpha_1)$$

$\alpha_1 = 4$ 为最优，∴ $X_1^1 = (2,\ 4)^T$

沿 $S_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向一维搜索

$$\min_{\alpha_2} f(X_1^1 + \alpha_2 S_2^1) = \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{1}{2}(4+\alpha_2)^2 - 2(4+\alpha_2) - 4$$

$\alpha_2 = -2$，　　$X_2^1 = [2,\ 2]^T$

∴ $$S_3^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{20}}$$

沿 S_3^1 方向一维搜索，得最优步长 $\alpha_3 = -\frac{2}{17}$

$$\therefore \quad X_3^1 = X_0^2 = \begin{bmatrix} 26/17 \\ 38/17 \end{bmatrix}$$

第二步迭代

$$S_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad S_2^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

取 $\min\limits_{\alpha_1} f(X_0^2 + \alpha_1 S_1^2) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{26}{17}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{38}{17} + \alpha_1\right)^2$

$$-\frac{26}{17}\left(\frac{38}{17} + \alpha_1\right) - \frac{52}{17}$$

得 $\alpha_1 = -\dfrac{12}{17}, \qquad X_1^2 = \left[\dfrac{26}{17}, \ \dfrac{26}{17}\right]^T$

$\min\limits_{\alpha_2} f(X_1^2 + \alpha_2 S_2^2) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{26}{17} + 4\alpha_2\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{26}{17} - 2\alpha_2\right)^2 -$

$$\left(\frac{26}{17} + 4\alpha_2\right)\left(\frac{26}{17} - 2\alpha_2\right) - 2\left(\frac{26}{17} + 4\alpha_2\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{-18}{289} \qquad \therefore \quad X_2^2 = \left[\frac{370}{289}, \ \frac{478}{289}\right]^T$$

$$S_3^2 = -\frac{1}{289}\begin{bmatrix} 72 \\ 168 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{72^2 + 168^2}},$$

求 $\min\limits_{\alpha_3} f(X_2^2 + \alpha_3 S_3^2)$, 得 $\alpha_3 = \dfrac{9}{8}$,

∴ $X_3{}^2=[1,\ 1]^T$，即最优解。

§5-9 单纯形法

单纯形法是一种多维直接搜索法，是求解非线性函数的无约束极值的一种经验方法。1962年由Spendley、Hext、Himsworth等人提出，1965年Nelder、Mead两人加以改进。

我们已知所谓单纯形指的是E^n中$n+1$个顶点的凸包。例如E^1中一个线段（有两个顶点），E^2中一个三角形，E^3中一个四面体等等（如图5—32）。单纯形法多维搜索寻优是利用单纯形的

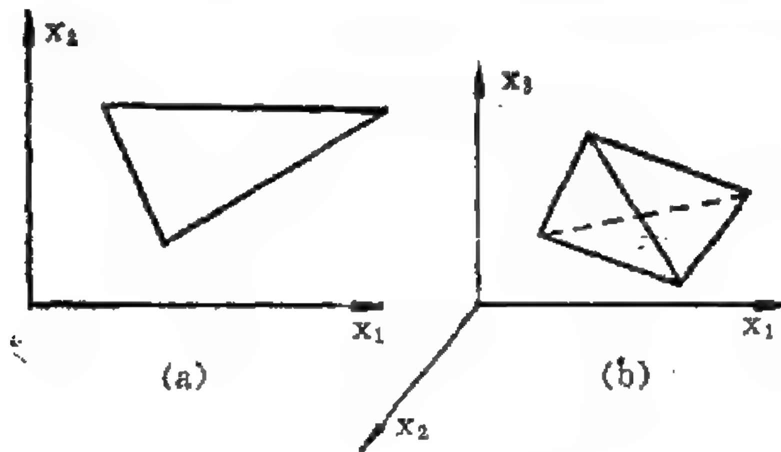


图5—32 单纯形

顶点，计算其函数值，按一定规则进行探测性搜索。对搜索区内单纯形顶点的函数值进行比较，判断目标函数的变化趋势，确定有利的搜索方向和步长。

二维单纯形是最简单的一种，下面以二维为例说明这一方法。

设有一个二元二次函数$f(X)=C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$，从初始点$X^0$开始进行搜索，我们应当先构造一个单纯形，令$a$点为初始点$X^0$，我们可以沿坐标方向按一定步长$\alpha$(一般取$\alpha\leqslant 2$)，取两点[注]

注：也可以取正单纯形，即各顶点间等距离。

$$X_b = X^0 + a[1,0]^T, \qquad X_c = X^0 + a[0,1]^T。$$

于是得到一个三角形 abc（即二维单纯形），如图 5—33。比较 abc 三点的目标函数值，函数值最高的点是最差点，记作 H，函数值最低的点为最好点，记作 L，介于 H 和 L 之间的点为中间点，记作 G，$f(X_H)>f(X_G)>f(X_L)$，如图 5—34，显然最差点 H 的反对称方向，目标函数值会有所改进，也即可以作为下一步的搜

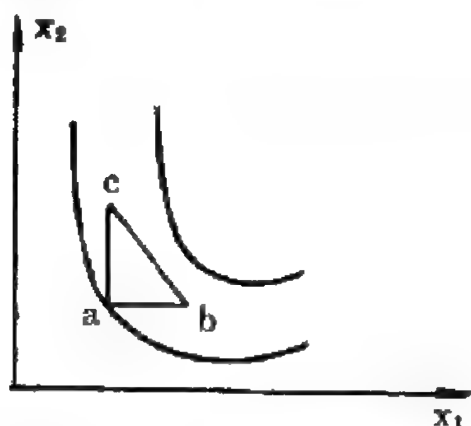


图 5—33 构造第一个单纯形

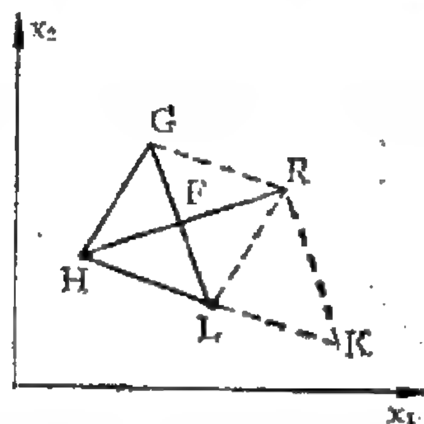


图 5—34 GRL 为 GHL 的反射单纯形

索方向。我们以 F 为中点作平行四边形，以求反对称点(反射点) R。将 H 去掉，得到新的二维单纯形 GRL，R 是 H 对 F 的反射点，F 是去掉 H 点以后余下各点 G 和 L 的“重心”。GRL 是 GHL 的反射单纯形。

取 $X_R = X_F + \gamma(X_F - X_H)$ (5—31)

γ 为反射系数，根据经验一般取 $\gamma = 1$。

故 $X_R = X_F + X_F - X_H = 2X_F - X_H$

下一步是对新单纯形的三个顶点 G、R、L 计算并比较其函数值。如果 $f(X_G)>f(X_R)>f(X_L)$，则应当求 G 点的反射点 K，形成新的单纯形 RLK，再做计算比较，直到最差点与最好点的函数值的差别小于给定的误差为止。

总之，单纯形法不必计算梯度，也不用按坐标方向进行一维寻优或按固定步长寻优，它是不断地进行顶点函数值的计算比较，然后用一个新的较好点代替原来的单纯形中较差的点。替换的方法除了反射以外，还有扩展和压缩，下面我们来讨论这些方法。

1. 三角形 HGL 中最差点 H 的反射点 R 求出以后，如果 $f(X_R)<f(X_L)$，即比原来最好点 L 的目标函数值还小，说明沿 FR 方向搜索是正确的，可以沿这个方向大步向前，因此得 E 点，如图 5—35。

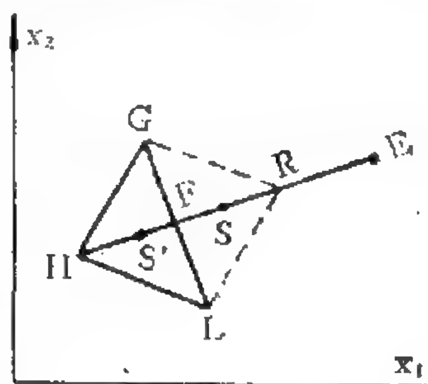


图 5—35 扩展点 E 与压缩点 S

取 $X_E=X_F+\alpha(X_F-X_H)$ (5—32)

α 为扩展系数（一般取 $\alpha>1$，例如 $\alpha=1.2\sim2$）。

若 $f(X_E)<f(X_R)$，表示向前扩展有利，用E代替 R，得新的单纯形EGL。

若 $f(X_E)>f(X_R)$，表示向前扩展不利，仍取单纯形 GRL。

2. 如果 $f(X_R)>f(X_G)$，即 R 点函数值比原单纯形中的中间值还差，表示 R 取得太远，应当沿 RF 方向压缩，设压缩到 S 点，见图 5—35。取

$$X_S=X_F+\beta(X_R-X_F) \qquad (5—33)$$

β 为压缩系数，一般 $0<\beta<1$，可取 $\beta=0.5$ 或 $0.25\sim0.75$。

3. 如果 R 点比原来最差点（H 点）还要差，$f(X_R)>f(X_H)$，则应压缩更多，新的点 S' 位于 HF 之间。令

$$X_{S'}=X_F-\beta(X_F-X_H)=X_F+\beta(X_H-X_F)$$

4. 如果沿 HR 方向所有各点 S 的函数值均比 H 点大，即 $f(X_S)>f(X_H)$，则说明不能沿 H 反射方向搜索，这时应进

行单纯形缩边，即以最好的点 L 为基点将 GHL 三角形缩小一半得 $G'H'L$，（图 5—36）。再以此新的单纯形用上述方法寻优。图 5—37 表示单纯形法寻优的例子。读者可顺着数码搜索一遍。

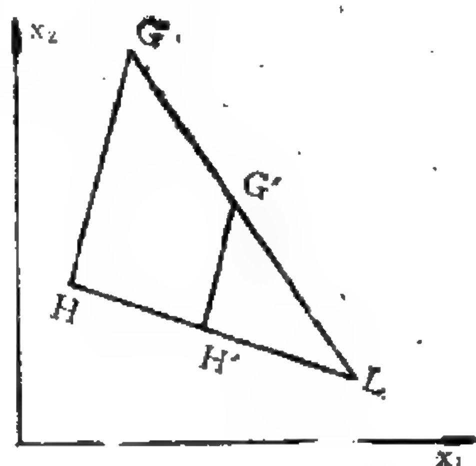


图 5—36　单纯形缩边

上述几种方法即扩展、压缩、单纯形缩边统称为单纯形加速，原则上同样适用于 n 维的情况，只是 n 维单纯形有 $n+1$ 个顶点，计算工作量更大。

每次迭代得到新的单纯形后都要进行收敛性检验，一种检验判据为

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[f(X_i)-f(X_F)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

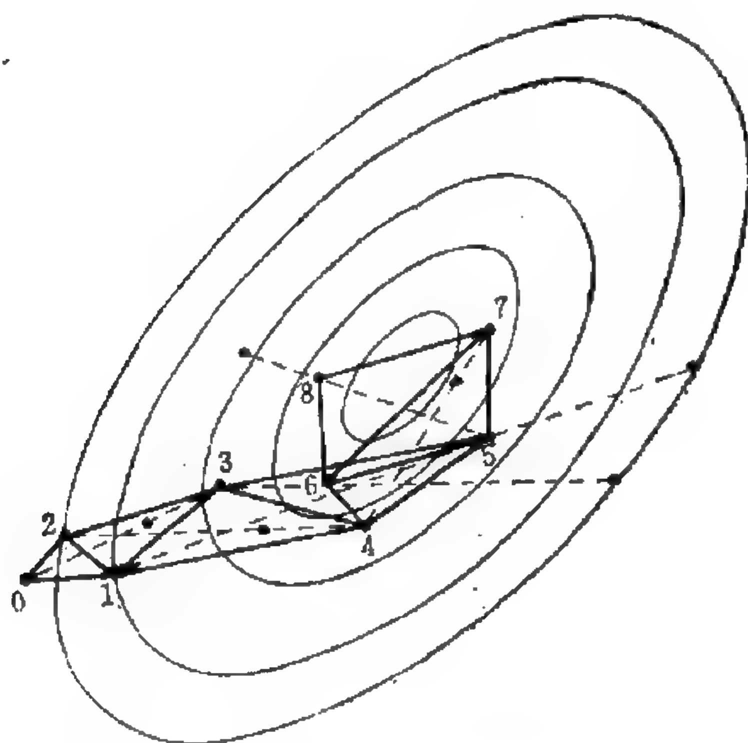


图 5—37　单纯形法举例

X_F 为除 X_H（最差点）以外其余 n 个点的"重心"。$\varepsilon>0$ 为预先给定的。

单纯形法也要经过很多次迭代，这种方法只适用于 $n<10$ 的情况。

n 维情况下单纯形法的计算步骤如下：

(1) 计算 $n+1$ 个单纯形顶点的函数值 $f(X_i)$，$i=0,1,\cdots,n$。比较各顶点函数值大小，决定最差点 H 与最好点 L。

$$f(X_H)=\max_i f(X_i),$$

$$f(X_L)=\min_i f(X_i)。$$

令次差的点为 G，$f(X_G)$ 为除 H 点以外其它 n 个函数值中的最大者。

(2) 计算除 H 点以外 n 个点的重心点 F，这 n 个点是 X_0，X_1，$\cdots X_{H-1}$，X_{H+1}，X_G，$\cdots$，X_n。

$$X_F=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(X_i-X_H)$$

求出反射点 R

$$X_R=X_F+\gamma(X_F-X_H)=2X_F-X_H \quad (\text{取 } \gamma=1)$$

(3) 若 $f(X_R)\geqslant f(X_G)$，进行压缩，令

$$X_S=X_F+\beta(X_R-X_F), \quad 0<\beta<1$$

转 (5)，否则，若 $f(X_R)<f(X_G)$，转 (4)。

(4) 进行扩展，令

$$X_E=X_F+\alpha(X_F-X_H), \quad \alpha>1$$

如果 $f(X_E)<f(X_R)$，令 $X_S=X_E$。

否则令 $X_S=X_R$。

(5) 若 $f(X_S)<f(X_G)$，将 H 换成 S，并和其它 n 个点构成新的单纯形，重新确定 H、L 和 G 点，并重复 (2) 及 (2) 以后各步，否则转 (6)。

(6) 进行缩小单纯形，令

$X_i=(X_i+X_L)/2$，i 表示除 L 点以外的各点。然后重新开始，直到满足判敛条件为止。

用单纯形法对下述试验函数进行计算的结果如下表。

$$f(X)=(x_1+10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4$$

最优点应为 $X^*=[0,0,0,0]^T$

设判敛条件为 $|f(X^{k+1})-f(X^k)|\leqslant 10^{-8}$

初始点 $(X^0)^T$	$f(X^0)$	$f(X^{k+1})$	迭代次数
[−0.1,0.1,0.1,0.1]	0.8261	0.34818×10^{-7}	111
[1, 1, 1, 1]	1220	0.110541×10^{-7}	142
[1, 5, −4, 4]	32292	0.619831×10^{-8}	145
[8, −5, 10, −9]	1229400	0.571952×10^{-8}	90
[5, −5, −5, −5]	102650	0.233178×10^{-7}	193

RD-11 小型机迭代 100 次约需 18 秒，程序见本书附录Ⅳ。采用正单纯形原则，即顶点间距离取为 1。

§ 5-10 随机搜索法

随机搜索法利用随机数寻求极小点。因为多数计算机程序库中有随机数发生器，所以应用这种方法是很方便的。下面介绍几种应用较多的随机搜索法。

一、随机跳跃

设问题是要求 $f(X)$ 的极小值，$X \in E^n$，

$$l_i \leqslant x_i \leqslant u_i, \quad i=1,2,\cdots,n$$

式中 l_i 及 u_i 为变量 x_i 的上下限。

应用随机跳跃法，首先产生若干组随机数 r_1，$r_2,\cdots,r_n$，这 n 个数在 0 和 1 之间均匀分布。应用每组随机数求 X：

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_1+r_1(u_1-l_1) \\ l_2+r_2(u_2-l_2) \\ \vdots \\ l_n+r_n(u_n-l_n) \end{pmatrix}$$

并计算 $f(X)$，这样我们可以得到许多点及相应的目标函数值，取

随机数		变量		目标函数
r_1	r_2	$x_1=-10+20r_1$	$x_2=-10+20r_2$	$f(X)$
0.12606	0.63946	−7.47887	2.78913	67.65904
0.42469	0.84082	−1.50612	6.81649	22.14585
0.33082	0.86722	−3.38357	7.34448	16.40928
0.29605	0.69995	−4.07908	3.99909	8.56712
0.47964	0.51831	−0.40723	0.36612	−0.60582
0.42872	0.60919	−1.42552	2.18379	−1.00223
0.43523	0.57343	−1.29534	1.46852	−1.05596
0.43380	0.59430	−1.32398	1.88601	−1.14119
0.44137	0.58901	−1.17266	1.78015	−1.20863
0.44690	0.57240	−1.06193	1.44792	−1.23317
实际最优解		−1.00000	1.50000	−1.25000

最小的 $f(X)$ 就是所求的最优值。

[例] 用随机跳跃法求

$$\min \quad f(X)=x_1-x_2+2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

设 $-10\leqslant x_i\leqslant 10$, $i=1, 2$。

解：一部分随机数、相应的变量值和目标函数值见前页的表（共产生了 10000 组随机数）。

虽然随机跳跃法非常简单，但对变量数很多的问题并不实用。只有当不考虑计算效率时才应用这一方法。更有效的方法是随机走步法。

二、随机走步法

这一方法的基本思想是产生点列 X^1, $X^2,\cdots X^k,\cdots$, 第 $k+1$ 步得到的点由第 k 步得到的点修正产生：

$$X^{k+1}=X^k+\lambda U^k$$

λ 为步长(标量)，U^k 为第 k 步产生的单位随机向量，单位随机向量的定义为

$$U=\frac{1}{\sqrt{r_1^2+r_2^2+\cdots+r_n^2}}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad \|U\|=1$

式中 $r_1, r_2,\cdots, r_n$ 为区间 $[-1, 1]$ 内的一组随机数。

具体步骤如下

1. 从初始点 X^0 开始，函数值 $f_0=f(X^0)$。
2. 迭代次数 $k=1$。
3. 产生一组随机数（n 个），形成单位随机向量 U。
4. 设定初始步长 λ，求新的目标函数值 $f(X^0+\lambda U)=f_1$。
5. 比较 f_0 与 f_1，若 $f_1<f_0$，令 $X^0=X^0+\lambda U$，$f_1=f_0$，

重复第 3~5 步。若 $f_1 \geq f_0$，重复第 3~5 步。并令 $k=k+1$。

6. 如果迭代次数已经很大，还不能得到较好的点，则减少步长 λ，令 $\lambda=\frac{\lambda}{2}$，回到第 3 步。

7. 如果到第 k 步，步长 λ 已减少到小于 ε（ε 为很小的正数），但是还不能改善函数值，则取 X^k 作为最优点，并且停机。

[例] $\min f(X)=x_1-x_2+2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

设初始点 $X^0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，初始步长 $\lambda=1.0$，并取 $\varepsilon=0.05$，迭代次数 $N=100$。

解：下表列出一部分计算数据

步　长	$X^0+\lambda U$ 的分量		$f_0=f(X^0+\lambda U)$	注
1.0	−0.93696	0.34943	−0.06329	
1.0	−1.15271	1.32588	−1.11986	以后 100 次迭代未能减少函数值
0.5	−1.34261	1.78800	−1.12884	
0.5	−1.07318	1.36744	−1.20232	同上
0.25	−0.86419	1.23025	−1.21362	试验 4 次
0.25	−0.86955	1.48019	−1.22074	试验 2 次
0.25	−1.10661	1.55958	−1.23642	试验 8 次
0.25	−0.94278	1.37074	−1.24154	试验 30 次
0.25	−1.08729	1.57474	−1.24222	试验 6 次
0.25	−0.92606	1.38368	−1.24274	试验 50 次
0.25	−1.07912	1.58135	−1.24374	以后 100 次迭代未能减少函数值
0.125	−0.97986	1.50538	−1.24894	同上
0.0625				100 次迭代未能减少函数值
0.03125				$\lambda<\varepsilon$，$\varepsilon=0.05$ 停机

最优点 $X^*=\begin{bmatrix}-0.97986\\1.50538\end{bmatrix}$, $f(X^*)=-1.24894$。

实际最优点 $X^*=\begin{bmatrix}-1\\1.5\end{bmatrix}$, $f(X^*)=-1.25$。

三、随机走步法的改进

前面所述的随机走步法采用固定步长。如果沿某一单位随机方向 U^k，试验是成功的（即目标函数值减少），我们可以继续利用这一方向，或者沿该方向加大步长进行搜索，或者求最优步长，

令
$$f_{k+1}=f(X^k+\lambda_k^* U^k)=\min_{\lambda_k} f(X^k+\lambda_k U^k)$$

则
$$X^{k+1}=X^k+\lambda_k^* U^k$$

这样就改进了随机走步法。

四、随机搜索法的优点

1．即使目标函数在某些点是不连续的和不可求导的，随机搜索法仍可应用。

2．当目标函数有若干个局部极小点时，随机搜索法可用以求全局极小点。

3．由于目标函数急剧变化以及其它原因使各种寻优方法均失败时，随机搜索法仍可应用。

4．随机搜索法可应用于最优化问题求解过程中的早期阶段以确定全局极小值所在的范围，一旦找到这一范围，则可用其它更有效的方法精确确定全局最优点。

小　　结

1．一维搜索可用插值法或区间消去法。区间消去法中有

Fibonacci 法和 0.618 法，两者均可应用于不连续函数的最优值搜索，方法简单。二次插值法比 Fibonacci 法更为有效，三次插值法虽然收敛性好，但是要计算函数的导数，比较复杂。

2. 只需要计算函数值的爬山法是一种较简单的多维寻优方法，对一个函数了解得越多，就可以得出寻优的更有效算法，但是为了得到更多的关于目标函数的信息，却需要大量计算工作（如梯度、二阶梯度等），工作量太大时，我们宁愿要一些效率较低而计算量较少的算法。

3. 爬山法中最有效的是具有遵循脊线搜索性质的算法，如步长加速法、单纯形法等，这些都属于经验法。共轭方向法比各种经验法优越，它具有二次收敛性质。

4. 应用爬山法时，如果对目标函数进行一定的处理，如设法消去变量间的相互影响（用 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ 的形式），选择变量使目标函数等高线(面)近似为圆(或球面)，用近似的二次型代替原函数等等都可以显著减少搜索计算工作量和迭代次数。一般处理得好，计算函数值次数约与独立变量数 n 成正比，弄得不好，可能会达到 n^2。

习 题

1. a、比较 Fibonacci 法和 0.618 法在 10 次迭代以后的 $\frac{L_k}{L_0}$。

b、设要求 $\delta=\frac{L_k}{L_0}\leqslant 3\%$，求上述两种方法的迭代次数。

2. 用 Fibonacci 法对 $f(X)=(x-5)^2$ 极小值搜索三次。

设 $L_0=(0，12)$，计算每次搜索的 λ_1、λ_2 及 $f(\lambda_1)$、$f(\lambda_2)$，L_k。

[注]：如果出现 $f(\lambda_1)=f(\lambda_2)$，则可取 $\lambda_2\pm\varepsilon$ 作为一个边界点，$\varepsilon=0.01$。

注意：迭代公式中 F_{n-k} 下标 $n=k+1$。

3． 用抛物线插值法求 $\min f(x)=e^x-15x$（一次迭代）。

设取 $x_a=1$，$x_b=2$，$x_c=3$，将求得结果与实际极小值 x^* 进行比较。

4． 已知 $f(X)=2x_1^2+6x_2^2+2x_1x_2+2x_1+3x_2+3$

写成标准二次函数 $K+C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$。

设向量 $P_1=(1,0)^T$，求与 P_1 互为 Q 共轭的方向。

5． 用共轭方向法求 X^TQX 极小值。

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad X^0=(1,\ \tfrac{1}{2})^T$$

证明第一次沿（-1，0）方向搜索，第二次沿 Q 共轭方向搜索就能在（0，0）处得极小值。

第六章　多维无约束最优化问题的数值计算法（以梯度法为基础的方法）

本章介绍的数值计算方法求解无约束最优化问题，不但要计算目标函数值，而且要计算目标函数的一阶或高阶导数，因此都是以梯度法为基础的，其中包括最速下降法、拟牛顿法、共轭梯度法及变尺度法等等。最后再介绍高斯-牛顿最小二乘法。因为求出了目标函数的梯度以后，使求解问题时已知的信息更多，因而这类方法比直接搜索法更为有效。

§6-1 最速下降法（最优梯度法）

最速下降法是应用目标函数的负梯度方向作为每步迭代的搜索方向。按负梯度方向搜索函数极值的方法早在1847年就已由Cauchy提出。应用最速下降法迭代计算时，每步都是沿负梯度方向取最优步长，因而这种方法也可称为最优梯度法。应用这一方法，使得目标函数值在开头几步下降最快。最速下降法比较简单，但它只用了一阶梯度的信息以确定下一步搜索方向，因此收敛较慢，越是接近极值点收敛越慢，这是它的主要缺点。因而人们后来又发展了许多收敛较快的算法，如共轭梯度法、变尺度法等等。但是最速下降法是许多有约束和无约束最优化方法的基础。而且在开头几步应用这一方法常常是很有效的。下面先介绍这种方法的基本概念。

一、梯度和梯度方向

一个非线性函数 $f(X)$ 的梯度定义为

$$\nabla f(X)=\frac{\partial f}{\partial X}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T \qquad (6-1)$$

这是一个 n 维向量。

最速下降法是以负梯度方向作为搜索方向的，令梯度向量 $P=\nabla f(X)$，梯度方向的单位向量为

$$S=\frac{\nabla f(X)}{\|\nabla f(X)\|}=\frac{P}{\|\nabla f(X)\|} \qquad (6-2)$$

梯度方向 S 也就是函数的法线方向（如图 6—1）。负梯度方向为 $-S$。

$\|\nabla f(X)\|$ 为梯度 $\nabla f(X)$ 的范数，

$$\|\nabla f(X)\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{2x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}$$

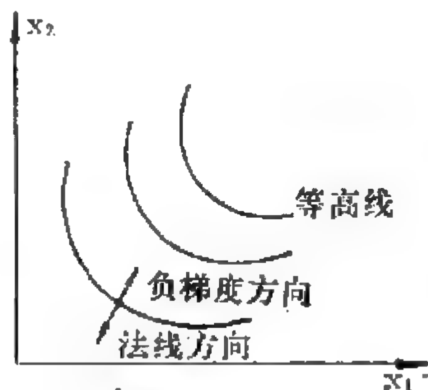
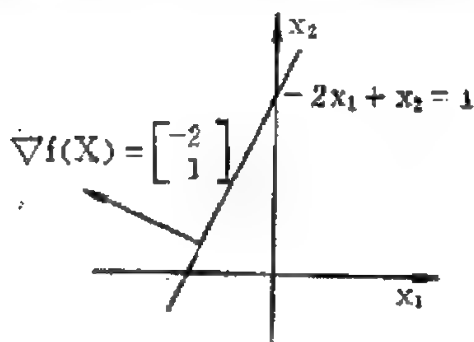
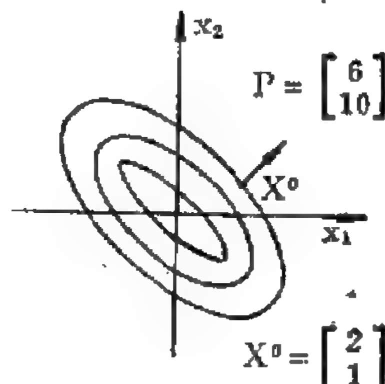


图 6—1 函数的负梯度方向

因为梯度与函数的等高线是相互垂直的，因此沿梯度方向 $f(X)$ 值增长最快，反之沿负梯度方向 $f(X)$ 值下降最快。





(a) $f(X)=-2x_1+x_2$　　(b) $f(X)=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2$

图 6—2 梯度方向

[例 1]

$$f(X)=-2x_1+x_2=[-2,\ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=C^TX$$

梯度 $\nabla f(X)=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$，$\|\nabla f(X)\|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$

梯度方向单位向量

$$S=\frac{\nabla f(X)}{\|\nabla f(X)\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

显然梯度垂直于直线函数 $f(X)$，见图 6—2a。

[例 2] 求函数 $f(x_1,x_2)=x_1{}^2+2x_1x_2+3x_2{}^2$ 在 $X^0=(2,1)^T$ 点的梯度

$$\nabla f(X)=\begin{bmatrix}2x_1+2x_2\\2x_1+6x_2\end{bmatrix}$$

在 $X^0=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$点，$\nabla f(X)_{X^0}=\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}$，$\|\nabla f(X_0)\|=\sqrt{136}$，

梯度方向 $P=\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}$，图 6—2$b$ 中画出了该梯度方向向量。梯度方向单位向量为

$$S=\frac{1}{\sqrt{136}}\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}。$$

对非线性函数，某点梯度方向与该点切线相垂直，在 X^k 点，函数梯度为 $\nabla f(X^k)$，该点的单位梯度方向为 $S^k=\frac{\nabla f(X^k)}{\|\nabla f(X^k)\|}$。不同点的梯度方向是不同的。

下面列出几种常用函数的梯度公式：

(1) $f(X)=C^TX$

$$\nabla f(X)=C$$

(2) $f(X)=X^TX$

$$\nabla f(X)=2X$$

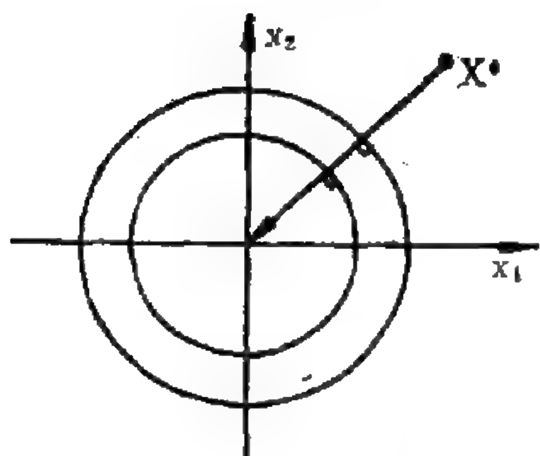
(3) $f(X)=\frac{1}{2}X^TQX$，Q 为实对称矩阵。

$$\nabla f(X)=QX$$

(4) $f(X)=K+C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$，$C$ 为常向量，K 为常数，Q 为实对称阵

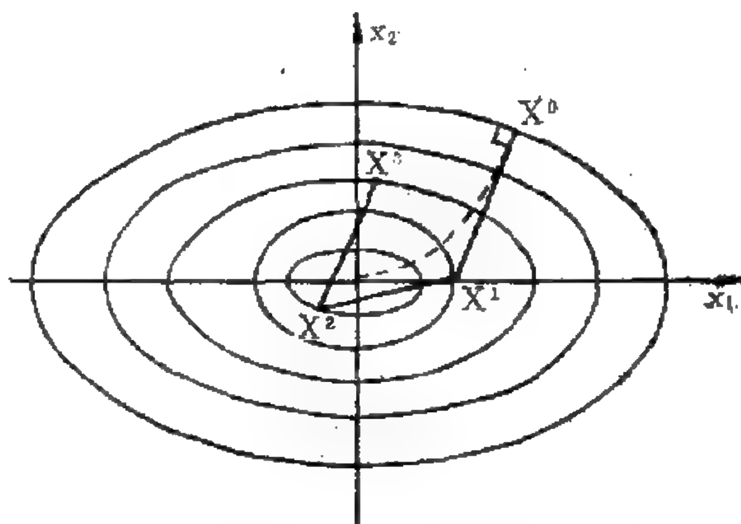
$$\nabla f(X)=C+QX$$

二、最优梯度



沿圆的负梯度方向一步达最优

图 6—3



任意二次函数固定步长沿负梯度方向迭代

图 6—4

如果函数的等高线为圆，则半径与各等高线是垂直的，也即半径方向就是梯度方向，从任一点 X^0 出发（如图 6—3），沿负梯度方向，选择合适的步长，一步可达最优点。第 $k+1$ 次迭代时

$$X^{k+1}=X^k+\lambda\nabla f(X^k)=X^k+\lambda P^k \qquad (6\text{—}3)$$

上式表示从 X^k 点出发沿梯度方向，取步长参数为 λ，下一步可到

达 X^{k+1}。(求极小值时 λP^k 为负,求极大值时 λP^k 为正)。

(6—3) 式也可以写成

$$X^{k+1}=X^k+\alpha\frac{\nabla f(X^k)}{\|\nabla f(X^k)\|}=X^k+\alpha S^k \tag{6—4}$$

步长 $\alpha=\lambda\|\nabla f(X^k)\|$,求极小值时 αS^k 为负。

S^k 为(从 X^k 出发的)单位梯度方向,称为搜索方向。

对于任意二次函数,设 $f(X)=x_1^2+2x_2^2$,如果选固定步长参数,例如,$\lambda=4$,从 $X^0=[4,\ 4]^T$ 开始,走了 3 步以后,目标函数值反而上升(见图 6—4),这一例子启发我们,沿负梯度方向搜索函数最优值,当远离最优点时,步长要大,当接近最优点时,步长应当减少。

1. 最速下降法(最优梯度法)

沿着负梯度方向选择步长使搜索步数为最小的方法称为最速下降法(最优梯度法)。这种方法要求每步计算一次最优步长,使每走一步目标函数下降最多,显然用最优梯度法计算,工作量要大,比固定步长增加了一维寻优的过程。

由 (6—4) 式可得

$$f(X^{k+1})=f(X^k+\alpha S^k) \tag{6—5}$$

沿着 S^k 方向求使 $f(X^{k+1})$ 为最小的步长 α^k,

$$\min_{\alpha} f(X^{k+1})=\min_{\alpha} f(X^k+\alpha S^k)=f(X^k+\alpha^k S^k) \tag{6—6}$$

$$X^{k+1}-X^k=\triangle X^k=\alpha^k S^k \tag{6—7}$$

求最优步长时,是对函数 $f(X^{k+1})$ 求极小,步长 α 为变量,因此这是一维搜索问题,可以用上一章讲的任一种一维搜索方法计算。

[例] 函数 $f(X)=x_1^2+25x_2^2$,求 $\min f(X)$

用最优梯度法求最优步长。

设 $X^0=[2,\ 2]^T$，$\nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}2x_1\\50x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\100\end{bmatrix}$，$f(X^0)=104$

$$X^1=X^0+\alpha S^0,$$

$$S^0=\frac{\nabla f(X^0)}{\|\nabla f(X^0)\|}=\frac{(4,100)^T}{\sqrt{4^2+100^2}}=[0.03997,0.999]^T$$

$$x_1\cong 2+0.04\alpha,\quad x_2\cong 2+\alpha$$

$$f(X^1)=(2+0.04\alpha)^2+25(2+\alpha)^2$$

显见这是单变量函数，现在用解析法求 $f(X^1)$ 极小的条件：

$$\frac{df(X^1)}{d\alpha}=0,\quad 2(2+0.04\alpha)0.04+50(2+\alpha)=0$$

最优步长 $\alpha^*=\alpha^0=2.003$，由 $X^1=X^0-\alpha^0S^0$，

可得 $X^1=[1.92,\ -0.003]^T$

从 $[2,2]^T$ 出发，沿 $-S^0$ 方向走一步，选最优步长 $\alpha^0=2.003$ 则达到新的点 X^1。$f(X^1)=3.69$。

由此可见，目标函数值原为 $f(X^0)=104$，沿 $-S^0$ 方向走一步降到 $f(X^1)=3.69$，下降甚速。

下表列出迭代三步的计算结果。

	x_1	x_2	$f(X^k)$
初始点	2	2	104
$\alpha^0=2.003$	1.92	-0.003	3.69
$\alpha^1=1.85$	0.07	0.07	0.13
$\alpha^2=0.07$	0.07	0	0.0049

按固定步长 $\alpha=1$，则用下降法迭代五步的计算结果如下表

k	x_1	x_2	$\nabla f(X^k)^T$	$f(X^k)$
0	2	2	[4,100]	104
1	1.96	1	[3.92,50]	28.8416
2	1.88	0	[3.76,0]	3.5344
3	0.88	0	[1.76,0]	0.7744
4	−0.12	0	[−0.24,0]	0.0144
5	0.88	0	[1.76,0]	0.7744

可见按固定步长，若步长 α 取得小，收敛慢，计算次数多。但若 α 取得大，则在极值点附近来回振荡，而最优梯度法收敛较快，三步即接近极值点。

2．最优步长的确定

对于任意函数 $f(X)$ 在 X^k 点展开成泰勒级数，取二次近似可得

$$f(X^{k+1})=f(X^k)+\nabla^T f(X^k)\triangle X+\frac{1}{2}\triangle X^T A\triangle X \quad (6\text{—}8)$$

$$\triangle X=X^{k+1}-X^k$$

式中 $A=\nabla^2 f(X^k)$ 为 Hesse 阵

令 $X^{k+1}=X^k+\alpha S^k$，$\triangle X=\alpha S^k$，S^k 为单位向量， 代入得

$$f(X^k+\alpha S^k)=f(X^k)+\nabla^T f(X^k)\alpha S^k+\frac{1}{2}(\alpha S^k)^T A\alpha S^k \quad (6\text{—}9)$$

上式对 α 求导，

$$\frac{df(X^k+\alpha S^k)}{d\alpha}=0,\quad \nabla^T f(X^k)S^k+(S^k)^T AS^k\alpha=0$$

或 $$\alpha^*=\alpha^k=-\frac{\nabla^T f(X^k)S^k}{(S^k)^T AS^k}\text{（即最优步长）}\qquad(6-10)$$

[例]

$$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX$$

$$\nabla f(X^k)=QX^k,\ \nabla^2 f(X^k)=Q,\quad S^k=\frac{QX^k}{||QX^k||}$$

代入（6—10）式，最优步长

$$\alpha^k=\frac{-(QX^k)^T(QX^k)}{(QX^k)^T A(QX^k)}||QX^k||$$

或 $$\alpha^k=\frac{-(X^k)^T Q^2 X^k}{(X^k)^T Q^3 X^k}||QX^k||\qquad(6—11)$$

如果在（6—8）式中令 $X^{k+1}=X^k+\lambda P^k$ 代入，$P^k=\nabla f(X^k)$ 则：

$$f(X^{k+1})=f(X^k)+(P^k)^T\lambda P^k+\frac{1}{2}(\lambda P^k)^T A(\lambda P^k)$$

$$\frac{df(X^{k+1})}{d\lambda}=0,\qquad \therefore\quad (P^k)^T P^k=-\lambda^*(P^k)^T AP^k$$

最优步长参数为：

$$\lambda^*=\frac{-(P^k)^T P^k}{(P^k)^T A(P^k)}=-\frac{\nabla^T f(X^k)\nabla f(X^k)}{\nabla^T f(X^k)A\nabla f(X^k)}$$

[例]

$$f(X)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=\frac{1}{2}X^TQX$$

$$Q=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$X^k=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}\qquad \nabla f(X^k)=\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}$$

则从 X^k 到 X^{k+1} 的最优步长参数为

$$\lambda^*=-\frac{[-2,-6]\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}}{[-2,-6]\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}}=-\frac{40}{200}=-0.2$$

3. 最速下降法（最优梯度法）的特点

最优梯度法前后两步迭代的搜索方向相互正交。

[证明]：

对二次型函数

$$S^k=\frac{QX^k}{\|QX^k\|}$$

$$\nabla f(X^{k+1})=QX^{k+1}=Q(X^k+\alpha S^k)$$

$$=Q\left(X^k+\frac{\alpha QX^k}{\|QX^k\|}\right)\qquad(6—12)$$

S^k 与 S^{k+1} 正交，则应满足

$$(S^k,\ S^{k+1})=0,\ 或\ [\nabla f(X^k)]^T\nabla f(X^{k+1})=0\qquad(6—13)$$

将（6—11）式所得 α^k 代入（6—12）式

$$\nabla f(X^{k+1})=QX^k-\frac{(X^k)^TQ^2X^k}{(X^k)^TQ^3X^k}Q^2X^k$$

$$[\nabla f(X^k)]^T \nabla f(X^{k+1})$$

$$=(X^k)^T Q\left[QX^k-\frac{(X^k)^T Q^2 X^k}{(X^k)^T Q^3 X^k}Q^2 X^k\right]=0$$

即（6—13）式得证。

［证毕］

对于一般函数也可证明最优梯度法前后两步梯度是互相垂直的。

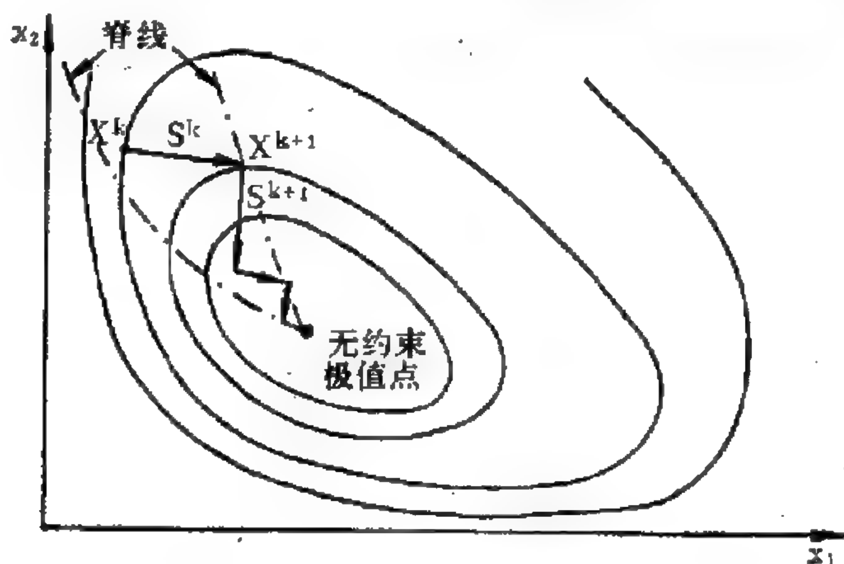
[证明]：

$$\text{已知}\quad \frac{\partial f(X^{k+1})}{\partial \alpha}=\frac{\partial f(X^k+\alpha S^k)}{\partial \alpha}=0$$

$$\text{故}\quad \frac{\partial f(X^k+\alpha S^k)}{\partial (X^k+\alpha S^k)}\cdot\frac{\partial (X^k+\alpha S^k)}{\partial \alpha}=\nabla^T f(X^k+\alpha S^k)\cdot S^k$$

$$=\nabla^T f(X^{k+1})\cdot S^k=0$$

即第 $k+1$ 步的梯度与第 k 步的搜索方向 S^k 垂直。（见图 6—5）。或 $(S^k,\ \nabla f(X^{k+1}))=0$，而 S^k 正是第 k 步的负梯度方向。



第 $k+1$ 步梯度与搜索方向 S^k 垂直

图 6—5

三、最速下降法的收敛性

当到达极小点 X^* 时，函数梯度应为零，$\nabla f(X^*)=0$，因此，如果下式成立，则算法是收敛的：

$$\lim_{k\to\infty}\nabla f(X^k)=0$$

因此最速下降法可以用以下一些收敛判据作为迭代过程结束的标志：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \left|\dfrac{f(X^{k+1})-f(X^k)}{f(X^k)}\right|\leqslant\varepsilon_1 \\ (2) & \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|\leqslant\varepsilon_2,\ i=1,2,\cdots \\ (3) & |X^{k+1}-X^k|\leqslant\varepsilon_3\end{array}\right\}\qquad(6-14)$$

ε_1，ε_2，ε_3 都是很小的正数。

将梯度函数 $\nabla f(X+\triangle X)$ 在 X 点展开成泰勒级数，取一次近似，得

$$\nabla f(X+\triangle X)=\nabla f(X)+A\triangle X\qquad(6-15)$$

式中
$$A=\nabla^2 f(X)=\frac{\partial^2 f(X)}{\partial X^2}$$

在最优点附近 $\triangle X=X^*-X^k$

由（6—15）式，$\nabla f(X^*)=\nabla f(X^k)+A(X^*-X^k)=0$

$$\nabla f(X^k)=-A(X^*-X^k)\qquad(6-16)$$

又已知

$$X^{k+1}=X^k+\alpha^k S^k=X^k+\frac{\alpha^k\nabla f(X^k)}{\|\nabla f(X^k)\|}$$

则
$$X^* - X^{k+1} = X^* - X^k - \frac{\alpha^k \nabla f(X^k)}{||\nabla f(X^k)||}$$

$$= \left[I + \frac{\alpha^k A}{||\nabla f(X^k)||} \right](X^* - X^k) \qquad (6—17)$$

由（6—17）式可见，第 $k+1$ 步逼近误差（离最优点之差距）与第 k 步逼近误差成正比，亦即最速下降法按线性收敛，因此收敛是较慢的。（6—17）式中 I 为单位阵。

定义收敛速率：

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||X^{k+1} - X^*||}{||X^k - X^*||^p} = \gamma \qquad (6—18)$$

p 为收敛阶次，γ 为常数，$X^k \neq X^*$。由（6—17）式可知最优梯度法 $p=1$，以后可以证明二次梯度法（牛顿法）$p=2$。称为二次收敛。

[例]

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T Q X$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X) = QX = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

这是一个双曲函数，极值点 $X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，函数极值 $f(X^*) = 0$。

设 $X^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，

$$\nabla f(X^0) = QX^0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\|QX^0\| = 100 \qquad \therefore \qquad S^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

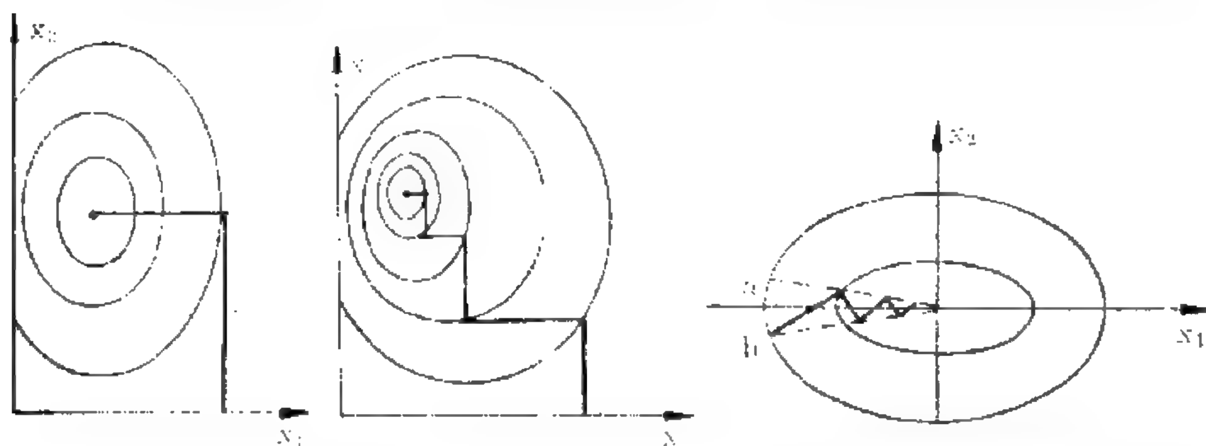
$$X^1 = X^0 + \alpha S^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\alpha \end{bmatrix}$$

$$f(X^1) = \frac{1}{2}[0,\ 1+\alpha] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\alpha \end{bmatrix} = 50(1+\alpha)^2$$

当 $\alpha = -1$ 时，$f(X^1) = 0$，这是 $f(X)$ 的最优点，可见取步长为 -1，从 $X^0 = [0,\ 1]^T$ 出发，一步可达极值点。应用最优步长公式，可以证明，如果二次函数 $f(X) = C^T X + \frac{1}{2} X^T Q X$，$Q$ 是正定的，则用最优梯度法 $f(X^{k+1})$ 总小于 $f(X^k)$，即算法是收敛的。

例如 $f(X) = x_1^2 + 25x_2^2$，从 $[2,\ 2]^T$ 出发，分别取 $\alpha^0 = 2.003$，$\alpha^1 = 1.85$，$\alpha^2 = 0.07$ 为最优步长，则函数值依次为 $f(X^0) = 104$，$f(X^1) = 3.69$，$f(X^2) = 0.13$。

由于负梯度方向具有最速下降性质，一般容易理解为最理想的



(a) 目标函数接近圆　(b) 目标函数为椭圆　(c) 目标函数为椭圆、长半径比短半径大得多

图 6—6　影响最速下降法收敛情况的因素

搜索方向，实际上不是这样，X^k 点的负梯度方向 $-\nabla f(X^k)$ 只在 X^k 点附近才有最速下降性质，因而是局部最优，不是全局最优。对于某些函数，最优梯度法收敛是很慢的。

目标函数接近于圆时，如图 6—6(a)，1—2 步迭代即可达最优点，目标函数为椭圆时，如图 6—6(b) 可能要很多步达最优点。如果目标函数为椭圆，其长半径比短半径大得多，则迭代次数与初始点有关，见图 6—6(c)。如果初始点为 a，即位于几何轴上，则最优梯度法一步指向最优，如果初始点为 b，即不在长短轴上，则要经过曲折的搜索途径，开头几步，下降较快，越接近极值点，收敛越慢，但由图 6—6(c) 可见，沿虚线（称为脊线）却一步达最优。因此对这一类函数应当有另外一些更好的搜索方法。

对于多峰函数，随着初始点的不同（如图 6—7 中 a、c 点），收敛于不同的局部最优点，这是因为最优梯度法只用了局部梯度信息。如果初始点为 b，很可能收敛于鞍点。

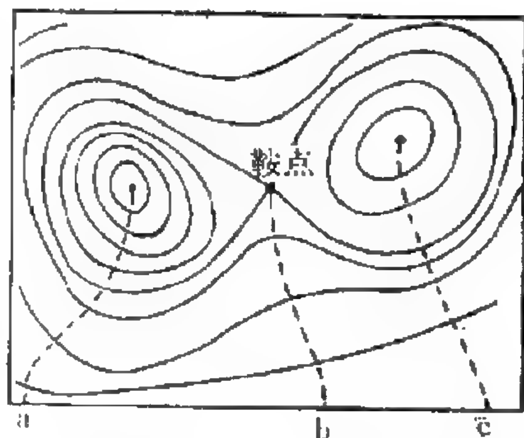


图 6—7　多峰函数

总的来看，最优梯度法对于开局是有利的，可以帮助我们较快接近最优解，但是用作收局是不利的，因此应当与其他方法结合使用，从而有利于搜索。例如开局用最优梯度法，收局用牛顿法，称为混合算法。（从初始点 X^0 出发的开头几步迭代称为开局，接近于极值点的最后几步迭代称为收局）。最速下降法（最优梯度法）程序框图如图 6—8。

收敛性判据为：

$$\|g^k\| = \|\nabla f(X^k)\| \leqslant \varepsilon$$

$$f(X^{k+1}) - f(X^k) < \eta$$

ε 及 η 为预先给定的正实数。

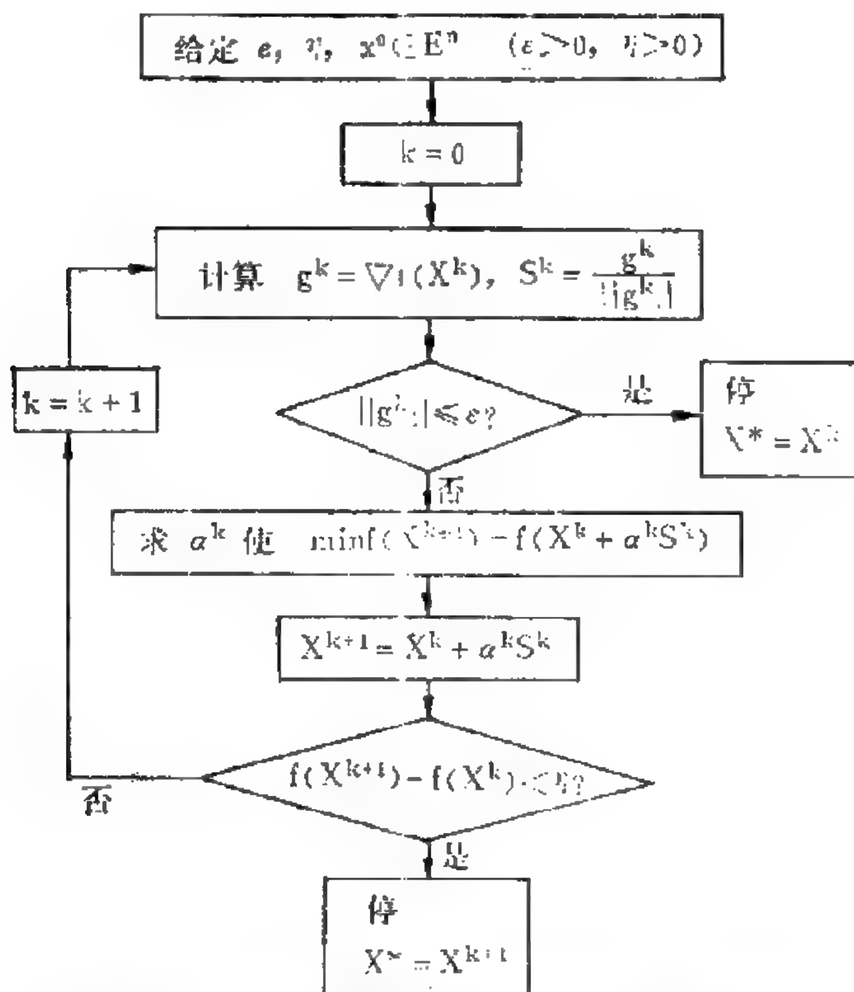


图 6—8 最速下降法（最优梯度法）程序框图

§ 6-2 拟 牛 顿 法

我们已知，连续可微函数 $f(X)$ 的局部极小点 X^* 满足下述必要条件

$$g(X^*) \equiv \nabla f(X^*) = 0$$

上式表示 n 个非线性方程组，求解这一组方程可得 X^*。因此一种求 $f(X)$ 极值的方法是求解上述非线性方程组。

求解非线性方程组的最古老方法是牛顿法。牛顿法的基本思想

是：假设第 k 次迭代结果得到 X^k，令 X^k 为极小值点 X^* 的 k 次近似，在 X^k 点对非线性方程 $\nabla f(X)=0$ 作线性化，利用泰勒级数展开式取一次（线性）近似。由此可以求得 X^{k+1} 的近似计算公式，经过一系列的迭代，在一定条件下可以使点列 X^1，X^2，…，X^{k+1} 收敛于最优点 X^*。

拟牛顿法在某种意义上可看作是牛顿法的近似方法，它是在牛顿法基础上的一种改进算法。改进方法不同，得到不同的拟牛顿法。以后将要介绍的变尺度法就是一种拟牛顿法。

下面我们先介绍牛顿法，然后再简要介绍拟牛顿法。

一、牛顿方向与牛顿步长

牛顿法又称二阶梯度法，是一种经典算法。这种方法不但利用了目标函数在搜索点的梯度，而且还利用了目标函数的二次导数，考虑了梯度变化的趋势。因此用牛顿法得到的每一步搜索方向比最优梯度法有所改进，可以更好的指向最优，较快地搜索到极值点。

我们已知，求函数极值的必要及充分条件为 $\nabla f(X)=g(X)=0$，这就要求解 n 个变量的非线性方程组。

以一维为例。设 x^k 是 $g(x)=f'(x)$ 的解，在 x^k 附近取 $g(x)$ 的一次近似。

由图 6—9 可见，

$$\operatorname{tg}\alpha=g'(x^k)=f''(x^k)=\frac{g(x^k)}{x^k-x}$$

$$f'(x^k)+f''(x^k)(x-x^k)=0 \tag{6—19}$$

其根为

$$x^{k+1}=x^k-\frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} \tag{6—20}$$

推广到 n 维，(6—19)、(6—20) 两式变为：

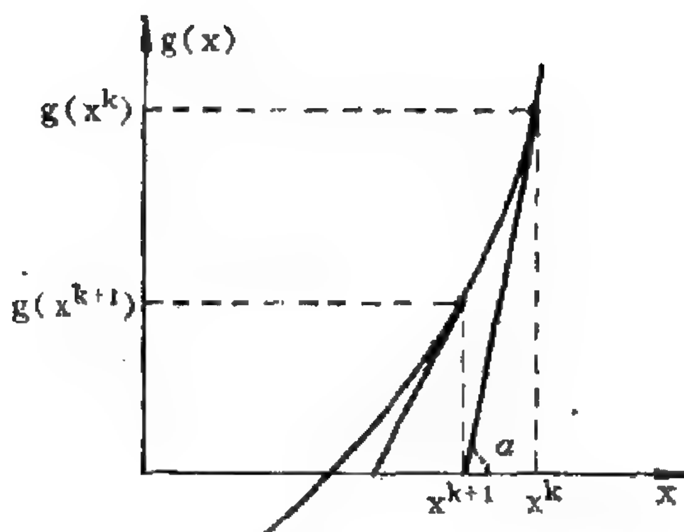


图 6—9　牛顿法一维寻优几何解释

$$\left.\begin{aligned}&\nabla f(X^k)+\nabla^2 f(X^k)(X-X^k)=0\\&X^{k+1}=X^k-[\nabla^2 f(X^k)]^{-1}\nabla f(X^k)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{—}21)$$

若将 $f(X)$ 在 X^k 点展开成泰勒级数取二次近似，得：

$$\left.\begin{aligned}&f(X)=f(X^k)+\nabla^T f(X^k)(X-X^k)+\frac{1}{2}(X-X^k)^T A_k(X-X^k)\\&\text{则}\ X^{k+1}=X^k-A_k^{-1}\nabla f(X^k)=X^k-A_k^{-1}g^k\end{aligned}\right\}$$

(6—22)

$A_k=\nabla^2 f(X)|_{X=X^k}$，为非奇异阵，称为 Hesse 阵。$\|A_k^{-1}\nabla f(X^k)\|$ 称为牛顿步长，$g^k=\nabla f(X^k)$ 。

应用这一方法迭代，有时候可能发散或者收敛到鞍点，为此需加以改进，对上式稍加修改可得

$$X^{k+1}=X^k+\lambda^k P^k$$

$P^k=-A_k^{-1}\nabla f(X^k)$。再用一维搜索法求最优步长参数 λ^k。

这个算法对于二次函数是很适用的。对于一般非二次函数则不能认为是精确的、满意的算法，因为这个算法只是根据 $g(X)$ 的一次近似即 $f(X)$ 的二次近似导出的。

（6—21）、（6—22）式是求 n 个变量的方程组，每迭代计算一次，都要计算梯度和 Hesse 阵 A_k 的逆。

定义搜索方向

$$S^k = -\frac{A_k^{-1}\nabla f(X^k)}{||A_k^{-1}\nabla f(X^k)||} = -\frac{A_k^{-1}g^k}{||A_k^{-1}g^k||} \qquad (6—23)$$

这是单位向量，称为牛顿方向，于是（6—22）式可写作（称为改进的牛顿算法）：

$$X^{k+1} = X^k + \lambda^k S^k||A_k^{-1}\nabla f(X^k)|| = X^k + \alpha^k S^k \qquad (6—24)$$

$$\alpha^k = \lambda^k||A_k^{-1}g^k||$$

二、牛顿法的优缺点

牛顿法要计算每步搜索点的 A_k 阵而且要求逆，若 A_k 非正定，则 A_k^{-1} 不存在，只能用梯度法算，不能用牛顿法算。若 A_k 为正定，而维数较高时，计算 A_k^{-1} 费时太多，例如电力系统求功率流最优问题，变量数可达 500，求 500×500 矩阵的逆无论是存储容量和计算速度都对计算机提出很高要求。需要迭代计算 A_k^{-1} 是牛顿法的主要缺点。随着变量数的增加，牛顿法效率越来越低。总之牛顿法的主要缺点是：

（1）需要存贮 $n\times n$ 矩阵 A_k，

（2）计算 A_k 阵的元素是很困难的，有时甚至是不可能的，

（3）每一步要计算 A_k 阵的逆，

（4）每一步要计算 $A_k^{-1}g^k$。

然而对于求二次函数的极值问题，应用牛顿法是十分有效的，一步就达最优点。

［例］ $f(X) = C^TX + \frac{1}{2}X^TQX$

设 Q 为正定，

$$\nabla^2 f(X) = A = Q$$

$$\nabla f(X^0) = C + QX^0$$

$$X^1 = X^0 - Q^{-1}\nabla f(X^0)$$

代入（6—22）式

$$X^1 = X^0 - Q^{-1}(C + QX^0) = -Q^{-1}C$$

$$\begin{aligned} X^2 &= X^1 - Q^{-1}(C + QX^1) \\ &= -Q^{-1}C - Q^{-1}(C - QQ^{-1}C) = X^1 \end{aligned} \qquad (6—25)$$

最优点 $X^* = -Q^{-1}C$

对二次函数说，牛顿法一步可达极值点，这一性质属于二次收敛的性质。

如果用泰勒级数展开的二次近似式如公式（6—22）近似一个非线性函数 $f(X)$，则在离开极值点较近处 X^k 出发，沿牛顿方向可得

$$X^* \approx X^k - \lambda^k A_k^{-1} g^k \qquad (6—26)$$

如果在离开极值点较远处，用牛顿法就不可能一步指向最优，如图 6—10 所示。这是因为实际函数中有许多高阶项在（6—22）式中忽略了，尽管如此，用牛顿法搜索寻优仍比最优梯度法快。

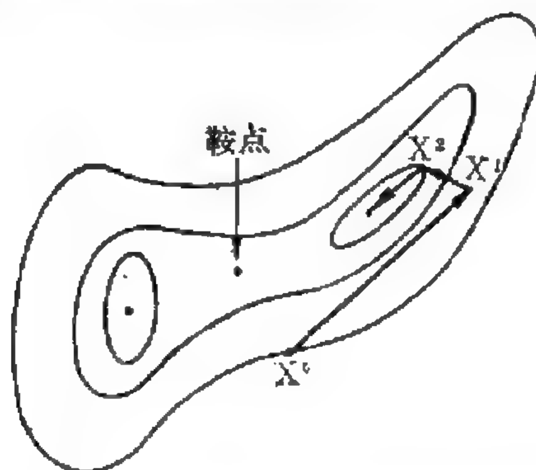


图 6—10 非二次函数用牛顿法寻优路线

图 6—10 中从 X^0 出发到达 X^1，是应用牛顿公式计算的：

$$X^1 = X^0 - A_0^{-1}\nabla f(X^0) = X^0 - A_0^{-1}g^0$$

在 X^0 点的二次近似在 X^1 处无效。补救的方法是用有限步长的牛顿公式如（6—24）式，然后用一维搜索方法选择最优步长。由（6—24）、（6—23）式可得，

$$X^{k+1} = X^k + \alpha^k S^k = X^k - \alpha^k A_k^{-1} g^k \frac{1}{\|A_k^{-1} g^k\|} \qquad (6—27)$$

最优梯度法迭代公式是（6—27）式的一个特例，即令 $A_k = I$，可得 $X^{k+1} = X^k - \dfrac{\alpha^k g^k}{\|g^k\|} = X^k - \alpha^k S^k$，即（6—4）式。

我们已知，一个非二次的函数在接近最优点时，其等高线很接近于二次函数。这是因为在 X^* 点将 $f(X)$ 用泰勒级数展开时，$\triangle X = (X^k - X^*)$ 很小，X^k 越接近于 X^*，$\triangle X$ 越小，则忽略 $(\triangle X)^3$ 项的误差越小。

如果在接近最优点 X^* 时，沿负梯度方向搜索改为沿共轭方向搜索，可以一步指向最优，牛顿方向正是共轭方向。

这点可证明如下，由（5—24）式已知，两向量 X、Y 互为共轭，则内积 $(X、Y) = 0$。现在用最优梯度法沿 $-S^k$ 方向以最优步长从 X^k 点移动到 X^{k+1} 点，则搜索方向 $-S^k$ 一定与 $k+1$ 步的梯度 g^{k+1} 正交，内积 $(S^k, g^{k+1}) = 0$。

又已知牛顿方向

$$S^{k+1} = \frac{A_k^{-1} g^{k+1}}{\|A_k^{-1} g^{k+1}\|}$$

或 $P^{k+1} = A_k^{-1} g^{k+1}$，$A_k P^{k+1} = g^{k+1}$

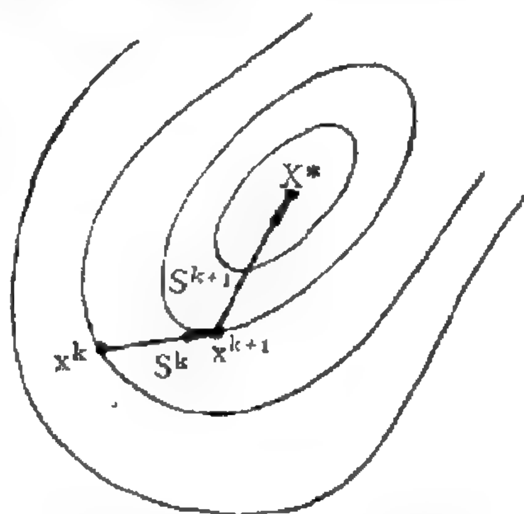


图 6—11
接近极值点时从负梯度方向 S^k 改为共轭方向 S^{k+1}

则内积 $(S^k,\ A_kP^{k+1})=0$

即 S^k 与 X^{k+1} 点牛顿方向互为 A 共轭。A_k 是目标函数的二次偏导数矩阵，因此牛顿法适用于收局，即适用于极值点附近寻优。见图 6—11。

三、牛顿法的收敛速率

下面我们来推导牛顿法的收敛速率公式。

以单变量函数 $f(x)$ 为例。梯度 $g(x)=\nabla f(x)$，在 x^k 点将 $g(x)$ 按泰勒公式展开，取二次近似得

$$\left.\begin{aligned} &g(x)=g(x^k)+(x-x^k)\nabla g(x^k)+\frac{1}{2}(x-x^k)^2A_k \\ &A_k=\nabla^2 g(x)|_{x^k} \end{aligned}\right\} \tag{6—28}$$

由 (6—20)式，$x^{k+1}=x^k-\dfrac{g(x^k)}{\nabla g(x^k)}$

$$x^*-x^{k+1}=x^*-x^k+\frac{g(x^k)}{\nabla g(x^k)}$$

(6—28) 式中令 $x=x^*$，

$$g(x^k)=g(x^*)-\left[(x^*-x^k)\nabla g(x^k)+\frac{1}{2}(x^*-x^k)^2A_k\right],$$

$$g(x^*)=0$$

$$g(x^k)=-(x^*-x^k)\nabla g(x^k)-\frac{1}{2}(x^*-x^k)^2A_k,$$

代入上式，得

$$x^*-x^{k+1}=-\frac{1}{2}(x^*-x^k)^2\ \frac{A_k}{\nabla g(x^k)}$$

即 x^*-x^{k+1} 与 $(x^*-x^k)^2$ 成比例，推广到 n 元函数，可得：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\|X^{k+1}-X^*\|}{\|X^k-X^*\|^2}=\gamma$$

上式称为二次收敛速率，当 X^*-X^k 很小时，X^*-X^{k+1} 按平方迅速减小，所以牛顿法只要是收敛的，可以迅速地收敛到最优值附近，经过四、五次迭代可以得到较满意的精度。

[例 1]

$$f(X)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1$$

或写作 $f(X)=C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$，极小值点 $X^*=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

式中 $C^T=[-2,\ 0]$ $\quad Q=\begin{bmatrix}3 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$

设 $\quad X^0=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$，$\quad \nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}-12\\6\end{bmatrix}$

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

用牛顿法，

$$X^1=X^0-Q^{-1}\nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-12\\6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

一步到达最优。

[例 2]

$$f(X)=(x_1-x_2+x_3)^2+(-x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2$$

$$=\frac{1}{2}X^TQX,\quad \text{极小值点}\quad X^*=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}。$$

设

设
$$X^0=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}6&-2&-2\\-2&6&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}\qquad Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(X^0)=QX^0=\begin{pmatrix}6&-2&-2\\-2&6&-2\\-2&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$X^1=X^0-Q^{-1}\nabla f(X^0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

四、拟牛顿法

我们知道函数的差分包含了函数一次导数的信息，例如

$$f(x^{k+1})=f(x^k+\triangle x^k)$$

$$\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x^k}\cong\frac{f(x^{k+1})-f(x^k)}{\triangle x^k}$$

式中
$$\triangle x^k=x^{k+1}-x^k$$

同理，函数梯度的差分包含了函数二次导数的信息。利用这一概念，可使牛顿法中计算 Hesse 阵 A_k 的工作得到简化。

如果 X^k 和 X^{k+1} 为前后两次迭代的点，我们取作最优点 X^* 的近似，则可以推导出 A_k 的计算公式。

由（6—19）式，得单变量情况下的计算公式为：

$$f'(x^k)+f''(x^k)(x^{k+1}-x^k)=0$$

或
$$g(x^k)+A_k(x^{k+1}-x^k)=0$$

对 n 维变量有
$$g(X^k)+A_k(X^{k+1}-X^k)=0$$

在 X^* 附近将 $g(X)$ 用泰勒级数展开，取一次近似，

$$g(X^*)=g(X^k+\triangle X^k)=g(X^k)+A_k\triangle X^k$$

或写作：
$$g^{k+1}-g^k=A_k\triangle X^k$$

式中 $g^{k+1}=g(X^{k+1})$，$g^k=g(X^k)$，$\triangle X^k=X^{k+1}-X^k$。

定义
$$\triangle g^k=g^{k+1}-g^k$$

则
$$\triangle g^k=A_k\triangle X^k$$

或
$$\triangle X^k=A_k^{-1}\triangle g^k,\quad \text{设 } A_k \text{ 非奇异。}$$

于是，我们可利用梯度的差分 $\triangle g^k$ 以及某个近似矩阵 H^k 去计算 $\triangle X^k$，H^k 为 A_k^{-1} 的近似矩阵。这种方法称为拟牛顿法。

于是
$$\triangle X^k=H^k\triangle g^k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ \cdots$$

迭代开始时可以任意选择起始矩阵 H^0。

对第 $k+1$ 步，有

$$\triangle X^{k+1}=H^{k+1}\triangle g^{k+1}=H^{k+1}(g^{k+2}-g^{k+1})$$

假设 X^{k+2} 为驻点，则应有 $g^{k+2}=0$

则
$$\triangle X^{k+1}=-H^{k+1}g^{k+1}$$

上述假设不一定完全正确，一般情况下 X^{k+2} 只是驻点的近似点，也许是很差的近似。因此，为了计算 $X^{k+2}=X^{k+1}+\triangle X^{k+1}$，可利用上式作为搜索方向，并令

$$P^{k+1}=\triangle X^{k+1}=-\lambda^{k+1}H^{k+1}g^{k+1}$$

式中 λ^{k+1} 为沿 $-H^{k+1}g^{k+1}$ 方向迭代的最优步长。拟牛顿法正是利用这两个式子，迭代过程中应当先构造近似矩阵 H^k 及求最优步长 λ^k，构造 H^k 的方法不同，就有不同的拟牛顿法。

这种用 H^k 代替 A_k^{-1} 的方法可以不必计算二次导数，也不

必计算矩阵的求逆，使迭代过程收敛于极小点。并且可以证明，每步迭代改进了 H^k，使它最终收敛于 A_k^{-1}。

§6-3 共轭梯度法

共轭梯度法又称旋转梯度法，是付莱丘（Fletcher）和吕伍斯（Reeves）两人在 1964 年提出的。这种方法具有二次终结性质，即对于二次函数，$X\in E^n$，最多经过 n 次迭代可搜索到最优点。

由共轭方向讨论我们已知，如果一个二元二次函数为

$$f(X)=K+C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$$

并且 P^k 和 P^{k+1} 为关于正定阵 Q 相互共轭的方向，则沿 P^k 和 P^{k+1} 各进行一次独立的一维搜索，就可达到该函数的极小值点。

共轭梯度法的实质是对最优梯度法进行修正，使搜索方向为共轭方向（将负梯度方向转一个角度），因此每步的搜索方向都要对该步的负梯度方向作一个修正：

$$P^{k+1}=-\nabla f(X^{k+1})+\beta^kP^k=-g^{k+1}+\beta^kP^k$$

以保证 P^{k+1} 与 P^k 关于 Q 互为共轭。

β 称为共轭系数。

共轭梯度法是解最优控制问题的有效方法，特别是用于二次泛函指标的系统。共轭梯度法程序简单，容易实现，具有梯度法优点，而在收敛速度方面比梯度法快，但不如牛顿法。计算工作量比梯度法多，比牛顿法少。

下面仍以二次函数为例。以二次函数为主要讨论对象的原因是：

1． 如果算法对二次函数有效，则对一般函数至少在极值点附近也可指望有较好的效果。反之如果算法不能很好地处理二次函数，则不能指望它能够成功地求出更一般函数的极小值点。

2. 二次函数不同程度地近似于一般函数，离极小值点越近，非二次函数越接近于二次函数。

共轭梯度法的迭代步骤如下

1. 设初始点为 X^0，第一步按负梯度方向搜索，由最优梯度法得 $X^1 = X^0 + \lambda^0 P^0$。

$$P^0 = -\nabla f(X^0)$$

2. 下一步搜索方向 P^1 应与 P^0 互为 Q 共轭

$$(P^0)^T Q P^1 = 0 \tag{6—29}$$

3. $$\nabla f(X^1) - \nabla f(X^0) = Q(X^1 - X^0) = Q\lambda^0 P^0$$

$$\lambda^0 P^0 = Q^{-1}[\nabla f(X^1) - \nabla f(X^0)] \tag{6—30}$$

令
$$P^1 = -\nabla f(X^1) + \beta^0 P^0 \tag{6—31}$$

将（6—31）、（6—30）式代入（6—29）式

$$[\nabla f(X^1) - \nabla f(X^0)]^T[-\nabla f(X^1) + \beta^0 P^0] = 0 \tag{6—32}$$

已知 $\nabla f(X^1)$ 与 P^0 正交，即 $[\nabla f(X^1)]^T P^0 = 0$。
故 $\nabla f(X^0)$ 与 $\nabla f(X^1)$ 正交，即 $[\nabla f(X^0)]^T \nabla f(X^1) = 0$。
则由（6—32）式可得 $||\nabla f(X^1)||^2 = \beta^0 ||\nabla f(X^0)||^2$，或：

$$\beta^0 = \frac{||\nabla f(X^1)||^2}{||\nabla f(X^0)||^2} = \frac{||g^1||^2}{||g^0||^2} \tag{6—33}$$

这是一个标量。而且因为函数的梯度总是随迭代次数增加越来越小，$\therefore \beta^0 < 1$。

于是由（6—31）式可确定 P^1。

一般情况下，前后两步的函数梯度是正交的，这在最优梯度法一节中已做了证明，即 $[\nabla f(X^k)]^T \nabla f(X^{k+1}) = 0$，或 $(g^k)^T g^{k+1} = 0$。

由（6—33）式推广可得第 $k+1$ 步的共轭系数为

$$\beta^k=\frac{\|\nabla f(X^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(X^k)\|^2}=\frac{\|g^{k+1}\|^2}{\|g^k\|^2} \qquad (6—34)$$

又 $$P^{k+1}=-\nabla f(X^{k+1})+\beta^k P^k=-g^{k+1}+\beta^k P^k \qquad (6—35)$$

共轭梯度法第 $k+1$ 步的搜索方向 P^{k+1} 是该步的负梯度方向及前一步搜索方向的线性组合，即第 $k+1$ 步搜索方向综合利用了本步梯度和过去各点梯度的信息。

对于非二次函数，可用下式计算共轭系数：

$$\beta^k=\frac{\|\nabla f(X^{k+1})\|^2-\nabla^T f(X^{k+1})\nabla f(X^k)}{\|\nabla f(X^k)\|^2}$$

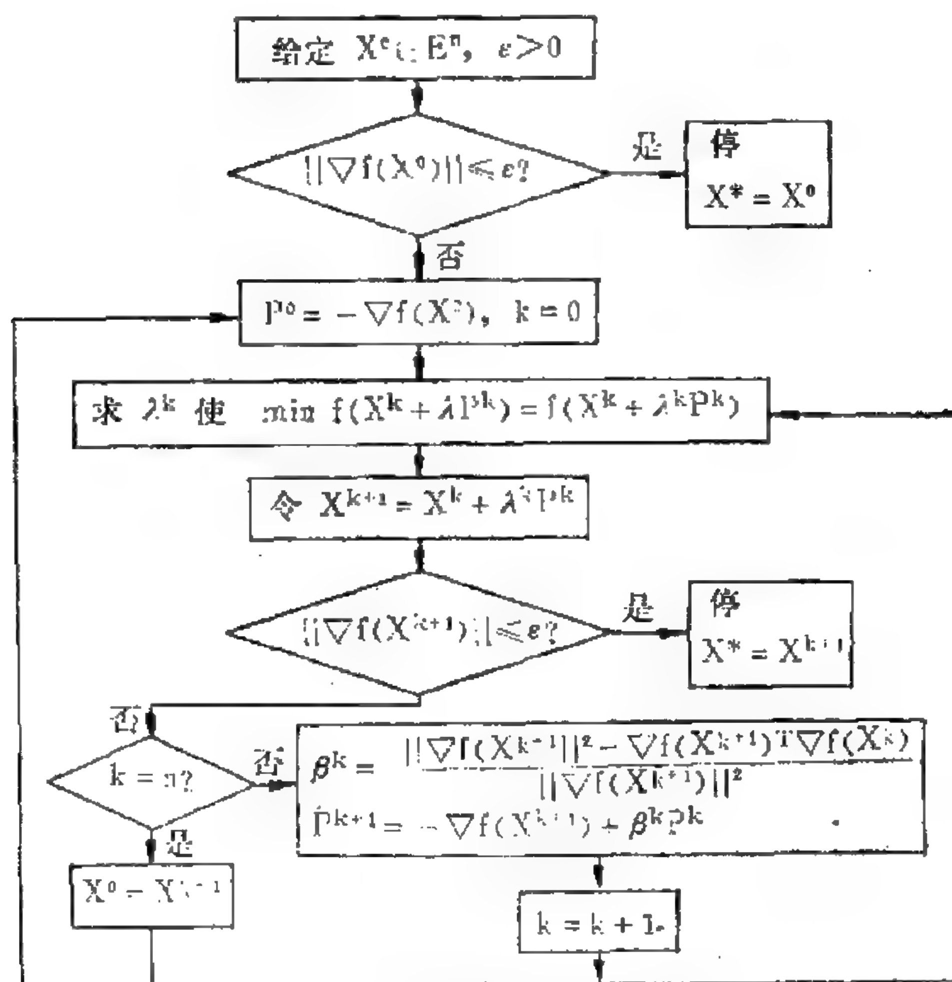


图 6—12 共轭梯度法程序框图

$$\beta^k = \frac{||g^{k+1}||^2 - (g^{k+1})^T g^k}{||g^k||^2} \tag{6—36}$$

共轭梯度法迭代过程如下：

选择初始点 X^0，取 $P^0 = -\nabla f(X^0)$，依次沿 P^0、P^1、…、P^n 用一维搜索法求最优步长而逐步移动到 X^1，X^2，…，X^n，其中 $P^k(k=1, 2, \cdots)$ 由（6—35）式确定。

当 $||\nabla f(X^k)|| < \varepsilon$ 时算法结束，ε 是某个预先规定的很小的正数。如果到 X^n 还未收敛，则以 X^n和 $-\nabla f(X^n)$ 作为新的 X^0 和 P^0 重新用上述方法进行搜索。一般说，只要函数是二次的，则 P^0、P^1、… 关于 Q 是相互共轭的，因此共轭梯度法有二次终结性质。

共轭梯度法的主要优点是不必计算二阶偏导数矩阵，省去了计算机存储，适合于大规模问题的求解，而且比梯度法收敛快。程序框图如图 6—12。

[例 1]

$$\min f(X) = \frac{3}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - x_1 x_2 - 2x_1$$

$$f(x) = [-2, \ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1, \ x_2]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$X^0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad X^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 - 2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \nabla f(X^0) = \begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad P^0 = \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

求 $\min\limits_{\lambda} f(X^0 + \lambda P^0)$

令 $\dfrac{df}{d\lambda}=0$，得 $\lambda^*=\lambda^0=\dfrac{5}{17}$

$$X^1=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}+\lambda^0\begin{bmatrix}12\\-6\end{bmatrix}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}26\\38\end{bmatrix}$$

$$\nabla f(X^1)=\begin{bmatrix}6/17\\12/17\end{bmatrix}$$

$$\beta^0=\frac{\|\nabla f(X^1)\|^2}{\|\nabla f(X^0)\|^2}=\frac{\left(\frac{6}{17}\right)^2+\left(\frac{12}{17}\right)^2}{144+36}=\frac{1}{289}$$

$$P^1=\begin{pmatrix}-\frac{6}{17}\\-\frac{12}{17}\end{pmatrix}+\frac{1}{289}\begin{bmatrix}12\\-6\end{bmatrix}=\frac{1}{289}\begin{bmatrix}-90\\-210\end{bmatrix}$$

$$X^2=X^1+\lambda P^1=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}26\\38\end{bmatrix}$$

$$+\frac{\lambda}{289}\begin{bmatrix}-90\\-210\end{bmatrix}$$

求 $\min\limits_{\lambda} f(X^1+\lambda P^1)$

令 $\dfrac{df}{d\lambda}=0$，得

$$\lambda^*=\lambda^1=\frac{17}{10},$$

$$X^2=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}26\\38\end{bmatrix}$$

$$-\frac{17}{10}\cdot\frac{1}{289}\begin{bmatrix}90\\210\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}。$$

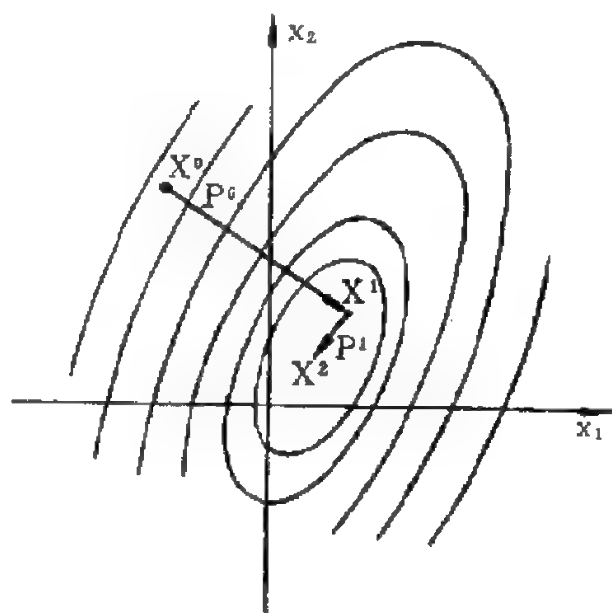


图 6—13

$$f(X)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1$$

X^2 为最优点 X^*。

本例的图解见图 6—13。

[例 2]　$\min f(X) = \frac{1}{2}X^TQX \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

已知其最小点为 $[0, 0]^T$。

∵ $f(X)$ 是二次型，共轭梯度法的收敛性与初始点选择无关，任意选初始点 $[10, -5]^T$

$$\nabla f(X) = QX = [x_1 + x_2, \ x_1 + 2x_2]^T$$

1. 令 $P^0 = -\nabla f(X^0) = [-5, 0]^T$

2. $f(X^0 + \lambda P^0) = f(10 - 5\lambda, \ -5)$

$$= \frac{1}{2}(10 - 5\lambda, \ -5)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 - 5\lambda \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[50 - 75\lambda + 50(\lambda)^2]$$

$$\frac{df}{d\lambda} = 0, \ 100\lambda - 75 = 0, \quad \lambda^0 = 0.75$$

$\frac{d^2f}{d\lambda^2} = 50 > 0$，∴ $\lambda^0 = 0.75$ 可使 $f(X^0 + \lambda P^0)$ 达极小。

3. $X^1 = X^0 + \lambda^0 P^0 = [6.25, \ -5]^T$

$\nabla f(X^1) = [1.25, \ -3.75]^T$

4. $||\nabla f(X^0)||^2 = 5^2 + 0^2 = 25$

$||\nabla f(X^1)||^2 = 1.25^2 + (-3.75)^2 = 15.55$

5. 得 $P^1 = -[1.25, \ -3.75]^T + \frac{15.55}{25}[-5, \ 0]^T$

$= [-4.36, \ 3.75]^T$

6. $X^2 = X^1 + \lambda P^1$,

$$f(X^1 + \lambda P^1) = \frac{1}{2}[26.55 - 38.9\lambda + 14.45(\lambda)^2]$$

最小值在 $\lambda^1 = 1.34$ 处

$X^2 = X^1 + \lambda^1 P^1 = [0.4, 0.01]^T$。这是二步计算所得数值解。

理论解应为 $[0, 0]^T$，∵ 用共轭梯度法解正定二次型最小值顶多在 n 步内求得，上述 X^2 很接近于最优解。

如果取 X^0 为 $(0.4, 0.01)^T$，重复两次迭代可得更好的结果。

共轭梯度法小结

1. 共轭梯度法利用了各步搜索方向关于 Q 互为共轭的性质。

共轭梯度法与共轭方向法相似。但共轭方向法是应用坐标轮换法寻找共轭方向，而共轭梯度法是用梯度信息寻找共轭方向。

2. 迭代公式

$X^{k+1} = X^k + \lambda^k P^k$，$\|\lambda^k P^k\|$ 是最优步长，

$$P^{k+1} = -\nabla f(X^k) + \beta^k P^k$$

$$\beta^k = \frac{\|\nabla f(X^{k+1})\|^2}{\|\nabla f(X^k)\|^2}$$

$\|\nabla f(X^k)\| < \varepsilon$，收敛，算法停止。

3. 共轭梯度法有二次终结性质。

§6-4 变 尺 度 法

1959 年戴维敦（Davidon）提出变尺度法，1963 年付莱丘（Fletcher）、鲍威尔（Powell）改进这一方法，简称为 DFP 法，成为 60 年代中期寻找局部极小值的方法中最有力的通用方法，在算法上有了突破。例如在 1962 年以前，即变尺度法没有得到应

用以前，由于原有的各种方法用计算机计算耗时太多，因此求非线性函数的极小值一般只能计算 10 个以下的变量。1962 年以后应用了 DFP 变尺度法，可以在几分钟内计算 100 个变量的函数极小值，有的问题用变尺度法只要半分钟就可求出最优解，而应用以前已有的其他方法则要 30 分钟才能求解。70 年代初期又出现了许多变尺度算法。例如，Broyden—Fletcher—shanno 提出的一种变尺度法称为 BFGS 公式[6]，Fletcher 证明了在 DFP 和 BFGS 公式间存在着有趣的关系。

变尺度法和共轭梯度法一样都是为了克服梯度法收敛慢、牛顿法计算工作量大的缺点而提出来的。下面我们先介绍 DFP 法。

一、DFP 变尺度法的搜索方向

变尺度法针对牛顿法要计算 A_k^{-1} 的缺点，用 $n\times n$ 矩阵 H^{k+1} 来逼近 A_k^{-1}，[见（6—39）式]。和牛顿法相似的是取搜索方向为

$$P^k = -H^k\nabla f(X^k) = -H^k g^k \qquad (6—37)$$

$$\therefore \qquad X^{k+1} = X^k + \lambda^k P^k = X^k - \lambda^k H^k g^k \qquad (6—38)$$

每步的 H^k 是变化的，即搜索方向的模（尺度）不断在调整变化，因此称为变尺度法。

第一步常取 $H^0 = I$，I 为单位阵。即 P^0 取负梯度方向，故变尺度法的第一步用最优梯度法。而经过 n 步迭代，$H^n = A_n^{-1}$，就和牛顿法一样了。

因此变尺度法是调整改变矩阵 H^k 使之从单位阵逐步过渡到 A_k^{-1}，不断改变搜索方向，故 H^k 称为方向矩阵。

如果 $f(X) = C^T X + \frac{1}{2}X^T Q X$，则 $A = Q$；如果 $f(X)$ 为非二次函数，则用泰勒级数展开，取二次近似得近似二次函数。

二、DFP 变尺度公式

由 § 6—2 介绍的拟牛顿法可知，牛顿法所得差分公式

$$\triangle X^k = A_k^{-1} \triangle g^k$$

可用一个近似矩阵去近似 A_k^{-1}，从而避免矩阵求逆的计算。DFP变尺度法中用 H^{k+1} 近似 A_k^{-1}，因此变尺度法是拟牛顿法的一种。

$$\triangle X^k = H^{k+1} \triangle g^k \qquad (6—39)$$

令

$$H^{k+1} = H^k + \triangle H^k \qquad (6—40)$$

式中 $\triangle H^k$ 称为校正矩阵，H^k 为方向矩阵。

（6—40）式代入（6—39）式得

$$(H^k + \triangle H^k) \triangle g^k = \triangle X^k$$

令

$$Z^k = H^k \triangle g^k$$

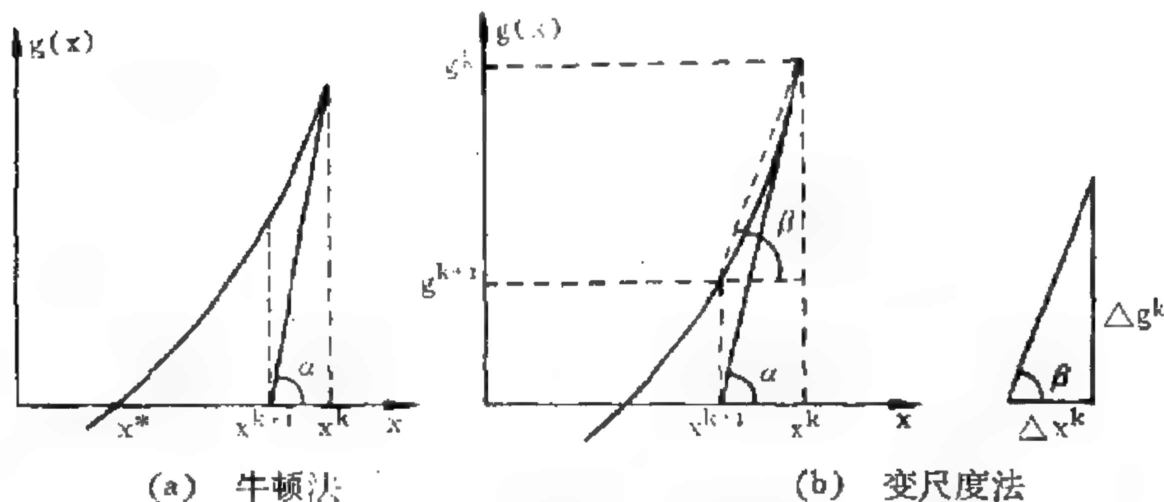
则上式可写作

$$\triangle H^k \triangle g^k = \triangle X^k - H^k \triangle g^k = \triangle X^k - Z^k \qquad (6—41)$$

我们比较一下变尺度法和牛顿法的差别可以发现，前者用割线近似梯度曲线 $\nabla f(X)$，后者则用某点 X^k 的切线近似梯度曲线 $\nabla f(X) = g(X)$。

以一维为例（见图 6—14）。

对牛顿法有：$x^{k+1} = x^k - A_k^{-1} g^k$



(a) 牛顿法　　　　(b) 变尺度法

图 6—14 变尺度法与牛顿法比较

$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{dg}{dx}\right|_{x^k} = A^k \text{ 或 } A_k^{-1} = \operatorname{ctg}\alpha$$

对变尺度法有：

$$H^{k+1} = \frac{\triangle x^k}{\triangle g^k} = \operatorname{ctg}\beta \tag{6—42}$$

以 H^{k+1} 逼近 A_k^{-1}，即以 $\operatorname{ctg}\beta$ 代替 $\operatorname{ctg}\alpha$，原来在 x^k 点的切线逼近梯度曲线，现在以 x^k 和 x^{k+1} 两点割线逼近梯度曲线。

（6—41）式中，令 $Z^k = H^k \triangle g^k$，引进任意的 n 维向量 Y^k，只要 $(Y^k)^T \triangle g^k \neq 0$，（6—41）式两端右乘 $(Y^k)^T \triangle g^k$，于是得

$$\triangle H^k \triangle g^k (Y^k)^T \triangle g^k = [\triangle X^k (Y^k)^T - Z^k (Y^k)^T] \triangle g^k$$

故
$$\triangle H^k \triangle g^k = \left[\frac{\triangle X^k (Y^k)^T}{(Y^k)^T \triangle g^k} - \frac{Z^k (Y^k)^T}{(Y^k)^T \triangle g^k}\right] \triangle g^k$$

$$\therefore \quad \triangle H^k = B^k - C^k$$

其中令：
$$B^k = \frac{\triangle X^k (Y^k)^T}{(Y^k)^T \triangle g^k} = \frac{\triangle X^k (\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T \triangle g^k}$$

$$C^k = \frac{Z^k (Y^k)^T}{(Y^k)^T \triangle g^k} = \frac{Z^k (Z^k)^T}{(Z^k)^T \triangle g^k}$$

由此可得

$$\triangle H^k = \frac{\triangle X^k (\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T \triangle g^k} - \frac{Z^k (Z^k)^T}{(Z^k)^T \triangle g^k}$$

$$H^{k+1} = H^k + \frac{\triangle X^k (\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T \triangle g^k} - \frac{Z^k (Z^k)^T}{(Z^k)^T \triangle g^k}$$

$$=H^k+B^k-C^k \tag{6—43}$$ [注]

称为 DFP 变尺度公式。

$$B^k=\frac{\triangle X^k(\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k} \text{ 为 } n\times n \text{ 阵} \tag{6—44}$$

$(\triangle X^k)^T\triangle g^k$ 为标量

$$C^k=\frac{Z^k(Z^k)^T}{(Z^k)^T\triangle g^k} \quad \text{为 } n\times n \text{ 阵} \tag{6—45}$$

$(Z^k)^T\triangle g^k$ 为标量

显见 H^{k+1} 与 $\triangle X^k$ 有关，也即与 X^k 有关。

最优步长 $\qquad \|\triangle X^k\|=\|\lambda^k P^k\|$ (6—46)

P^k 为搜索方向， $\quad P^k=-H^k g^k$ (6—47)

可以证明，当 H^k 为正定时，B^k 及 C^k 的分母均不为 0。

[证明]：X^k 不是 $f(X^k)$ 的极小点，则 $g^k\neq 0$。

当 H^k 为正定时，$P^k=-H^k g^k$ 为下降方向，$\lambda^k>0$

∴ 只要 $X^k\neq 0$，恒有 $(X^k)^T H^k X^k>0$。

对二次函数来说，梯度 $g(X)=C+QX$，

$$\therefore \qquad (g^k)^T H^k g^k>0 \tag{6—48}$$

[注]：若 $(\triangle X^k)^T\triangle g^k<(\triangle g^k)^T H^k\triangle g^k$，则用 (6—43) 式，否则改用下式计算方向矩阵：

$$H^{k+1}=H^k-\frac{\triangle X^k(\triangle g^k)^T H^k}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}-\frac{H^k\triangle g^k(\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}$$

$$+\left\{1+\frac{(\triangle g^k)^T H^k\triangle g^k}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}\right\}\frac{\triangle X^k(\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}$$

$$(\triangle g^k)^T H^k \triangle g^k = (g^{k+1} - g^k)^T H^k (g^{k+1} - g^k)$$

$$= (g^{k+1})^T H^k g^{k+1} + (g^k)^T H^k g^k - (g^k)^T H^k g^{k+1}$$

$$- (g^{k+1})^T H^k g^k \qquad (6-49)$$

这种情况下，可以证明下一步的梯度与本步的搜索方向垂直，即

$$(g^{k+1})^T P^k = 0 \qquad (6—50)$$

或 $(g^{k+1})^T H^k g^k = 0$，$(g^k)^T H^k g^{k+1} = 0$

代入（6—49）式，$(\triangle g^k)^T H^k \triangle g^k > 0$。

即 C^k 的分母不为 0。

又 $(\triangle X^k)^T \triangle g^k = (\lambda^k P^k)^T (g^{k+1} - g^k)$

$$= -\lambda^k (g^k)^T H^k (g^{k+1} - g^k)$$

$$= \lambda^k (g^k)^T H^k g^k > 0$$

即 B^k 的分母不为 0。

[证毕]

当 X 是 n 维向量时，H^k、B^k、C^k 均为 $n\times n$ 对称阵。

以后我们将证明经过 n 次迭代可搜索到 n 维二次函数的极小点。

即 $$H^n = A^{-1} \qquad (6—51)$$

三、DFP 变尺度法迭代步骤

设 $$H^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^1 = I + B^0 - C^0$$

$$H^2 = H^1 + B^1 - C^1 = I + (B^0 + B^1) - (C^0 + C^1)$$

………………

$$H^{k+1} = I + \sum_{i=0}^{k} B^i - \sum_{i=0}^{k} C^i \tag{6—52}$$

第 $k+1$ 步的 H^{k+1} 反映了 1，2，…，k 步的信息，这些信息与 $g^i \triangle x^i$（$i=1$，2，…，k）及 H^k 有关。

1．给定起始点 X^0，设梯度允许误差为 ε_1。

2．检验函数值是否已达极小，即下式是否成立

$$\|\nabla f(X^0)\| \leqslant \varepsilon_1 ? \quad 或 \quad \mu \leqslant \frac{f(X^{k+1}) - f(X^k)}{(g^k)^T \triangle X^k} \leqslant 1 - \mu$$

若成立，说明函数值已极小，迭代停止，否则继续下去。

3．$k=0$，令 $H^0 = I$，$g^0 = \nabla f(X^0)$

4．进行一维搜索，确定最优步长参数 λ^k

$$\min_{\lambda} f(X^k + \lambda P^k) = f(X^k - \lambda^k H^k g^k)$$

5．求增量 $\qquad \triangle X^k = -\lambda^k H^k g^k$

$$X^{k+1} = X^k + \triangle X^k$$

6．计算 $\qquad g^{k+1} = \nabla f(X^{k+1})$

$$\triangle g^k = g^{k+1} - g^k$$

7．检验 $\|g^{k+1}\| \leqslant \varepsilon_1$? 或检验 $\dfrac{\triangle X^k}{X^k} \leqslant \varepsilon_2$? ε_2 为给定值。若是，则已得极值点，停机；否则进行下去。

8．$k = N$?

若 $k=N$，则令 $X^1 = X^{N+1}$。说明 N 步未能收敛到极值点。则 $N+1$ 步按梯度法搜索；若 $k<N$，则进行下去。

9．计算 B^k，C^k

及 $$H^{k+1}=H^k+B^k-C^k$$

10. 令 $k=k+1$，转第 4 步求 λ^{k+1}。

[例 1] 用变尺度法求：$\min\ f(X)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$

递推公式： $X^{k+1}=X^k-\lambda^k H^k g^k$

$$H^{k+1}=H^k+B^k-C^k$$

已知 $X^0=\begin{bmatrix}8\\9\end{bmatrix}$， Hesse 阵 $A=\begin{bmatrix}8&0\\0&2\end{bmatrix}$。 $A^{-1}=\begin{bmatrix}0.125&0\\0&0.5\end{bmatrix}$

$$g^k=\begin{bmatrix}8(x_1^k-5)\\2(x_2^k-6)\end{bmatrix}\quad\therefore\quad g^0=\begin{bmatrix}24\\6\end{bmatrix}$$

取 $H^0=I$

$$X^1=X^0-\lambda H^0g^0=\begin{bmatrix}8\\9\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}24\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\9\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}24\\6\end{bmatrix}$$

$$f(X^1)=4[(8-24\lambda)-5]^2+[(9-6\lambda)-6]^2。$$

求最优步长 λ^0：

$$\frac{df(X^1)}{d\lambda}=51-390\lambda^0=0$$

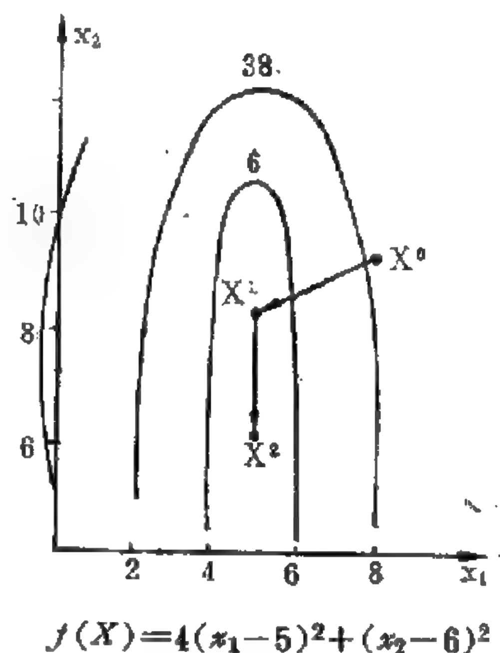
$\lambda^0=0.1307$

则 $X^1=\begin{bmatrix}4.862\\8.215\end{bmatrix}$， $f(X^1)=4.985$

计算第二步，求 $\triangle H^0=B^0-C^0$

$g^1=\begin{bmatrix}-1.108\\4.431\end{bmatrix}$，$\triangle X^0=\begin{bmatrix}-3.13\\-0.785\end{bmatrix}$

$$\triangle g^0=g^1-g^0=\begin{bmatrix}-25.108\\-1.569\end{bmatrix}$$



$f(X)=4(x_1-5)^2+(x_2-6)^2$

图 6—15

$$B^0=\frac{\triangle X^0(\triangle X^0)^T}{(\triangle X^0)^T\triangle g^0}=\begin{bmatrix}0.1227 & 0.0308\\ 0.0308 & 0.0077\end{bmatrix}$$

$$C^0=\frac{H^0\triangle g^0(H^0\triangle g^0)^T}{(H^0\triangle g^0)^T\triangle g^0}=\begin{bmatrix}0.9961 & 0.06224\\ 0.06224 & 0.0039\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad H^1=H^0+B^0-C^0=\begin{bmatrix}0.127 & -0.0314\\ -0.0314 & 1.0038\end{bmatrix}$$

$$X^2=X^1-\lambda H^1 g^1$$

$$=\begin{bmatrix}4.862\\ 8.215\end{bmatrix}-\lambda H^1\begin{bmatrix}-1.108\\ 4.431\end{bmatrix}$$

$$\frac{df(X^2)}{d\lambda}=0,\quad 得\ \lambda^1=0.481$$

代入得

$$X^2=\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix},$$

$$g^2=\begin{bmatrix}3.81\times10^{-7}\\ 2.55\times10^{-9}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

即 X^2 已是极小点。图 6—15 表示计算结果的图解。

$$H^2\approx\begin{bmatrix}0.125 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}=A^{-1}$$

即搜索迭代到极值时，H 已变为 Hesse 阵的逆。

[例 2]

$$\min f(X)=C^TX+\frac{1}{2}X^TQX$$

$$C=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad X^*=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$X^0=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix},\quad \nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}-12\\6\end{bmatrix}$$

$$P^0=-H^0\nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}12\\-6\end{bmatrix}$$

第一步是梯度法，所以和 § 6—3 共轭梯度法例 1 中所得结果相同，

$$\lambda^0=\frac{5}{17},\quad X^1=\begin{pmatrix}\frac{26}{17}\\\frac{38}{17}\end{pmatrix},\quad \nabla f(X^1)=\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\\frac{12}{17}\end{pmatrix}$$

$$\triangle X^0=X^1-X^0=\begin{pmatrix}\frac{26}{17}\\\frac{38}{17}\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{60}{17}\\\frac{-30}{17}\end{pmatrix}$$

$$\triangle g^0=g^1-g^0=\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\\frac{12}{17}\end{pmatrix}-\begin{bmatrix}-12\\6\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{210}{17}\\\frac{-90}{17}\end{pmatrix}$$

$$H^1=H^0+\frac{\triangle X^0(\triangle X^0)^T}{(\triangle X^0)^T\triangle g^0}-\frac{H^0\triangle g^0(H^0\triangle g^0)^T}{(H^0\triangle g^0)^T\triangle g^0}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{17}\begin{bmatrix}4&-2\\-2&1\end{bmatrix}-\frac{1}{58}\begin{bmatrix}49&-21\\-21&9\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{986}\begin{bmatrix}385&241\\241&891\end{bmatrix}$$

$$P^1 = -H^1\nabla f(X^1) = -\frac{1}{986}\begin{bmatrix}385 & 241\\241 & 891\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\frac{6}{17}\\\frac{12}{17}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{9}{29}\\-\frac{21}{29}\end{pmatrix}$$

和共轭梯度法所得结果

$$P^1 = \begin{bmatrix}-90/289\\-210/289\end{bmatrix}$$相似（见 §6—3，例 1）。

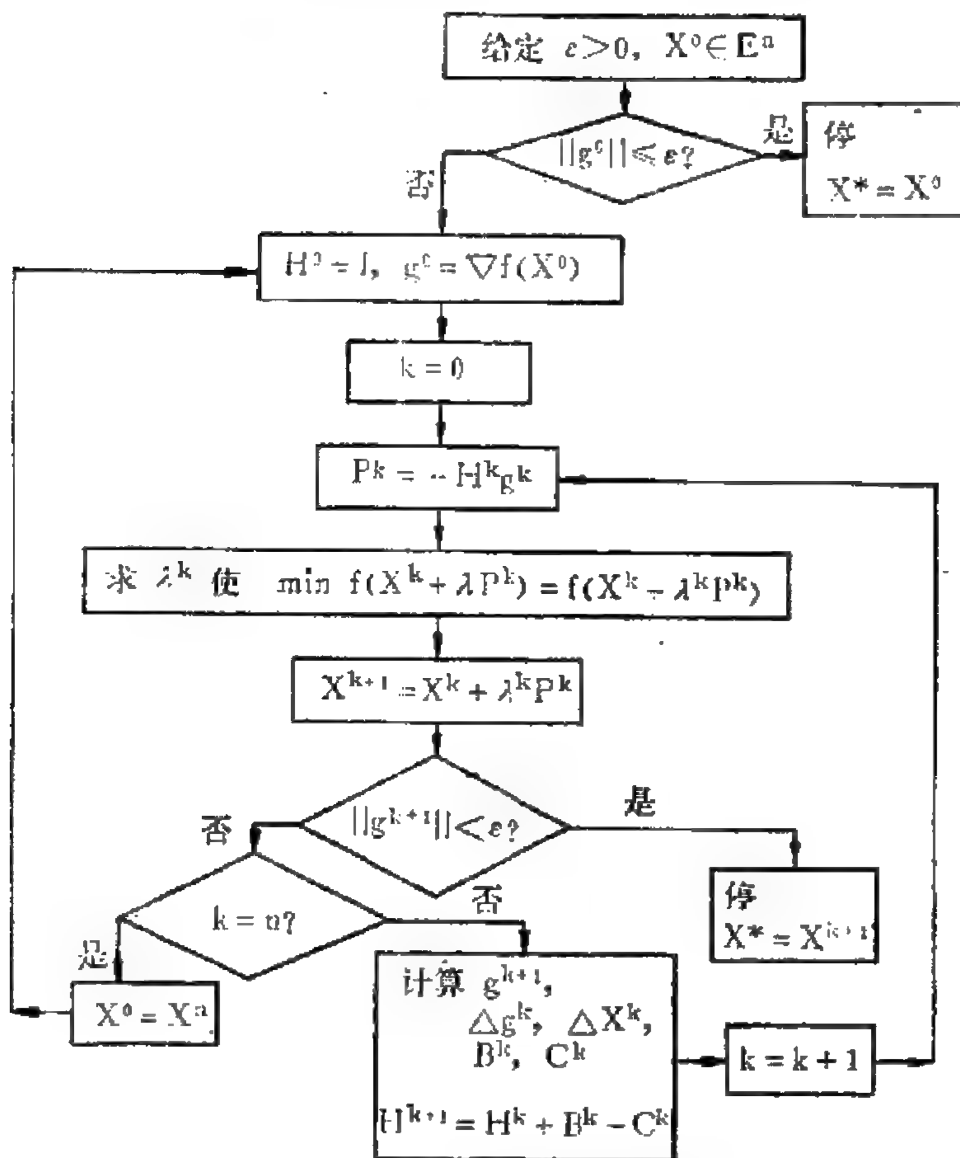


图 6—16　DFP 变尺度法程序框图

可见沿 P^1 方向取最优步长必将到达极值点：

$$X^2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

共轭梯度法和变尺度法产生相同的搜索点列 $\{X^k\}$，因为 P^0、Q 和共轭方向是唯一确定的，对于高维的二次函数，两种算法所得点列 $\{X^k\}$ 也相同。

进一步计算可得， $H^2=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\0.5 & 1.5\end{bmatrix}$即 Q^{-1}。

DFP 变尺度法的程序框图如图 6—16。

四、DFP 法的性质

1. 若 H^k 为正定，则 H^{k+1} 也为正定。

2. 对二次凸函数 $f(X)=X^TAX+C^TX+K$，$X\in E^n$，则有：

(a) 在最优点 H^k 收敛于 $f(X)$ 的 Hesse 阵的逆 A^{-1}，

(b) 前后两步的搜索方向是 A 共轭的，即 DFP 法既是拟牛顿法，也是共轭梯度法。

(c) 在 n 步内迭代收敛到最优值，即具有二次收敛性质。

以下我们以二维为例，证明二次收敛性，即两次迭代以后可以得到二次函数的极小值。

[证]　　$n=2$，$f(X)=X^TAX+C^TX+K$

Hesse 阵为 A。

已知　　$$\triangle g^k=A\triangle X^k=AX^{k+1}-AX^k \tag{6—53}$$

将上式左乘 H^{k+1}

$$H^{k+1}\triangle g^k=H^{k+1}A\triangle X^k=(H^k+B^k-C^k)\triangle g^k \tag{6—54}$$

由（6—44）式　　$$B^k\triangle g^k=\triangle X^k \tag{6—55}$$

由（6—45）式，$$C^k \triangle g^k = Z^k = H^k \triangle g^k \qquad (6\text{—}56)$$

将（6—55）、（6—56）两式代入（6—54）式得

$$H^{k+1} A \triangle X^k = \triangle X^k \qquad (6\text{—}57)$$

上式即为（6—39）式。

由特征向量定义，设 $GU=\lambda U$，G 为 $n\times n$ 矩阵，向量 $U \neq 0$，则 λ 为 G 的特征值，U 为相应的特征向量。由（6—57）式可见，$H^{k+1}A$ 的特征值为 1，$\triangle X^k$ 为相应的特征向量。

$$\left.\begin{array}{l} k=0 \text{ 时，} H^1 A \triangle X^0 = \triangle X^0 \\ k=1 \text{ 时 } \quad H^2 A \triangle X^1 = \triangle X^1 \end{array}\right\} \qquad (6\text{—}58)$$

如果 $f(X^{k+1})$ 在搜索方向 $\triangle X^k$ 为极小，则梯度向量 g^{k+1} 在 $\triangle X^k$ 方向的投影为 0：

$$(\triangle X^k)^T g^{k+1} = 0 \qquad (6\text{—}59)$$

$$k=0,\ (\triangle X^0)^T g^1 = (\triangle X^0)^T A H^1 g^1 = 0$$

又已知 $$\triangle X^k = \lambda^k P^k = -\lambda^k H^k g^k \qquad (6\text{—}60)$$

$k=1$ 时，$\triangle X^1 = -\lambda^1 H^1 g^1$，或 $H^1 g^1 = -\dfrac{\triangle X^1}{\lambda^1}$ 代入（6—59）式得

$$(\triangle X^0)^T A(\triangle X^1) = 0 \qquad (6\text{—}61)$$

向量 $\triangle X^0$ 与 $\triangle X^1$ “A 共轭”，我们已知 $\triangle X^0$、$\triangle X^1$ 是第一步和第二步搜索方向，并是线性独立的，即它们是共轭方向，因此经过两次搜索或两次迭代，DFP 法可求得二元二次函数的极小值。

这个结论可以推广到 n 元二次函数，即 DFP 法有二次收敛性质。如果是非二次的 n 元函数则达到最优点的迭代次数将超过 n 次。

我们再证明另一性质：

对二元二次函数，两次迭代后，矩阵 H 是目标函数二阶偏导数矩

阵 A 的逆。(A 是常阵)。

[证] $H^2A\triangle X^0=(H^1+B^1-C^1)A\triangle X^0$

$$=H^1A\triangle X^0+B^1A\triangle X^0-C^1A\triangle X^0$$

由(6—61)式，$(\triangle X^1)^TA\triangle X^0=0$，故有

$$B^1A\triangle X^0=\frac{\triangle X^1(\triangle X^1)^T}{(\triangle X^1)^T\triangle g^1}A\triangle X^0=0$$

因而 $C^1A\triangle X^0=0$，代入上式

$H^2A\triangle X^0=H^1A\triangle X^0=\triangle X^0$，(见 6—58 式)，又由(6—57)式可知 $H^2A\triangle X^1=\triangle X^1$，即 $\triangle X^0$ 及 $\triangle X^1$ 为 H^2A 的特征向量。

故可写成 $H^2A[\triangle X^0,\ \triangle X^1]=[\triangle X^0,\ \triangle X^1]$，

$\triangle X^0$ 和 $\triangle X^1$ 共轭，线性独立，所以

$H^2A=[\triangle X^0,\triangle X^1][\triangle X^0,\triangle X^1]^{-1}=I$，$H^2=A^{-1}$。[证毕]

DFP 变尺度法的特点

1. DFP 变尺度法是以逐次逼近方法实现 A^{-1} 的计算。
2. 当函数可用二次式近似时，方向矩阵 H 可以很快收敛。
3. 应用于二次函数时，变尺度法和共轭梯度法是一样的，具有二次终结性质。

五、BFGS 算法

六十年代后期在很多人的大量计算实践中发现 DFP 算法在数值稳定性方面存在一些问题。产生数值不稳定的原因是多方面的，例如计算机舍入误差；目标函数中存在非二次项、一维搜索精度不够等等，从而使搜索方向不是共轭的，甚至不是函数下降的方向。

1970 年 Broyden、Fletcher、Goldstein、Shanno 等人导出了更稳定的算法公式，简称 BFGS 变尺度法公式。

令 H_{DFP}^{k+1} 表示用 DFP 算法所得迭代矩阵，则用 BFGS 算法所得迭代矩阵为：

$$H_{BFGS}^{k+1}=H_{DFP}^{k+1}+\frac{1}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}\left\{\frac{(Z^k)^T\triangle g^k}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}\triangle X^k(\triangle X^k)^T\right.$$

$$\left.-\triangle X^k(Z^k)^T-Z^k(\triangle X^k)^T\right\}+\frac{Z^k(Z^k)^T}{(Z^k)^T\triangle g^k}\qquad(6\text{—}64)$$

BFGS 变尺度公式具有如下性质：

1. 若迭代矩阵 H^k 为正定，则 H^{k+1} 也是正定的。

2. 对二次目标函数 BFGS 公式产生共轭搜索方向。

BFGS 公式用于维数较高的问题有更好的稳定性。

小　　结

1. 变尺度算法是用已求得的一阶导数来估计二阶导数，用

$P^k=-H^k\nabla f(X^k)$ 代替 $P^k=-A^{-1}\nabla f(X^k)$

2. 这种算法若应用于二次函数，且 Q 为正定，则所得前后两步的搜索方向是关于 Q 互为共轭的。从而具有二次终结性质——求 E^n 内二次函数极小值点（Q 为正定）最多在 n 步内终结。

3. DFP 迭代公式

$$X^{k+1}=X^k+\lambda^kP^k,\ \|\lambda^kP^k\|\ \text{为最优步长。}$$

$$H^{k+1}=H^k+\frac{\triangle X^k(\triangle X^k)^T}{(\triangle X^k)^T\triangle g^k}-\frac{H^k\triangle g^k(\triangle g^k)^TH^k}{(\triangle g^k)^TH^k\triangle g^k}$$

$$=H^k+\triangle H^k$$

$\triangle H^k$ 称为校正矩阵，

$\|\nabla f(X^k)\|<e$，计算停止。

4. 第一次迭代，$H^0=I$，H^k 为正定，H^{k+1} 满足割线关系式：

$$H^{k+1}=\frac{\triangle X^k}{\triangle g^k}，一维情况下 \ H^{k+1}=\mathrm{ctg}\beta$$

5. 算法具有共轭梯度法的特征，也有拟牛顿法的特征。

§ 6-5 高斯-牛顿最小二乘法

相当广泛的一类最优化问题，其目标函数是若干函数平方和的形式：

$$f(X)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2(X) \tag{6—65}$$

其中 $X\in E^n$，$m\geqslant n$

$\varphi_i(X)$ 一般是非线性函数。

求 $f(X)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i^2(X)$ 为极小的问题称为非线性最小二乘问题。例如在数据处理、选频网络的设计中这类目标函数是常见的（§ 4—1 例 1 及例 3）。

求（6—65）式为极小的最优化问题可用高斯-牛顿最小二乘法。

设 ε 是预先给定的精度要求，如果 $f(X)$ 的极小点 X^* 满足 $|f(X^*)|<\varepsilon$，则 X^* 是下述非线性方程组

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0\\&\varphi_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\varphi_m(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=0\end{aligned} \tag{6—66}$$

的解，因此高斯-牛顿最小二乘法也可用以求解非线性方程组问题。

设 $\varphi_i(X)$ 有连续的一阶偏导数 $(i=1,2,\cdots m, j=1,2,\cdots,n$。)

$$\frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_j} = \nabla \varphi_{ij}(X) \tag{6—67}$$

求 $f(X)$ 极小，相当于求解方程 $\nabla f(X)=0$。由（6—65）可知

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(X)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_1} \varphi_i(X) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_n} \varphi_i(X) \end{pmatrix}$$

$$= 2A^T \Phi(X) \tag{6—68}$$

式中
$$A = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n} = [\nabla \varphi_{ij}(X)] \tag{6—69}$$

$$\Phi(X) = [\varphi_1(X),\ \varphi_2(X),\ \cdots,\ \varphi_m(X)]^T \tag{6—70}$$

若 $f(X)$ 是二次函数，$\nabla f(X)$ 的分量为线性函数，则 $\nabla f(X)=0$ 为线性方程组。

对非线性函数 $\varphi_i(X)$ 可取线性近似，设 X^0 为初始近似解，则

$$\varphi_i(X) = \varphi_i(X^0) + \nabla \varphi_i^T(X^0)(X - X^0)$$

$$= \varphi_i(X^0) + \nabla \varphi_i^T(X^0) \triangle X, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{6—71}$$

或
$$\Phi(X) = \Phi^0 + A^0 \triangle X \tag{6—72}$$

式中
$$A^0 = \nabla \varphi_i^T(X^0) = \left[\frac{\partial \varphi_i(X^0)}{\partial x_j}\right]$$

$$\Phi^0 = \Phi(X^0)$$

于是求 $f(X)$ 极小问题近似为线性最小二乘，即求 $A^0 \triangle X + \Phi^0 = 0$ 的最小二乘解。它只包含 $\varphi_i(X)$ 的函数值及其一阶导数。

若矩阵 A^0 的 n 个列向量线性独立，即 A^0 矩阵的秩为 n，则 $A^{0T}A^0$ 为对称正定阵，从而其逆 $(A^{0T}A^0)^{-1}$ 存在。于是上述方程有唯一解

$$\triangle X = -(A^{0T}A^0)^{-1}A^{0T}\Phi^0 \tag{6—73}$$

$X^1 = X^0 + \triangle X$ 就是解的第一次近似值。以 X^1 代替 X^0 重复上述步骤，经过若干次迭代，直到 $|\triangle X^k|<\varepsilon$，$\varepsilon$ 为预先指定的精度要求。

上述方法是将非线性最小二乘问题逐次化为一系列线性最小二乘问题来求解，就是通常所述的最小二乘法。

上述高斯-牛顿最小二乘法利用目标函数为非线性函数平方和的特点，用 A^TA 近似代替牛顿法中 $f(X)$ 的二阶导数阵，大大减小了计算量。但这种方法对初始点 X^0 的选择要求较严格，如果 X^0 与极小值点 X^* 相差太远，则算法往往失败。其原因是这种算法是线性逼近法，当 X^0 距离 X^* 甚远时，线性逼近就无效了。

改进的高斯-牛顿最小二乘法是：求出 X^k 的校正量 $\triangle X^k$ 以后，不把 $X^k + \triangle X^k$ 作为解的第 $k+1$ 次近似，而将 $\triangle X^k$ 作为下一步搜索方向。从 X^k 点出发，沿该方向用一维搜索方法求函数 $f(X)$ 的极小点，即求 λ^k 使 $f(X^k + \lambda^k\triangle X^k)$ 为极小，然后令

$$X^{k+1} = X^k + \lambda^k\triangle X^k \tag{6—74}$$

将 X^{k+1} 代替 X^k 作为第 $k+1$ 次近似，重复上述过程，直到 $|\lambda^k\triangle X^k|<\varepsilon$ 为止，这时 $X^* = X^{k+1}$，$f^*(X) = f(X^*)$。λ^k 称为第 k 步的最优步长参数（或最优步长因子）。

§ 6-6 几种方法的比较

一、以二次函数为例对本章所述前四种方法进行比较

设从 X^0 出发。

梯度法——每步以负梯度方向 $-g^k$ 为搜索方向，要走很多步

才能到达最优点 X^* 附近，走一步以后得 $X^1=X^0-\lambda P^0$，$P^0=g_0$。

牛顿法——从 X^0 沿负梯度方向转一角度 A^{-1}，一步可走到 X^*，因为它用了一次和二次梯度信息，$X^1=X^*=X^0-A_0^{-1}g^0$，$g^0=\nabla f(X^0)$。修正的牛顿法，$X^1=X^0-\lambda A_0^{-1}g^0$。

共轭梯度法——从 X^1 取 $-g^1$ 与 P^0 的组合作为搜索方向 P^1，P^1 与P^0 对 A 共轭，综合利用了本步与前步梯度的信息，两步达最优点。

DFP 变尺度法——对二次函数第一步用梯度法，$P^0=-Ig^0$，第二步沿共轭方向 $P^1=-H^1g^1$，两步到达最优点，到达最优点后，$P^2=-H^2g^2=-A^{-1}g^2$。

图 6—17 表示二次函数求极值的不同搜索方向。共轭梯度法及变尺度法第 2 步的搜索方向 S^1 都是沿共轭方向。

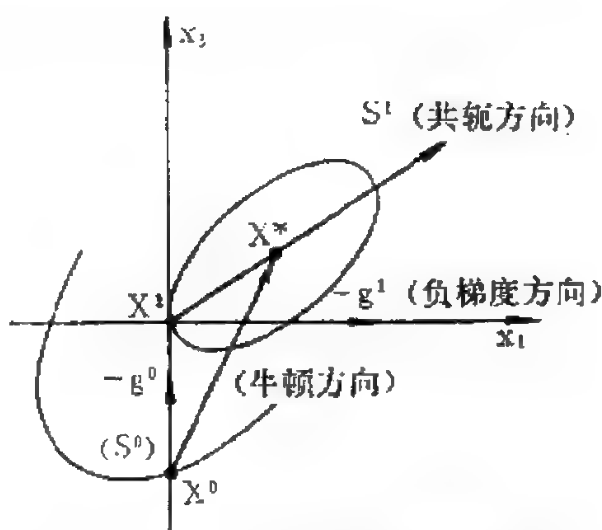


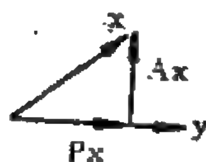
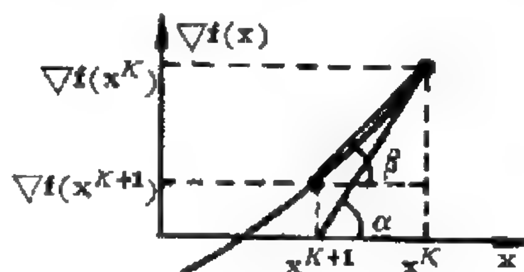
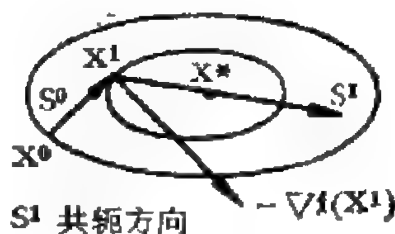
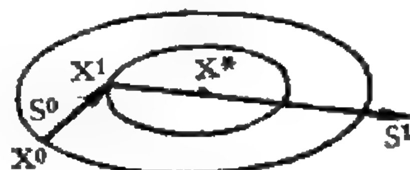
图 6—17 不同方法的搜索方向

四种方法的搜索方向如下表

方 法 名 称	搜索方向 P^{k+1}
梯度法	$-g^{k+1}$
牛顿法	$-A_{k+1}^{-1}g^{k+1}$
共轭梯度法	$-g^{k+1}+\beta^kP^k$
DFP 变尺度法	$-H^{k+1}g^{k+1}$

二、以梯度法为基础的无约束最优化方法比较表

	梯度法（1847）	牛顿法
P^k（第 k 步搜索方向） $X^{k+1}=X^k+\lambda^k P^k$	$-\nabla f(X^k)$ 梯度向量 $\nabla f(X)=\dfrac{\partial f}{\partial X}$	$-A_k^{-1}\nabla f(X^k)$ 正定 Hesse 阵 $A_k=\nabla^2 f(X^k)$
几何解释	$\mathrm{tg}\theta=\left.\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right\|_{x^k}$ $=\nabla f(x^k)$	$\mathrm{ctg}\,\alpha=A_k^{-1}$ 以 x^k 点切线逼近梯度曲线
二次函数 $f(X)=K+C^T X+\frac{1}{2}X^T Q X$ K 为常数 C 为常向量 Q 为正定常阵 X^0 初始点 X^* 最优点	S^0,S^1,负梯度方向	S^0 牛顿方向
说　明	$\nabla f(X^k)=C+QX^k$ 除球形等高面函数外，其它函数收敛都很慢。	$\nabla^2 f(X^k)=Q=A$ $X^*=-Q^{-1}C$ $=X^0-Q^{-1}\nabla f(X^0)$ 非二次函数可能不收敛。
应用范围	小规模，变量数 $n<10$，开局	收　　局

共轭梯度法（FR 法）1964	变尺度法（DFP 法）1959
$-\nabla f(X^k)+\beta^{k-1}P^{k-1}$	$-H^k\nabla f(X^k)$
$\beta^{k-1}=\dfrac{\|\nabla f(X^k)\|^2}{\|\nabla f(X^{k-1})\|^2}$	$H^{k+1}=H^k+B^k-C^k$ $H^0=I$，$H^n=A^{-1}$ B^k，C^k 为 $n\times n$ 对称阵
 	
$Ax\perp y$ $(Ax, y)=0$，$A=\sqrt{1-P^2}$ x 和 y 对 A 共轭	以 ctgβ 逼近 ctgα 即令 ctg$\beta=H^k$，ctg$\alpha=A^{-1}$
 S¹ 共轭方向	 S¹ 共轭方向
$P^1=-\nabla f(X^1)+\beta^0P_0$ $(P^1)^TQP^0=0$ 有二次终结性质：开局，负梯度方向；收局，共轭梯度方向。	$H^0=I$，$H^2=Q^{-1}=A^{-1}$ 有二次终结性质：开局，负梯度方向；收局，牛顿方向。
大规模，$n\geqslant 200$	中小规模 $n=50\sim 150$

三、无约束极值问题计算举例

问题 $\min\ f(X)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2=\frac{1}{2}X^TQX$

$$Q=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

初始点 $X^0=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$，最优点 $X^*=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，$f(X^*)=0$。

梯度为 $$\nabla f(X^k)=\begin{bmatrix}2x_1+2x_2\\ 2x_1+4x_2\end{bmatrix}_{X=X^k}$$

$$X^{k+1}=X^k+\triangle X^k=X^k+\lambda^kP^k,\ \left(\lambda^kP^k=\alpha^kS^k,\ S^k=\frac{P^k}{||P^k||}\right)$$

P^k 为搜索方向，S^k 为沿搜索方向单位向量，α^k 为步长，$\lambda^k=\alpha^k/||P^k||$。

1. 牛顿法

Hesse 阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$X^1=X^0-A^{-1}\nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

∴ 牛顿法从 $\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}$ 出发，一步到达最优点 $\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，步长为 $||A^{-1}\nabla f(X^0)||=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$。

2. 最优梯度法

k	X^k	$f(X^k)$	$\nabla f(X^k)$	S^k	α^*
0	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$	-1.2649
1	$\begin{bmatrix} 1.4 \\ -0.8 \end{bmatrix}$	1	$\begin{bmatrix} 1.2 \\ -0.4 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$	-1.2649
2	$\begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.4 \end{bmatrix}$	0.2	$\begin{bmatrix} -0.4 \\ -1.2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$	-0.253
3	$\begin{bmatrix} 0.28 \\ -0.16 \end{bmatrix}$	0.04	$\begin{bmatrix} 0.24 \\ -0.08 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$	-0.253
4	$\begin{bmatrix} 0.04 \\ -0.08 \end{bmatrix}$	0.008	$\begin{bmatrix} -0.08 \\ -0.24 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$	-0.0506
5	$\begin{bmatrix} 0.056 \\ -0.032 \end{bmatrix}$	0.0016	$\begin{bmatrix} 0.048 \\ -0.016 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$	-0.0506
6	$\begin{bmatrix} 0.008 \\ -0.016 \end{bmatrix}$	0.00032	$\begin{bmatrix} -0.016 \\ -0.048 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{40}}\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$	-0.01012

本例中 $f(X^k)$ 以 0.2 的速率线性下降，即 $f(X^k)=(0.2)^k f(X^0)$，当 $k\to\infty$ 时，$f(X^k)\to 0$。应用最优梯度法，前后两步的搜索方向相互垂直。

3. 共轭梯度法

k	0	1	2
X^k	$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.4\\-0.8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$f(X^k)$	5	1	0
$\nabla f(X^k)$	$\begin{bmatrix}-2\\-6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.2\\-0.4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$\Vert\nabla f(X^k)\Vert^2$	40	1.6	
β^k		0.04	
P^k	$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1.12\\0.64\end{bmatrix}$	
$f(X^k+\lambda P^k)$	$100\lambda^2-40\lambda+5$	$0.64\lambda^2-1.6\lambda+1$	
λ^*	0.2	1.25	

可见共轭梯度法第一步沿负梯度方向，第二步沿共轭梯度方向，两步达最优点 $X^*=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$。

4. DFP 变尺度法

k	0	1	2
X^k	$\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.4\\-0.8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$f(X^k)$	5	1	0
B^k	—	$\begin{bmatrix}0.02 & 0.06\\0.06 & 0.18\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.98 & -0.56\\-0.56 & 0.32\end{bmatrix}$
C^k	—	$\begin{bmatrix}0.2461 & 0.4307\\0.4307 & 0.7538\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.7538 & -0.4307\\-0.4307 & 0.2461\end{bmatrix}$
H^k	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.7738 & -0.3708\\-0.3708 & 0.4262\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & -0.5\\-0.5 & 0.5\end{bmatrix}$

k	0	1	2
$\nabla f(X^k)$	$\begin{bmatrix}-2\\-6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.2\\-0.4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$\|\nabla f(X^k)\|^2$	40	1.6	0
P^k	$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1.0769\\0.6153\end{bmatrix}$	—
$f(X^k+\lambda P^k)$	$100\lambda^2-40\lambda+5$	$0.5917\lambda^2-1.5384\lambda+1$	—
λ^*	0.2	1.3	—
$\triangle X^k$	$\begin{bmatrix}0.4\\1.2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1.4\\0.8\end{bmatrix}$	—
$\triangle g^k$	$\begin{bmatrix}3.2\\5.6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1.2\\0.4\end{bmatrix}$	—

DFP 变尺度法第一步沿负梯度方向，第二步方向与共轭梯度方向相近，两步达最优点。

将以上结果综合，可见对二次函数极值问题：

牛顿法一步达最优， $P^0=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$， $\lambda^0=\sqrt{5}$。

共轭梯度法两步达最优，

$$P^0=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}, \quad \lambda^0=0.2$$

$$P^1=\begin{bmatrix}-1.12\\0.64\end{bmatrix}, \quad \lambda^1=1.25$$

变尺度法两步达最优，

$$P^0=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}, \quad \lambda^0=0.2$$

$$P^1=\begin{bmatrix}-1.0769\\0.6153\end{bmatrix}, \quad \lambda^1=1.3$$

$$H^0 = I$$

$$H^1 = \begin{bmatrix} 0.7738 & -0.3708 \\ -0.3708 & 0.4262 \end{bmatrix}$$

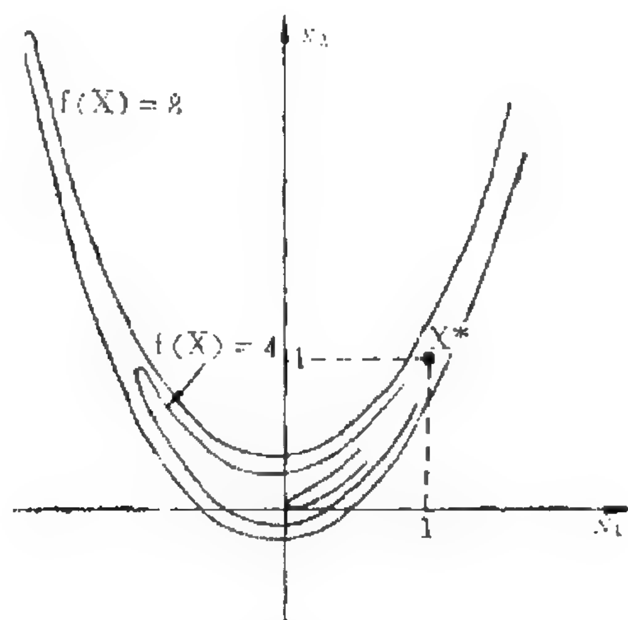
$$H^2 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

梯度法则走很多步，收敛速率是线性的。

1960 年 Rosenbrock 提出了一个检验各种算法的标准目标函数，称为试验函数：[注]

$$f(X) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

这个函数的特点是：每个等高面是一个窄长弯曲的谷道，外形象香蕉，又称为香蕉函数，其最优点为 $X^* = (1,\ 1)^T$，$f(X^*) = 0$。（见图 6—18）。



图（6—18） Rosenbrock 试验函数

[注] 其他的试验函数还很多，详见本章附录。

有人用四种方法在这个函数上进行试验，初始点均选为 $X^0=(-1, 1)^T$，结果如下[42]：

1. 最速下降法

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	-1.000	1.000	4.00
1	-0.995	1.000	3.99
2	-0.995	0.990	3.98
3	-0.990	0.990	3.97
4	-0.990	0.979	3.96
5	-0.984	0.979	3.95
6	-0.984	0.968	3.94
7	-0.979	0.968	3.93
8	-0.978	0.956	3.91
9	-0.978	0.956	3.90
10	-0.972	0.944	3.89
20	-0.935	0.872	3.75
30	-0.899	0.806	3.61
40	-0.862	0.741	3.47
50	-0.824	0.678	3.33
60	-0.784	0.613	3.18
70	-0.742	0.550	3.03
80	-0.698	0.487	2.88
90	-0.650	0.422	2.72
100	-0.594	0.352	2.54

[注] 收敛很慢，迭代 100 次，停机。

2. 牛顿法

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	-1.000	1.000	4.00
1	1.000	-3.000	1599.99
2	1.000	0.999	0.00
3	1.000	1.000	0.00

[注] 牛顿法收敛最快。

3. 共轭梯度法

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	-1.000	1.000	4.00
1	-0.996	1.000	4.00
2	-0.983	0.988	3.99
3	-0.472	0.248	3.98
4	-0.451	0.204	2.23
5	-0.358	0.100	2.11
6	-0.300	0.049	1.92
7	-0.249	0.010	1.86
8	-0.213	-0.012	1.83
9	-0.171	-0.035	1.81
10	-0.146	-0.047	1.79
15	-0.011	-0.082	1.70
20	0.124	-0.077	1.63
30	0.365	0.029	1.52
40	0.646	0.307	1.34
45	0.829	0.579	1.20
50	1.061	1.027	1.04

续上表

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1、x_2)$
55	1.402	1.901	0.65
60	1.555	2.420	0.31
65	1.541	2.387	0.31
70	1.087	1.173	0.02
71	1.007	1.012	0.01
72	1.004	1.009	0.00
73	1.004	1.009	0.00

[注] 用共轭梯度法只进行 4 次迭代，就使函数值减少到最速下降法 100 次迭代所得结果。

4. DFP 变尺度法

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1、x_2)$
0	−1.000	1.000	4.00
1	−0.995	1.000	4.00
2	−0.775	0.562	3.99
3	−0.664	0.382	3.31
4	−0.254	0.029	3.11
5	−0.267	0.065	1.70
6	−0.082	−0.026	1.61
7	0.105	−0.029	1.28
8	0.128	0.021	0.96
9	0.269	0.050	0.76
10	0.371	0.106	0.58
11	0.457	0.221	0.50

续上表

迭代次数	x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
12	0.599	0.300	0.31
13	0.621	0.366	0.21
14	0.836	0.690	0.18
15	0.828	0.685	0.04
16	0.912	0.825	0.03
17	0.961	0.927	0.01
18	0.986	0.972	0.00
19	1.000	1.000	0.00
20	0.999	0.999	0.00

最速下降法，100 次迭代计算，$f(X)=2.54$，远没有到最优值。

牛顿法，3 次迭代到达最优点。但如果初始点选得不合适，不能保证收敛。

共轭梯度法，73 次迭代接近最优点，$x_1=1.004$，$x_2=1.009$。

DFP 变尺度法，20 次迭代得最优点。

习　　题

1．应用最优梯度算法证明下述二次函数满足关系式：

$$[\nabla f(X^0)]^T \nabla f(X^1)=0 \qquad X^0=[4,\ 4]^T$$

$$f(X)=\frac{1}{2}(x_1^2+2x_2^2)$$

用图标明梯度向量关系。

2．已知 $U=\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$，$V=\begin{bmatrix} -72/289 \\ -168/289 \end{bmatrix}$，向量 U 及 V 对下述正定阵 Q 是否互为共轭？

a. $Q=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ b. $Q=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. 设函数 $f(X)=(x_1-x_2+x_3)^2+(-x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2$，用共轭方向法，第一步迭代，三次搜索方向依次为：

$$S_1^0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad S_2^0=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad S_3^0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第二步迭代搜索方向各为

$$S_1^1=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad S_2^1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad S_3^1=\begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \\ -2/9 \end{bmatrix}$$

a. 问两步内能否搜索到极值点 $[0, 0, 0]^T$，为什么？

b. 如果希望两步内搜索到极值点，则 S_3^1 应如何修改？

[提示]：可令 $S_3^1=\begin{bmatrix} a \\ -2/3 \\ -2/9 \end{bmatrix}$，$a$ 为待定常数。

4. 用牛顿法求 $f(X)=\frac{3}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1x_2-2x_1$ 的极小值。证明从任何起始点出发，用牛顿法一次迭代均可求出该函数极小值。

[提示]：可令 $X^0=\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$，求 X^1。

5. 用共轭梯度法求正定二次型 $f(X)$ 的极小值

$$f(X)=\frac{1}{2}X^TQX,\quad Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ 设\ X^0=\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

迭代计算两步。

6. 用 DFP 变尺度法求 $f(X)=\frac{1}{2}X^TQX$ 的极小值，迭代计算两步。

$$Q=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\quad X^0=[10,\ 10]^T$$

计算 H^1，H^2，并与 A^{-1} 比较。

A 为 Hesse 阵。

附录　考核无约束最优化算法的几种试验函数

	$f(X)$	$(X^0)^T$	$f(X^*)$	$(X^*)^T$
1.	$100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$	$(-1.2,1)$	0	$(1,1)$
2.	$(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$	$(-1.2,1)$	0	$(1,1)$
3.	$(x_2-x_1^2)^2+100(1-x_1)^2$	$(-1.2,1)$	0	$(1,1)$
4.	$100(x_2-x_1^3)^2+(1-x_1)^2$	$(-1.2,1)$	0	$(1,1)$
5.	$[1.5-x_1(1-x_2)]^2+[2.25-x_1(1-x_2^3)]^2+[2.625-x_1(1-x_2^3)]^2$		0	$(3,1/2)$
6.	$(x_1+10x_2)^2+5(x_3-x_4)^2+(x_2-2x_3)^4+10(x_1-x_4)^4$	$(-3,-1,0,1)$	0	$(0,0,0,0)$
7.	$100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2+90(x_4-x_3^2)^2+(1-x_3)^2+10.1(x_2-1)^2+(x_4-1)^2+19.8(x_2-1)(x_4-1)$	$(-3,-1,-3,-1)$	0	$(1,1,1,1)$

第七章　有约束最优化问题的数值解法

前一章讨论了以梯度法为基础的无约束最优化问题的数值算法，其可行解域是整个欧氏空间。

本章将介绍有约束最优化问题的数值算法。问题的标准形式是

$$\min \quad f(X)$$

$$g_i(X) \leqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

对于等式约束的最优化问题，其可行解域在约束集合上。古典的方法是拉格朗日乘子法。罚函数法是一种数值解法，它是将等式约束下的最优化问题化为无约束的最优化问题，随着罚因子取值的变化，最优解也不断地改变，最后收敛到原问题的最优解。因此这种方法是要求解一系列的无约束极值问题，可以用解析法或者前两章介绍的任何一种数值方法求解。

对于不等式约束的最优化问题，可行解域限制在约束集合内或约束集合上。处理这类问题有两种方法：

1．　间接法。罚函数法是其中的一种。包括内点法和外点法。

2．　直接法。其中包括：

a．　沿约束边界寻优法——在可行域内选择一个起始点，沿目标函数梯度方向前进，到达约束边界时，沿边界移动搜索。

b．　近似规划法——或称线性逼近法，将非线性规划问题近似为线性规划问题，逐次近似求解。

c．　可行方向法——每次迭代包括两步，第一步是在可行域内某点寻找有用的可行方向，第二步沿该方向确定一个合适的步长。

d．　梯度投影法——适用于线性约束的非线性规划问题。它要

求先决定目标函数负梯度在线性约束集合上的投影，再据以确定搜索方向。

下面我们先介绍罚函数法，然后再介绍其它各种方法。

§ 7-1　用罚函数法求解等式约束最优化问题

罚函数法是应用最广泛的一种求解非线性规划问题的数值解法，它的实质是将有约束的最优化问题通过罚因子的选择变为一系列求罚函数的极小值，从而将原问题转化为求解一系列无约束极值问题，称为序贯无约束极小化方法（Sequential Unconstraied Minimization Technique），简称 SUMT。

设最优化问题为

$$\min\ f(X)$$

$$g_i(X)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

图 7—1 表示只有一个等式约束时的最优解，可行解域就是约束方程 $g(X)=0$。

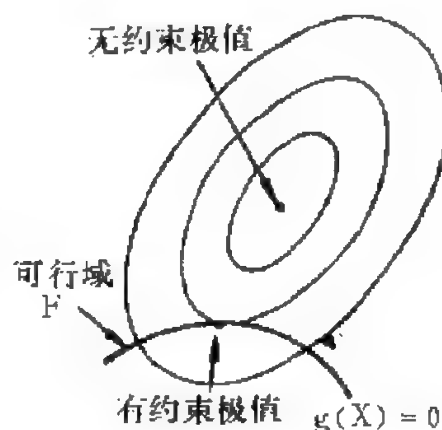


图 7—1 有等式约束的最优解

罚函数法是将原目标函数 $f(X)$ 增广为一个新的函数，称为罚函数 P

$$P(X、M_k)=f(X)+M_k\sum_{i=1}^{m}[g_i(X)]^2 \qquad (7\text{—}1)$$

M_k 是一个很大的正数，称为罚因子或罚参数。当 $g_i(X)\neq 0$，即不满足约束等式时，罚函数的值 $P(X、M_k)$ 将很大，只有当 $g_i(X)=0$ 时，罚函数 P 才等于原函数 $f(X)$，因此罚因子 M_k 的引入相当于对不遵守等式约束的某种惩罚。

$M_k\sum_{i=1}^{m}[g_i(X)]^2$ 称为罚项。如果对不同的约束方程加不同的

权，则（7—1）式中的罚项应改为

$$\sum_{i=1}^{m} M_i [g_i(X)]^2$$

式中 M_i 表示对第 i 个约束所加的权因子（罚因子）。

（7—1）式中 $P(X, M_k)$ 是约束函数与目标函数 $f(X)$ 的组合，故称为复合函数。求 $P(X, M_k)$ 的极小值是一个无约束最优化问题：

$$\min P(X, M_k) = \min\left\{ f(X) + M_k \sum_{i=1}^{m} [g_i(X)]^2 \right\}$$

它等价于求原函数 $f(X)$ 在等式约束 $g_i(X)=0$ 下的最优化问题。

$P(X, M_k)$ 的最优点与 M_k 有关，记作 $X_k^* = X^*(M_k)$，这样，每一步迭代，选择一个罚因子，M_k 表示第 k 步迭代时所取的罚因子，而 X_k^* 则表示第 k 步迭代时所得无约束最优化问题 $\min\ P(X, M_k)$ 的最优解。

显见 M_{k+1} 应大于 M_k，即随着迭代过程的进展，，罚因子越取越大，迫使 $g_i(X)$ 趋近于零，才能使 $P(X, M_k)$ 为极小。最后 X_k^* 收敛于 $f(X)$ 的最优解，这时一定满足 $g_i(X)=0$ 的约束条件。

为了说明罚函数法的实质，我们举一个最简单的例子，并用解析法求解。

［例］ $\min\quad f(X) = x_1^2 + x_2^2,\ X \in E^2$

$$g(X) = x_2 - 1 = 0$$

构造罚函数

$$P(X, M_k) = x_1^2 + x_2^2 + M_k(x_2 - 1)^2$$

求上式的极小值，用解析方法：

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=0, \qquad 2x_1=0, \qquad x_1^*=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=0, \qquad 2x^2+2M_k(x_2-1)=0, \qquad x_2^*(M_k)=\frac{M_k}{1+M_k}$$

随罚因子 M_k 选取不同，$x_2^*(M_k)$ 也不同，下表列出按上式计算的结果。

M_k	0	1	2	5	10	……	∞
$x_2^*(M_k)$	0	0.5	2/3	0.833	0.91	……	1

$M_k=0$ 的情况实际上就是求 $f(X)$ 的无约束极值。当 M_k 增大时，最优解 x_2^* 以非线性形式向约束方程 $x_2-1=0$ 移动，见图7—2。

当 $M\to\infty$ 时，$x_2^*\to1$，即满足等式约束 $x_2-1=0$。

这时 $f(X^*)=P(X^*)=1$。

应用数值法时，先取一个初始的罚因子 M_1，求第一个罚函数 $P(X, M_1)$ 极小值，得第一步的无约束最优解 X_1^*，增大罚因子，第二步迭代取 M_2，再求第二个罚函数 $P(X, M_2)$ 极小值，得第二个无约束最优解 X_2^*，……直到满足等式约束为止。

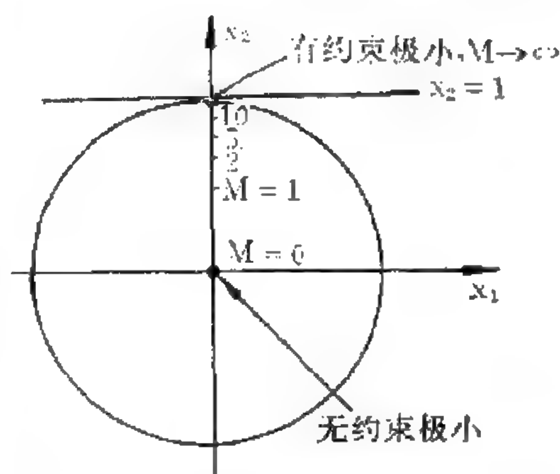


图 7—2 罚函数法求等式约束最优化问题 $f(X)=x_1^2+x_2^2$ $g(X)=x_2-1=0$

罚函数法求解有等式约束的最优化问题与古典的拉格朗日法是很相似的，因此我们可以找出罚因子M与拉格朗日乘子 λ 之间的关系。

令拉格朗日函数为

$$L(X, \lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X)$$

罚函数为

$$P(X, M)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}M_i[g_i(X)]^2$$

取，$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0$，得

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}=-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_i} \tag{7—2}$$

取 $\frac{\partial P}{\partial x_i}=0$，得

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}=-2\sum_{i=1}^{m}M_i g_i(X)\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_i} \tag{7—3}$$

由（7—2），（7—3）式可得

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_i}=2\sum_{i=1}^{m}M_i g_i(X)\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_i}$$

或 $$g_i(X)=\frac{\lambda_i}{2M_i} \tag{7—4}$$

上式表示在极值点附近，罚因子 M_i、拉格朗日乘子 λ_i 和约束函数 $g_i(X)$ 三者的关系。

用拉格朗日乘子法，在 $\lambda_i=0$ 时得到原目标函数的 $f(X)$ 的无约束最优点，当 λ_i 为最优时得到拉格朗日函数 $L(X、\lambda)$ 的鞍点，即 $f(X)$ 在等式约束下的极小值。

用罚函数法，罚因子 $M=0$ 时，得到 $f(X)$ 的无约束最优

点，当 M 充分大或趋于 ∞ 时，收敛到函数 $f(X)$ 在等式约束下的最优点。

§ 7-2 SUMT 外点法

应用罚函数法求解不等式约束的非线性规划问题有有两大类

一、外点法

构造罚函数以后，在搜索无约束极值点的过程中，搜索点列 X^1、X^2、…从可行解域外逐步向最优点 X^* 逼近。称为 SUMT 外点法

二、内点法

搜索极值点过程中，搜索点列 X^1、X^2、…终始位于可行解域内，并逐步向最优点 X^* 逼近，称为 SUMT 内点法。

图 7—3 表示不等式约束的最优化问题用罚函数法求解时，搜索点列 X^1、X^2、… 所处的位置，图 7—3*a* 为内点法，图 7—3*b* 为外点法。两种方法罚函数的形式是不同的。

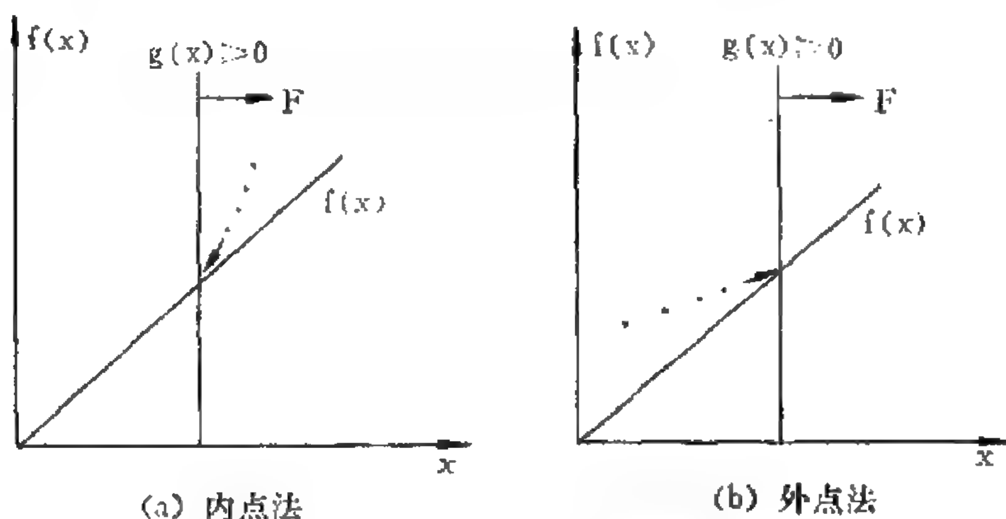


图 7—3 *SUMT* 法的搜索过程

本节介绍外点法。

不等式约束的最优化问题为：

$$\min \quad f(X) \qquad X \in E^n \tag{7—5}$$

$$g_i(X) \leqslant 0 \quad i=1, 2, \cdots, m$$

构造罚函数

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} [g_i(X)]^2 u_i(g_i) \tag{7—6}$$

式中 r_k 为第 k 步迭代时的罚因子，$r_{k+1} > r_k$

$u_i(g_i)$ 为单位阶跃函数。

$$u_i(g_i) = \begin{cases} 0, \text{若 } g_i(X) \leqslant 0 & \text{满足约束} \\ 1, \text{若 } g_i(X) > 0 & \text{不满足约束} \end{cases} \tag{7—7}$$

如果对不同约束加不同的权，则（7—6）式也可表示为：

$$P(X, r_k) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} r_{ki} [g_i(X)]^2 u_i(g_i)$$

式中 r_{ki} 为对应于第 i 个约束第 k 步迭代时所取的罚因子。

（7—6）式也可用下式表示，二者是等同的。

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \{max[g_i(X), 0]\}^2$$

式中 $max[(g_i X), 0]$ 表示在 $g_i(X)$ 和 0 之间选择最大者：

$$max[g_i(X), 0] = \begin{cases} 0, & \text{若 } g_i(X) \leqslant 0\text{，满足约束} \\ g_i(X), & \text{若 } g_i(X) > 0\text{，不满足约束} \end{cases}$$

另一种罚函数形式为

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k^{-1} \sum_{i=1}^{m} g_i^2(X) u_i(g_i), \quad r_k > r_{k+1}$$

如果（7—5）式中不等式约束为 $g_i(X)\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots m$ 则可以将它变换为 $\leqslant 0$ 的形式：

$$-g_i(X)\leqslant 0$$

在罚函数中 $g_i(X)$ 的符号为 + 或 −，由 $g_i(X)\leqslant 0$ 或 $\geqslant 0$ 决定。

当搜索点列 $\{X^k\}$ 在可行解域内，$u_i(g_i)=0$，或 $max[g_i(X), 0]=0$，如果 $\{X^k\}$ 在可行解域外，即这时没有满足约束，我们令 $u_i(g_i)=1$ 或 $max[g_i(X), 0]=g_i(X)$，也即这时将不等式约束按等式约束处理，罚因子 r_k 起作用，因此如果 $\{X^k\}$ 在可行解域外而又远离边界，则 $P(X, r_k)$ 将会很大，罚因子这时的作用是不让 X^k 远离边界。

[例 1]　min　$f(x)=x$

$$g(x)=x\geqslant 0$$

令约束为 $-x\leqslant 0$

构造罚函数：

$$P(x, r_k)=f(x)+r_k x^2 u(g) \tag{7—8}$$

$$\left.\begin{aligned} P(x, r_k)&=x+r_k x^2 & x<0 \\ P(x, r_k)&=x & x\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{7—9}$$

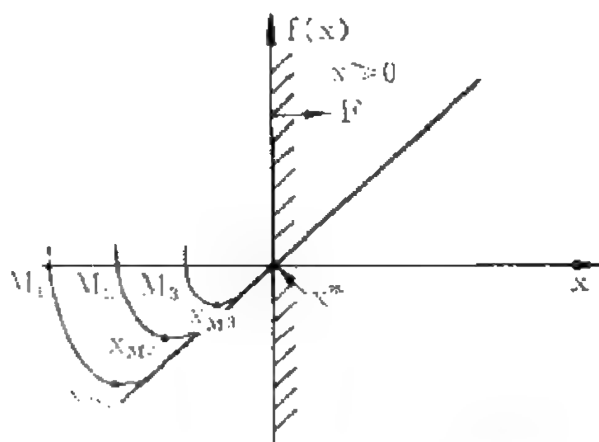


图 7—4　$SUMT$ 外点法的例子
$f(x)=x$，$g(x)=x\geqslant 0$

用解析法求 $P(x, r_k)$ 的无约束极值

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0，\ 1+2r_k x=0$$

$$x^*(r_k)=x_k^*=-\frac{1}{2r_k}$$

当 $r_k \to \infty$ 时，$x_k^* \to 0$，它就是 $f(X)$ 在不等式约束下的极值点。

图 7—4 表示用 SUMT 外点法求解最优点的过程，M_1、M_2、M_3 分别表示不同 r_k 时函数 $x + r_k x^2$ 的图形，这是抛物线，只有当 $r_k \to \infty$ 时，$x \to 0$ 即满足原问题的不等式约束。由图可见，迭代过程中最优解 $x_k^* = x^*(r_k)$ 由非可行解域逐步向约束边界收敛逼近。这就是外点法的名称由来。

每步迭代，选取不同的罚因子 r_k，因此罚函数法的实质是将原来有不等式约束的最优化问题转化为求解一系列罚函数 $P(X, r_k)$ 的无约束最优化问题。这就是为什么罚函数法又称 SUMT 法的原因，迭代开始以前，可以选择较小的初始罚因子 r_1，以后再逐步加大罚因子，取 $r_2 > r_1$，$r_3 > r_2$，…，$r_{k+1} > r_k$…。

下面再举两个例子。

[例 2] 最优化问题为

$$\max \quad x_1 \quad 或 \quad \min \ (-x_1)$$

$$g_1(X) = (x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2) \leqslant 0$$

$$g_2(X) = (x_1 - 1)^3 + (2 - x_2) \leqslant 0$$

$$g_3(X) = x_1 \geqslant 0$$

$$g_4(X) = x_2 \geqslant 0$$

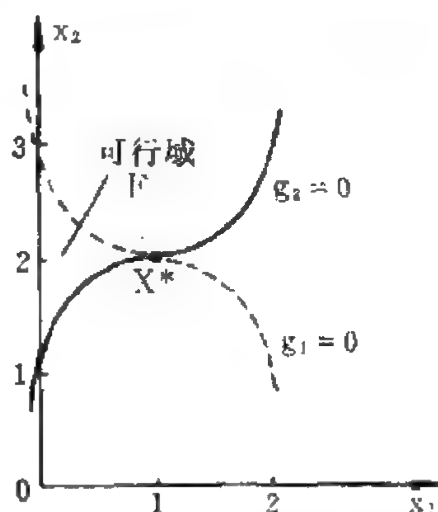


图 7—5 例 2 的图解

构造罚函数

$$P(X, r_k) = -x_1 + r_{k1}[(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)]^2 u_1(g_1) + r_{k2}[(x_1 - 1)^3 + (2 - x_2)]^2 u_2(g_2) + r_{k3} x_1^2 u_3(g_3) + r_{k4} x_2^2 u_4(g_4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = -1 + 6r_{k1}[(x_1 - 1)^3 + (x_2 - 2)](x_1 - 1)^2 u_1(g_1) + 6r_{k2}[(x_1 - 1)^3 + (2 - x_2)](x_1 - 1)^2 u_2(g_2) + 2r_{k3} x_1 u_3(g_3) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2r_{k1}[(x_1-1)^3+(x_2-2)]u_1(g_1)$$

$$-2r_{k2}[(x_1-1)^3+(2-x_2)]u_2(g_2)+2r_{k4}x_2u_4(g_4)=0$$

式中 r_{k1}、r_{k2}、r_{k3}、r_{k4} 分别表示第 k 步时对应于约束函数 g_1、g_2 g_3、g_4 的权因子。

对于第一象限中（即满足 $x_1\geqslant0$，$x_2\geqslant0$）可行解域 F 以外的点，有 $u_1(g_1)=u_2(g_2)=1$，$u_3(g_3)=u_4(g_4)=0$。

设取 $r_{k1}=r_{k2}=r_k$，　　则由 $\frac{\partial P}{\partial x_2}=0$ 得

$$4r_k(x_2-2)=0 \qquad \therefore \quad x_2^*=2$$

由

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=0$$

$$12r_k(x_1-1)^3=1,\quad x_1^*=x_1^*(r_k)=1+\sqrt[3]{\frac{1}{12r_k}}$$

若

$$r_k\to\infty,\quad x_1^*\to1$$

所以 $g_1(X)=0$ 与 $g_2(X)=0$ 的交点即为 x_1 的最大点，满足所有不等式约束。

图 7—5 表示本例的图解。这个最优化问题也可用库恩—图克定理求解。

[例 3]　　$\min \quad f(X)=x_1^2+x_2^2,\quad X\in E^2$

$$g_1(X)=3x_1+2x_2-6\geqslant0$$

$$g_2(X)=x_1\geqslant0$$

$$g_3(X)=x_2\geqslant0$$

我们先用库恩—图克定理求解，构造拉格朗日函数：

$$L(X, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(3x_1 + 2x_2 - 6) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2$$

根据库恩—图克条件可知：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3x_1 + 2x_2 - 6 \geqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 \geqslant 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = x_2 \geqslant 0$$

$$\lambda_1(3x_1 + 2x_2 - 6) = 0$$

$$\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\lambda_3 x_2 = 0$$

解得：

$$X^* = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \lambda^* = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

再用罚函数法求解，构造罚函数：

$$P(X, r_k) = x_1^2 + x_2^2 + r_{k1}(3x_1 + 2x_2 - 6)^2 u_1(g_1)$$

$$+ r_{k2} x_1^2 u_2(g_2) + r_{k3} x_2^2 u_3(g_3)$$

设点 X 在第一象限的可行解域以外，则 $x_1 \geqslant 0$、$x_2 \geqslant 0$ 的约束能

满足，$\therefore\ u_2(g_2)=0$，$u_3(g_3)=0$。但 $g_1(X)\geqslant 0$ 没有满足，$\therefore\ u_1(g_1)=1$，设 $r_{k1}=r_k$。

求最优解，令

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1+6r_k(3x_1+2x_2-6)=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2+4r_k(3x_1+2x_2-6)=0$$

故有
$$x_1^*(r_k)=\frac{36r_k}{2+26r_k}$$

$$x_2^*(r_k)=\frac{24r_k}{2+26r_k}$$

当 $r_k\to\infty$ 时得最优解为

$$X^*=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}18\\12\end{bmatrix}$$

当 X 趋于约束边界 $g_i(X)=0$ 时应有，$r_{ki}\to\infty$。由（7—4）式可知这时

$$\lambda_i^*=\lim_{r_{ki}\to\infty}2r_{ki}g_i(X)u_i(g_i) \tag{7—10}$$

在可行解域 $F=\{X|g_i(X)\geqslant 0\}$ 以外，$r_{ki}>0$，$g_i(X)u_i(g_i)<0$，

$$\therefore\quad \lambda_i^*<0 \tag{7—11}$$

例 3 中，

$$2r_kg_1(X)=2r_k\left[3\left(\frac{36r_k}{2+26r_k}\right)+2\left(\frac{24r_k}{2+26r_k}\right)-6\right]$$

$$= \frac{-24r_k}{2+26r_k}$$

故由（7—10）式可得

$$\lambda_1^* = \lim_{r_k \to \infty} \frac{-24r_k}{2+26r_k} = -\frac{12}{13} < 0$$

SUMT 外点法的迭代过程如下：

1. 设起始点为 X^0，给定初始罚因子 r_1，令 $k=1$。又给定 $\frac{r_{k+1}}{r_k} = c$，$c > 1$。

2. 求 X_k^* 使罚函数 $P(X, r_k)$ 为极小 $[X_k^* = X^*(r_k)]$。

$$P(X,\ r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} [g_i(X)]^2 u_i(g_i)$$

3. 检验 X_k^* 是否满足所有约束？若 X_k^* 为可行解，则它就是所求的最优解，迭代终止，停机。否则继续进行下去。

4. 选择罚因子 r_{k+1}，应有下述关系

$$r_{k+1} > r_k$$

令 $k = k+1$，转回第 2 步。

[例 4]

$$\min \quad f(X) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2,\quad X \in E^2$$

约束

$$g_1(X) = 1 - x_1 \leqslant 0$$

$$g_2(X) = -x_2 \leqslant 0$$

解：为了说明 SUMT 外点法，我们用经典法求无约束极小化问题，罚函数为

$$P(X,\ r_k) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 + r_k\{max[0, 1-x_1]\}^2 + r_k\{max[0, -x_2]\}^2$$

$P(X, r_k)$ 的无约束极小条件为

(1) $$\frac{\partial P}{\partial x_1}=(x_1+1)^2-2r_k\{max[0,\ 1-x_1]\}=0$$

(2) $$\frac{\partial P}{\partial x_2}=1-2r_k\{max[0,-x_2]\}=0$$

设 $1-x_1\leqslant 0$，即满足约束 $g_1(X)\leqslant 0$ 时，$\max[0,\ 1-x_1]=0$，由第（1）式 $(x_1+1)^2=0$，$x_1=-1$，与假设有矛盾。
设 $1-x_1>0$，即不满足约束 $g_1(X)\leqslant 0$，$\max[0,\ 1-x_1]=1-x_1$，由第（1）式 $(x_1+1)^2-2r_k(1-x_1)=0$。即只有当 $x_1=-1-r_k+\sqrt{r_k^2+4r_k}$ 时，（1）式才成立。同理第（2）式只有当 $1+2r_kx_2=0$ 时才成立。故有 $x_2=-1/2r_k$。

下表列出 r_k 不断增加时，函数值变化情况。

r_k	x_1^*	x_2^*	$P^*(r_k)$	$f^*(r_k)$
0.001	−0.93775	−500.00000	−249.9962	−500.0000
0.01	−0.80975	−50.00000	−24.965	−49.9977
0.1	−0.45969	−5.00000	−2.2344	−4.9474
1	0.23607	−0.50000	0.9631	0.1295
10	0.83216	−0.05000	2.3068	2.0001
100	0.98039	−0.00500	2.6249	2.5840
1000	0.99800	−0.00050	2.6624	2.6582
10000	0.99963	−0.00005	2.6655	2.6652
∞	1	0	8/3	8/3

例 4 无约束极小化问题的解为

$$x_1^*(r_k) = -1 - r_k + \sqrt{r_k^2 + 4r_k}$$

$$x_2^*(r_k) = -\frac{1}{2r_k}$$

§ 7-3 SUMT 内 点 法

设最优化问题为

$$\min \quad f(X), \quad X \in E^n$$

$$g_i(X) \geqslant 0, \ i = 1, 2, \cdots, m$$

内点法和外点法不同，它是在可行解域内逐步迭代，收敛于最优解 X^*。因此罚函数形式也是不一样的。
定义罚函数为

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(X)} \qquad (7\text{—}12)$$

若约束 $g_i(X) \geqslant 0$ 改为 $g_i(X) \leqslant 0$，则统一写成 $\geqslant 0$ 的形式，有 $-g_i(X) \geqslant 0$。罚函数为

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \left[-\frac{1}{g_i(X)} \right] \qquad (7\text{—}13)$$

式中 r_k 为第 k 次迭代时的罚因子，$r_k > 0$，且序列 $\{r_k\}$ 是逐次下降的。

(7—12) 式中，如果对不同的约束加不同的权，则罚函数应为

$$P(X, r_k) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} r_{ki} \frac{1}{g_i(X)}$$

原来求 $f(X)$ 在 $g_i(X) \geqslant 0$ 下的极小问题变为求 $P(X, r_k)$ 的约无束极小问题，针对一个 r_k，得到第 k 步最优解，$X^*(r_k) = X_k^*$，当 $r_k \to 0$ 时，$X^*(r_k) \to X^*$ 即原问题最优解，这时满足所有约束条件。

若 X 在可行域内，且距边界较远，则 $g_i(X) > 0$，这时罚项很小，$P(X, r_k) \approx f(X)$，当点列 $\{X^k\}$ 由可行域内逐步移动接近边界时，满足某一个约束，$g_i(X) \to 0$，于是罚函数值 $P(X, r_k)$ 很大，阻碍$\{X^k\}$越出边界。图 7—6 表示某个罚函数 $P(x, r_k)$ 与 x 的关系，约束为 $g_1(x) = x - a \geqslant 0, g_2(x) = x - b \leqslant 0$。可见在约束边界 $g_i(x) \to 0$时，$P(x, r_k) \to \infty$，我们也可称 $P(x, r_k)$ 为障碍函数，因而 SUMT 内点法也称为障碍函数法。

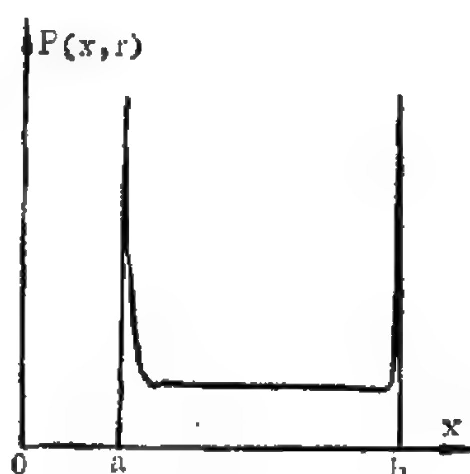


图 7—6 障碍函数，$g_1(x) = x - a \geqslant 0$ $g_2(x) = x - b \leqslant 0$

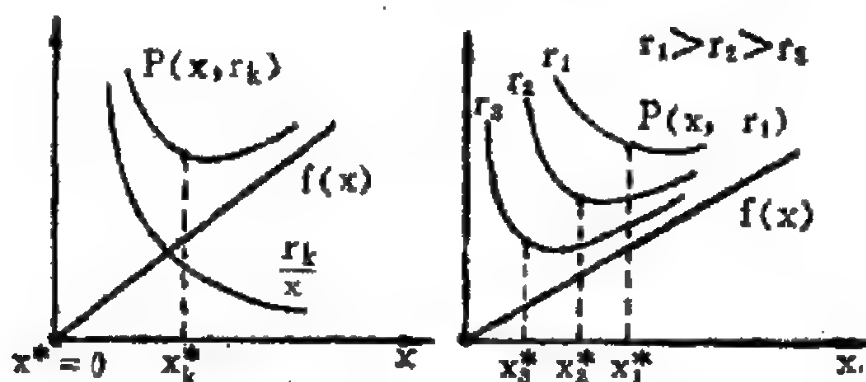


图 7—7 $P(x, r_k) = x + \frac{r_k}{x}$

[例 1] 最优化问题为

$$\min \quad f(x)=x$$
$$g(x)=x\geqslant 0$$

用 SUMT 内点法求解，构造罚函数：

$$P(x,\ r_k)=x+\frac{r_k}{x}$$

取初始罚因子 r_1，求得 $x^*(r_1)=x_1^*$，第二步迭代，取 $r_2<r_1$，求得 $x^*(r_2)=x_2^*$，…如此迭代下去，单调减少 r_k，当 $r_k\to 0$ 时，$x_k^*\to x^*=0$，迭代过程中，点列 $\{x_k^*\}$ 总在可行域内，见图 7—7。

[例 2] $$\min \quad f(X)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2,\ X\in E^2$$

$$g_1(X)=x_1-1\geqslant 0$$
$$g_2(X)=x_2\geqslant 0$$

图 7—8 表示这一例题的可行解域，最优解为 $X^*=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$。$f(X^*)=\frac{8}{3}$。我们曾用 SUMT 外点法求解过这一问题，现在用 SUMT 内点法求解。

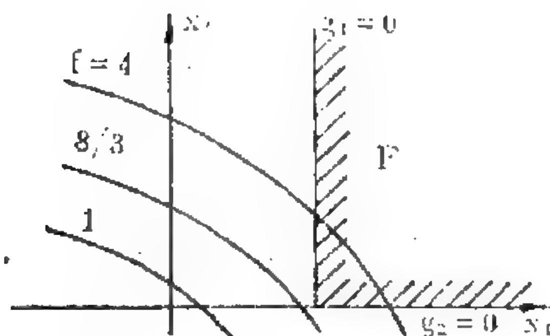


图 7—8 例 2 的可行解域 F

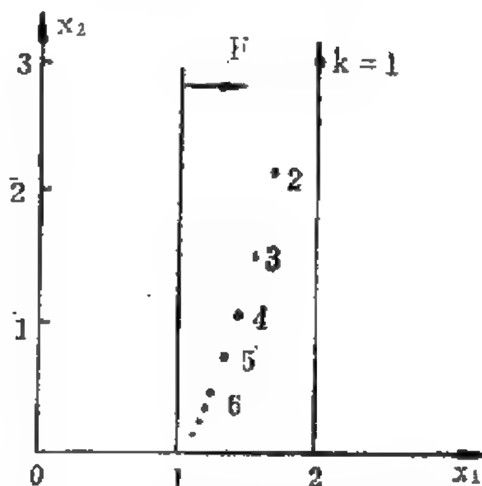


图 7—9 用内点法求解例2得点列$\{X_k^*\}$

罚函数

$$P(X, r_k)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2+\frac{r_k}{x_1-1}+\frac{r_k}{x_2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=(x_1+1)^2-\frac{r_k}{(x_1-1)^2}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=1-\frac{r_k}{x_2^{\ 2}}=0$$

解得

$$x_1^*(r_k)=\sqrt{1+\sqrt{r_k}},\quad x_2^*(r_k)=\sqrt{r_k}。\quad X_k^*=\begin{bmatrix} x_1^*(r_k) \\ x_2^*(r_k) \end{bmatrix}。$$

$$\text{最优解 } X^*=\lim_{r\to 0}\begin{bmatrix} \sqrt{1+\sqrt{r}} \\ \sqrt{r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

k	r_k	$x_1^*(r_k)$	$x_2^*(r_k)$	$f(X_k^*)$
1	9	2	3	12.00000
2	4.5	1.768	2.12	9.18931
3	2.25	1.581	1.50	7.23116
4	1.125	1.439	1.06	5.89631
5	0.563	1.322	0.752	4.92516
6	0.282	1.229	0.503	4.19455
7	0.141	1.170	0.376	3.78210
8	0.071	1.120	0.257	3.43304
9	0.036	1.091	0.190	3.23748
10	0.018	1.062	0.134	3.05643
11	0.009	1.047	0.095	2.95412
∞	0	1.0	0	$2.66667=\frac{8}{3}$

用迭代方法求解时，设初始罚因子 $r_1=9$，令$\frac{r_{k+1}}{r_k}=c=\frac{1}{2}$，我们得到迭代 11 次的点列 $\{X_k^*\}$ 如上页表。图 7—9 说明了点列 $\{X_k^*\}$ 在可行域内逐步向最优点 $X^*=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$逼近。

SUMT 内点法的迭代过程如下：

1. 设初始可行点 X^0 满足所有严格不等式约束即 $g_i(X^0)>0$，$i=1, 2, \cdots, m$，选取罚因子初始值 $r_1>0$，令 $k=1$。

2. 应用任何一种无约束极小化方法求 $P(X, r_k)$ 的极小值，并得到第 k 步迭代的最优点 X_k^*。

3. 检验这个最优点 X_k^* 是否原问题的最优解。若是，则迭代终止，停机。否则转下一步。

4. 令 $\frac{r_{k+1}}{r_k}=c$，$c<1$。c可取 0.1 或 0.2 或 0.5 等等。

5. 令 $k=k+1$，取 $X^0=X_k^*$，转第 2 步。

罚因子初始值 r_1 可按下式选择确定：

$$r_1 \approx \frac{(0.1\sim1)f(X^0)}{\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(X^0)}\right]}$$

对例 2 用计算机进行迭代计算，结果如下页表。

收敛性判据可选用以下任一种：

(1) 由无约束极小化前后两次计算结果所得原目标函数相对差小于某个很小的数 e_1

即 $$\left|\frac{f(X_k^*)-f(X^*_{k-1})}{f(X_k^*)}\right| \leqslant e_1$$

(2) $$\|X_k^*-X^*_{k-1}\| \leqslant e_2$$

内点法中，罚函数的罚项也可取约束函数的对数，这种内点法也可称为对数罚函数法。

r_k	$x_1^*(r_k)$	$x_2^*(r_k)$	$P^*(r_k)$	$f^*(r_k)$
1000	5.71164	31.62278	376.2636	132.4003
100	3.31662	10.00000	89.9772	36.8109
10	2.04017	3.16228	25.3048	12.5286
1	1.41421	1.00000	9.1046	5.6904
0.1	1.14727	0.31623	4.6117	3.6164
0.01	1.04881	0.10000	3.2716	2.9667
0.001	1.01569	0.03162	2.8569	2.7615
0.0001	1.00499	0.01000	2.7267	2.6967
0.00001	1.00158	0.00316	2.6856	2.6762
0.000001	1.00050	0.00100	2.6727	2.6697
准确值 0	1	0	$2.6667=\frac{8}{3}$	$2.6667=\frac{8}{3}$

设最优化问题为

$$\min \quad f(X) \qquad X\in E^n$$

$$g_i(X)\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

对数罚函数的定义为

$$P(X,\ r_k)=f(X)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln g_i(X) \tag{7—14}$$

$$\text{当 } r_k\to 0 \text{ 时} \quad X^*(r_k)\to X^*$$

[例 3] $\min \quad f(X)=x_1+2x_2,\ X\in E^2$

$$g_1(X)=-x_1^2+x_2\geqslant 0$$

$$g_2(X)=x_1\geqslant 0$$

图 7—10 表示可行解域 F 及目标函数等高线。

用对数罚函数法求解，构造罚函数为

$$P(X,\ r_k)=x_1+2x_2-r_k\ln(-x_1^2+x_2)-r_k\ln x_1$$

这里假设对于两个约束用相同的权因子，

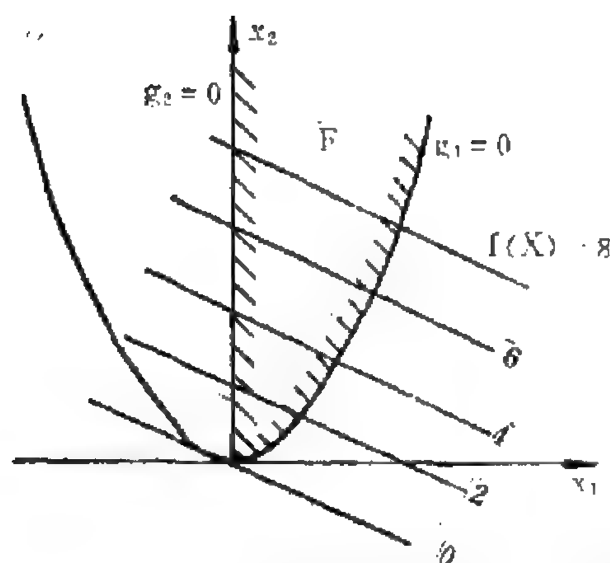
$$r_{k1}=r_{k2}=r_k$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}=1+\frac{2r_kx_1}{-x_1^2+x_2}-\frac{r_k}{x_1}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2}=2-\frac{r_k}{-x_1^2+x_2}=0$$

解得
$$x_1^*(r_k)=\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{1+16r_k}\right)$$

$$x_2^*(r_k)=\frac{1}{64}\left(-1+\sqrt{1+16r_k}\right)^2+\frac{1}{2}r_k$$



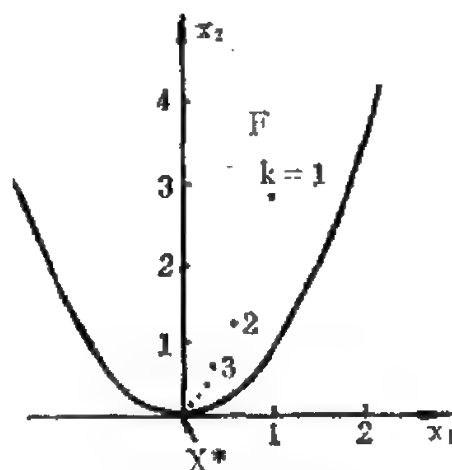


图 7—10 例 3 的可行解域　图 7—11 例 3 求解结果所得点列$\{X_k^*\}$

当 $r_k \to 0$ 时 $X^*(r_k) \to \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 即为 X^*。

应用迭代算法，设初始罚因子 $r_1 = 4$，令 $\frac{r_{k+1}}{r_k} = c = 0.5$，迭代结果如下表，图 7—11 给出点列 $X^*(r_k)$。共进行 11 次迭代。

k	r_k	$x_1^*(r_k)$	$x_2^*(r_k)$	$f[X^*(r_k)]$
1	4	0.885	2.781	6.447
2	2	0.593	1.35	3.293
3	1	0.391	0.653	1.697
4	0.5	0.375	0.39	1.155
5	0.25	0.155	0.149	0.453
6	0.125	0.090	0.071	0.232
7	0.063	0.057	0.035	0.127
8	0.032	0.029	0.017	0.063
9	0.016	0.016	0.008	0.032
10	0.008	0.008	0.004	0.016
11	0.004	0.003	0.002	0.007
准确解	0	0	0	0

对于下述最优化问题

$$\min \quad f(X) \qquad X \in E^n$$

$$g_i(X) \geqslant 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

对数罚函数也可定义为[42]

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} \ln g_i(X)$$

当 $g_i(X)\leqslant 0$ 时，则上式应改为

$$P(X,\ r_k)=f(X)+r_k\sum_{i=1}^{m}\ln[-g_i(X)]$$

[例 4] $\min \quad f(x)=(x-2)^2$

$$g(x)=1-x\leqslant 0 \quad 或 \quad -g(x)=x-1\geqslant 0$$

用对数罚函数法，按上述定义构造罚函数：

$$P(x,\ r_k)=(x-2)^2+r_k\ln[-g(x)]=(x-2)^2+r_k\ln(x-1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0, \qquad 2(x-2)+\frac{r_k}{x-1}=0$$

解得
$$x^*(r_k)=\frac{3-\sqrt{1-2r_k}}{2}$$

设 $r_k=0.1 \qquad x^*(r_k)=1.0271$

$r_k=0.01 \qquad x^*(r_k)=1.005$

$r_k=10^{-3} \qquad x^*(r_k)=1.0005$

$r_k=10^{-4} \qquad x^*(r_k)=1.00005$

$r_k\to 0$，$x^*(r_k)=x^*=1$，$f(x^*)=1$。

图 7—12 给出例 4 的目标函数及罚函数，显见最优解应位于 $f(x)$ 及 $1-x=0$ 的交点上。

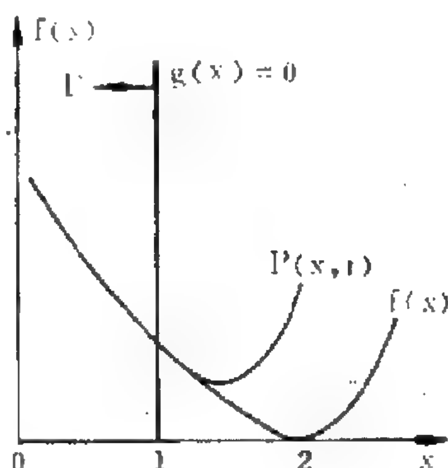


图 7—12

例 4 的可行解域 F 及目标函数

这两节介绍的 SUMT 方法是应用较广泛的算法，所举的例子比较简单，因此可以用解析法求解罚函数的最优值。实际问题的函数形式要复杂得多，所以每次迭代要用无约束极值的数值解法如变尺度法、共轭梯度法等，而且还要进行一维搜索，可采用 0.618 法，二次或三次插值法等。

§ 7-4 SWIFT 方法

前面介绍的 SUMT 法，罚因子的选择是十分任意的，因此影响了数值计算的收敛速度。1975 年，Sheela B.V. 及 Ramamoorthy P. 用单纯形法与罚函数法相结合，每步迭代用单纯形法求无约束极值，而罚项上加的权因子（罚因子）由前次迭代结果给出。这就加快了计算速度。这种方法称为序贯加权因子法（Sequential Weight Increasing Factor Technique）简称 SWIFT 法。本节中简要地介绍这一方法。

设非线性规划问题为

$$\min \quad f(X), \qquad X \in E^n$$

$$g_i(X) \geqslant 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$h_j(X) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, r$$

这是有等式约束和不等式约束的最优化问题，取第 k 次迭代的罚因子（权因子）为 r_k，则罚函数或增广目标函数为

$$P(X, r_k) = f(X) + r_k\{\sum_{C_1} h_j(X) - \sum_{C_2} h_j(X) - \sum_{C_3} g_i(X)\}$$

式中

$$C_1 = \{j \mid h_j(X) > 0\},$$

$$C_2 = \{j \mid h_j(X) < 0\},$$

$$C_3 = \{i \mid g_i(X) < 0\}$$

应用单纯形法对 $P(X, r_k)$ 寻优，初始点设为 X^0，以 X^0 为基点构造单纯形，取初始罚因子 $r_1 = 1$。计算单纯形各顶点的函数值 $P(X)$，每次迭代包括反射、扩展及压缩等步骤，并构造新的单纯形，求单纯形的重心点（单纯形共有 $N+1$ 个顶点）：

$$X_G = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} X_i$$

令单纯形顶点到重心点 X_G 的平均距离为

$$d = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} \|X_i - X_G\|$$

式中 $\|X_i - X_G\|$ 为向量 $(X_i - X_G)$ 的范数。

取新的罚因子为 $r_{k+1} = \max\{r_k, \frac{1}{d}\}$，再计算新的单纯形各顶点的函数值 $P(X)$，经过多次迭代，使单纯形各顶点越来越接近于其重心，因而 d 越来越小，罚因子则越取越大，直到满足规定的收敛判据为止。

SWIFT 方法无需计算函数导数，函数计算次数比 SUMT 方法要小得多，方法简单，收敛快，适合于变量较少的工程设计问题。SWIFT 法的程序框图可查阅有关文献[41]。本书附录中给出 SWIFT 法程序。

§ 7-5 用梯度法解有约束的最优化问题

应用梯度法解有约束最优化问题，其中一类是沿边界寻优法。无约束梯度法中可行域是整个欧氏空间，加上不等式约束以后，可行域限制在边界内或边界上。选择一个起始点在可行域内，沿梯度路线前进直到碰到边界。最简单的是所谓锯齿算法。本节介绍锯齿算法和梯度投影法。另外两种方法即线性逼近法及可行方向法分别在下两节内介绍。

一、锯齿算法

锯齿算法是沿边界寻优的方法的一种，是梯度法应用于有约束的情况。先在可行域内沿目标函数负梯度方向前进，当到达可行域外时，再沿约束函数的梯度方向折回来，搜索路线是沿着约束边界曲折前进的，在目标函数负梯度和约束函数梯度之间不断变换方

向，象缝纫机做花边一样，所以也可称为“花边”算法。

[例] $\min \quad f(X)=x_1^2+2x_2^2, \quad X\in E^2$

约束 $x_1+x_2\geqslant 4$

设步长固定为 1.0，初始点 $X^0=[1,\ 4.5]^T$，见图 7—13。

目标函数梯度方向(单位向量)为：

$$S_f=\frac{\nabla f(X)}{\|\nabla f(X)\|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2x_1)^2+(4x_2)^2}}\begin{bmatrix}2x_1\\4x_2\end{bmatrix}$$

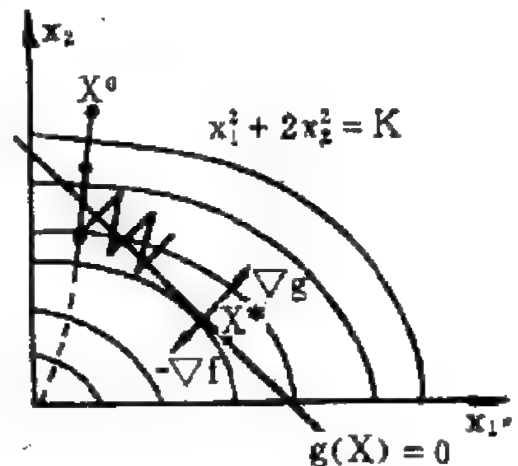


图 7—13
$f(X)=x_1^2+2x_2^2$
$g(X)=x_1+x_2-4=0$

约束函数的梯度方向（单位向量）为：

$$S_g=\frac{\nabla g(X)}{\|\nabla g(X)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$X^{k+1}=X^k+\alpha S^k$$

S^k 为沿目标函数负梯度方向或沿约束函数梯度方向的单位向量。

当 X^k 在可行域内时，

$$S^k=-\frac{\nabla f(X^k)}{\|\nabla f(X^k)\|}$$

当 X^k 在可行域外时，

$$S^k=\frac{\nabla g(X^k)}{\|\nabla g(X^k)\|}$$

则得搜索点列如下表（见 324 页）。

最小值在约束 $x_1+x_2=4$ 或 $x_2=4-x_1$ 上，满足下述条件的点：

$$\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1^2+2x_2^2]=\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1^2+2(4-x_1)^2]=0$$

k	x_1	x_2	注
0	1	4.5	可行
1	0.89	3.5	可行
2	0.76	2.5	不可行
3	1.47	3.21	可行
4	1.05	2.3	不可行
5	1.76	3.01	可行
6	1.37	2.1	不可行
7	2.08	2.81	可行

得
$$x_1^* = 2.667, \qquad x_2^* = 1.333$$

在最优点

$$-\frac{\nabla f(X^*)}{\|\nabla f(X^*)\|} = 0.707\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\nabla g(X^*)}{\|\nabla g(X^*)\|} = 0.707\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即两者梯度在该点相等。

这种算法要走很多步，但它有一个自动停机规则：

$$\frac{\nabla f(X^*)}{\|\nabla f(X^*)\|} = \frac{\nabla g(X^*)}{\|\nabla g(X^*)\|} + e$$

e 为任意小的正数。

梯度算法只用到局部信息，因此所得为局部最优值，而不是全局最优值，这种情况在可行域或目标函数非凸时发生。

二、消元法

在等式约束情况下应用梯度法也是和前述不等式约束相似，只是迭代路线是在边界上。可行域是边界面，初始点也应当在边界面上。可以采用消元法降维。

[例 1] $\min \quad f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad X \in E^3$

约束 $2x_1+3x_2+x_3=1$

应用消元法， $x_3=1-2x_1-3x_2$

$$\min \quad f(X)=x_1^2+x_2^2+(1-2x_1-3x_2)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1+2(1-2x_1-3x_2)(-2)=0, \quad 5x_1+6x_2=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=2x_2+2(1-2x_1-3x_2)(-3)=0, \quad 6x_1+10x_2=3$$

得 $x_1^*=0.142857$，$x_2^*=0.214285$，$x_3^*=0.071431$。

此例中消元法将 3 个变量、1 个约束的极值问题变成 2 个变量无约束极值问题，是一种最简便的将有约束最优化问题转化为无约束最优化问题来解的方法。

[例 2] $\max \quad x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1$$

$$(x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2=2$$

这个问题原有 4 个变量、2 个等式约束，用消元法变成 3 个变量、1 个等式约束问题：

$$\max \quad (1-x_2-x_3-x_4)^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2$$

约束 $(1-2x_2-x_3-x_4)^2+(x_3-x_4)^2=2$

消元法很简单，但在多数非线性规划中很少可行。

等式线性约束应用较多的是梯度投影法。这一方法也可以推广应用于非线性等式约束和线性不等式约束的情况。

三、梯度投影法

在线性约束下的非线性规划问题用梯度投影法最有效。先看等

式约束情况。

1\. 问题 $\min\limits_{X} f(X) \qquad X\in E^n$

约束 $g(X)=AX-B=0$ (7—15)

或

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{bmatrix},\quad B=[b_1,b_2,\cdots b_m]^T$$

$$X\in E^n,\ m<n$$

$$\nabla g(X)=A^T$$

假设从某可行点 X^k 沿最速下降路线到邻近的点 X^k+dX^k，则：

$$AX^k-B=0$$

$$A(X^k+dX^k)-B=0$$

$$\therefore \quad AdX^k=0 \qquad (7—16)$$

下面为了简化书写暂先去掉上标注 k。

沿任意路径 dl，方向余弦为 $\frac{dx_i}{dl}$，$i=1,2,\cdots,n$

$$\sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2=(dl)^2$$

现在选择 dl，使下述目标函数梯度（变化率）最大。

$$\frac{df}{dl}=\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^T\frac{dX}{dl}=\nabla^T f(X)\frac{dX}{dl} \qquad (7—17)$$

方向余弦为

$$\frac{dX}{dl}=\left[\frac{dx_1}{dl},\ \frac{dx_2}{dl},\cdots,\frac{dx_n}{dl}\right]^T \tag{7—18}$$

于是问题的数学模型为：

$$\left.\begin{aligned}&\max\quad \frac{df}{dl}\\ \text{约束}\quad&\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dx_i}{dl}\right)^2=1\\ &A\frac{dX}{dl}=0\end{aligned}\right\} \tag{7—19}$$

用拉格朗日公式，变量为 $\frac{dX}{dl}$

$$L\left(\frac{dX}{dl},\lambda,\ \mu\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^T\frac{dX}{dl}+\lambda^T A\frac{dX}{dl}$$

$$+\mu\left[1-\left(\frac{dX}{dl}\right)^T\frac{dX}{dl}\right] \tag{7—20}$$

L 为极值的必要条件：

$$\nabla L=\frac{\partial f}{\partial X}-2\mu\frac{dX}{dl}+A^T\lambda=0 \tag{7—21}$$

$$\frac{dX}{dl}=\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial f}{\partial X}+A^T\lambda\right) \tag{7—22}$$

$$\nabla_\lambda L=A\frac{dX}{dl}=0 \tag{7—23}$$

$$\nabla_\mu L=1-\left(\frac{dX}{dl}\right)^T\frac{dX}{dl}=0 \tag{7—24}$$

(7—22) 式代入 (7—24) 式，可得

$$\mu=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial X}^{T}+\lambda^{T}A\right)\left(\frac{\partial f}{\partial X}+A^{T}\lambda\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial f}{\partial X}+A^{T}\lambda\right\| \tag{7-25}$$

将 (7—25) 式代入 (7—22) 式可得

$$\frac{dX}{dl}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial X}+A^{T}\lambda}{\left\|\dfrac{\partial f}{\partial X}+A^{T}\lambda\right\|} \tag{7—26}$$

(7—26) 式代入 (7—23) 式得

$$A\left(\frac{\partial f}{\partial X}+A^{T}\lambda\right)=0$$

或

$$\lambda=-(AA^{T})^{-1}A\frac{\partial f}{\partial X} \tag{7—27}$$

若 AA^{T} 为非奇异，上式有解，

$$\begin{aligned}\frac{df}{dX}+A^{T}\lambda&=\frac{df}{dX}-A^{T}(AA^{T})^{-1}A\frac{\partial f}{\partial X}\\&=[I-A^{T}(AA^{T})^{-1}A]\frac{\partial f}{\partial X}\\&=P\frac{\partial f}{\partial X}\end{aligned} \tag{7—28}$$

由 (7—26)、(7—28) 式得方向余弦

$$\frac{dX}{dl}=\frac{[I-A^{T}(AA^{T})^{-1}A]\dfrac{\partial f}{\partial X}}{\left\|P\dfrac{\partial f}{\partial X}\right\|}=\frac{P\dfrac{\partial f}{\partial X}}{\left\|P\dfrac{\partial f}{\partial X}\right\|} \tag{7—29}$$

P 称为投影矩阵

$$P=[I-A^T(AA^T)^{-1}A] \qquad (7\text{—}30)$$

该矩阵将目标函数梯度 $\dfrac{\partial f}{\partial X}$投影到约束集定义的线性子空间。

[例 1]

求 $X=[2,\ 1]^T$ 在直线 $g(X)=-\dfrac{3}{5}x_1-\dfrac{4}{5}x_2=0$上的投影。参看图 7—14。

已知 $A=\left[-\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right]$,

$$AA^T=\left[-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right]\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

$=1$,

$$A^T(AA^T)^{-1}A$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ -\frac{4}{5}\end{bmatrix}\left[-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right]$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{bmatrix},$$

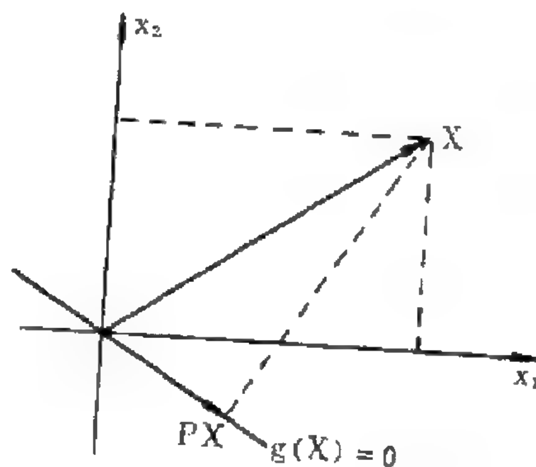


图 7—14 例 1 的图解

$$P=I-A^T(AA^T)^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\frac{1}{25}\begin{bmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{bmatrix},$$

$\therefore$ X 在 $g(X)=0$ 上的投影为

$$PX=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}16 & -12\\ -12 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}20\\ -15\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ -\frac{3}{5}\end{pmatrix}。$$

[例 2] 求函数 $f(X)=5x_1-3x_2+6x_3$ 在 x_1x_2 平面上的投影，约束为 $x_3=0$，即 x_1x_2 平面。参看图 7—15。

约束的梯度矩阵为：

$$A=[0,\ 0,\ 1]$$

函数的梯度向量为：

$$\nabla f(X)=\begin{bmatrix}5\\-3\\6\end{bmatrix}$$

$$AA^T=[0,0,1]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=1$$

$$P=I-A^T(AA^T)^{-1}A$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}[\,0\ \ 0\ \ 1\,]$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

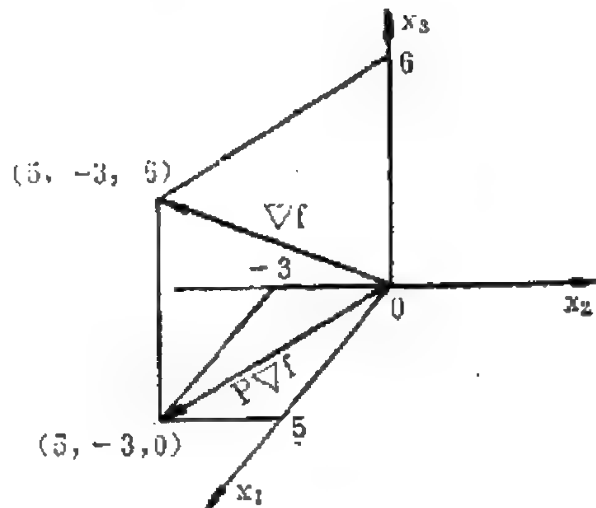


图 7—15 例 2 的图解

目标函数梯度 $\nabla f(X)$ 在约束集合子空间（即 x_1x_2 平面）上的投影为：

$$P\nabla f(X)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\\0\end{bmatrix}$$ [例 2 毕]

现在用梯度投影法计算在 $AX-B=0$ 线性等式约束下的 $f(X)$ 的极小值。

从初始点 X^0 出发，由前面推导可知，迭代过程中使目标函数梯度最大，应选方向 $\frac{dX}{dl}$ 为 X^k 点的函数梯度 $\nabla f(X^k)$ 在约束集合上的投影，即令第 k 步搜索方向（单位向量）为

$$S^k=P\nabla f(X^k)/\|P\nabla f(X^k)\|=\frac{dX^k}{dl} \qquad (7\text{—}31)$$

若步长为α，则迭代公式为

$$X^{k+1}=X^k+\alpha S^k \qquad 求极大值 \qquad (7-32)$$

$$X^{k+1}=X^k-\alpha S^k \qquad 求极小值 \qquad (7-33)$$

到 X^{k+1} 点再做 $\nabla f(X^{k+1})$ 在新的约束集合上的投影，得出新的投影向量 $P\nabla f(X^{k+1})$ 及新的搜索方向 S^{k+1}。

方法的特点是：从 X^k 到 X^{k+1}，选的是沿约束集合上最大可能的负梯度 $-\nabla f(X^k)$，走最大步长 α^k，并保证 X^{k+1} 的可行性。如果约束是非线性的，可进行一维搜索求出最优 α^k 及 X^{k+1} 点。

[例 3] 用梯度投影法计算下述问题 2 步，步长为 3（参看图 7—16）。

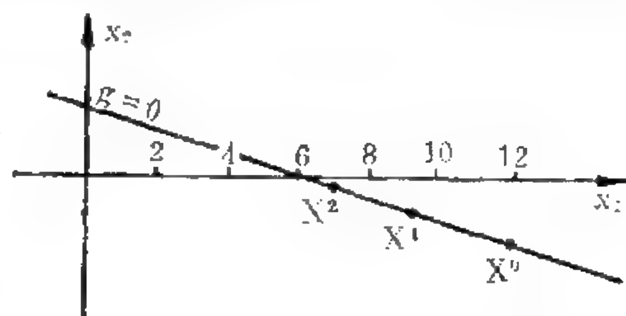


图 7—16 梯度投影法求 $f(X)=2x_1^2+5x_2^2$ 极小值，$g(X)=x_1+3x_2-6$

$$\min \quad f(X)=2x_1^2+5x_2^2 \qquad X\in E^2$$

约束 $$g(X)=x_1+3x_2-6=0$$

初始可行点 $$X^0=[12,\ -2]^T$$

$$A=[1,\ 3]$$

$$\nabla f(X)=\begin{bmatrix}4x_1\\10x_2\end{bmatrix}$$

$$AA^T=[1,\ 3]\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=10$$

$$(AA^T)^{-1}=0.1$$

$$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}0.1[1,3]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.1&0.3\\0.3&0.9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.9&-0.3\\-0.3&0.1\end{bmatrix}$$

$$P\nabla f(X^0)=\begin{bmatrix}0.9&-0.3\\-0.3&0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}48\\-20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}49.2\\-16.4\end{bmatrix}=16.4\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$X^1=X^0+\alpha\frac{P\nabla f(X^0)}{\|P\nabla f(X^0)\|}=\begin{bmatrix}12\\-2\end{bmatrix}-\frac{3\cdot 16.4\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}}{16.4\sqrt{10}}$$

$$=\begin{bmatrix}9.154\\-1.05\end{bmatrix}$$

同样可求出：

$$X^2=\begin{bmatrix}9.154\\-1.05\end{bmatrix}-\frac{3}{32.13}\begin{bmatrix}29.79\\-12.03\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.37\\-0.07\end{bmatrix}$$

2．将梯度投影算法推广到非线性等式约束，已知约束

$$g_i(X)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

在可行点 X^k 将非线性约束方程线性化，得

$$g_i(X^k+dX^k)\approx g_i(X^k)+[\nabla g_i(X^k)]^T dX^k$$

为保证 X^{k+1} 的可行性，$g_i(X^k+dX^k)=0$

$$\therefore\qquad [\nabla g_i(X^k)]^T dX^k=0 \qquad (7\text{—}34)$$

这相当于公式（7—16）$AdX^k=0$ 中的矩阵 $A=[\nabla g_i(X^k)]^T$ 或

$$
A=\begin{bmatrix}
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}
\end{bmatrix}_{X=X^k} \tag{7—35}
$$

因此梯度投影法的结果完全可用，只是现在 A 不是常数，每步都要重新计算一次。投影矩阵 P 将梯度投影到 $[A]_{X=X^k}$ 定义的线性子空间，因此移到 X^{k+1} 点时不一定能满足约束，所以步长应选得小。每步迭代都要确定一个新的可行点，P 要重新计算。因此对于约束的非线性程度很严重时，这种方法是很不方便的。

3． 梯度投影法解线性不等式约束问题

已知约束 $$AX-B\geqslant 0$$

$$A \text{ 为 } m\times n \text{ 矩阵}$$

设从 X^k 点出发，在 X^k 点，q^k 个有效约束不等式的系数矩阵为 A_q（$q^k\times n$ 维），它是 A 的子矩阵。

梯度投影法的迭代公式为

$$
\begin{aligned}
X^{k+1} &= X^k+\alpha^k[I-A_q{}^T(A_qA_q{}^T)^{-1}A_q]\nabla f(X^k) \\
&= X^k+\alpha^kP_q\nabla f(X^k)
\end{aligned}
$$

求 $\min f(X)$ 时，$\alpha^k<0$，α^k 为第 k 步的步长参数。

如果在迭代过程中，还没有到达极小点，但已到达一个新的约束边界，则 A_q 应作修正，P_q 也应修正。

由（7—27）式可知，拉格朗日乘子向量

$$\lambda=-(AA^T)^{-1}A\frac{\partial f}{\partial X}$$

如果 $\lambda_q = -(A_q A_q^T)^{-1} A_q \nabla f(X^k)$ 中某些元素为负，则相应的约束应从 A_q 中删去。

迭代过程直到

$$P_q \nabla f(X^k) = 0,\ \lambda_q \geqslant 0 \text{ 为止。}$$

对于有效约束

$$A_q X^k - B = 0$$

$$\lambda_q \geqslant 0$$

对于无效约束（不起作用的约束），相应的 $\lambda = 0$。

§ 7-6 线性逼近法

设目标函数是非线性的，约束为线性不等式，数学模型为

$$\left.\begin{aligned} &\min\ f(X) \quad X \in E^n \\ &AX \geqslant B,\ X \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7-36)$$

约束条件构成的可行域 F 是凸多面体，其顶点为有限个。最优解可能在边界上。

设 X^0 是某个起始点，在 $X^0 \in F$ 这一点将 $f(X)$ 用泰勒级数展开取线性近似，即用线性函数 $L(X)$ 逼近 $f(X)$。

$$\begin{aligned} L(X) &= f(X^0) + \nabla^T f(X^0)(X - X^0) \\ &= f(X^0) - \nabla^T f(X^0) X^0 + \nabla^T f(X^0) X \\ &= K + C^T X \end{aligned} \qquad (7-37)$$

$$K = f(X^0) - \nabla^T f(X^0) X^0 \qquad \text{为常数}$$

$$C = \nabla f(X^0)$$

求线性函数 $L(X)$ 的最优解作为 $f(X)$ 的最优解的近似，这相当于求 $\nabla^T f(X^0)X$ 的最优解。于是非线性最优化问题在 X^0 出发的这一步变成线性规划问题，其最优解 Y^0 一定在约束凸多面体的顶点上。

[例]

$$\min\ f(X)=4x_1^2+(x_2-2)^2$$

$$-2\leqslant x_1\leqslant 2$$

$$-1\leqslant x_2\leqslant 1$$

设初始点 $X^0=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$,

1. 过 X^0 做切平面

$\nabla^T f(X^0)(X-X^0)$,

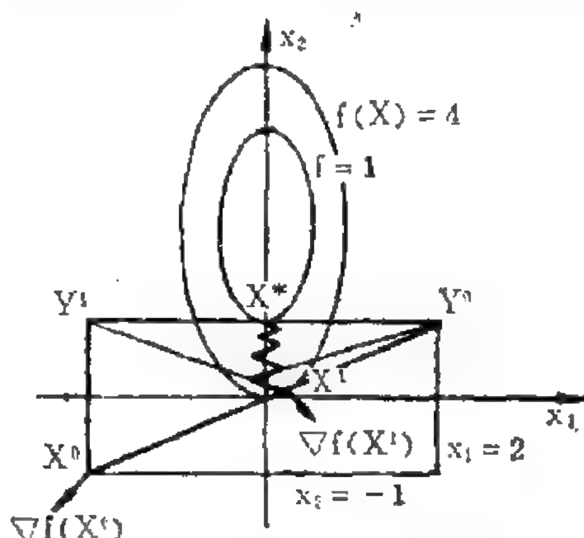


图 7—17 线性逼近法

由线性规划定理，可知本步最优解 Y^0 一定在约束四边形顶点，$Y^0=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$。

2. 由下列判别式判别 X^0 是否为非线性函数的极小值。

$$\left.\begin{aligned}&① \text{ 若} \quad \nabla^T f(X^0)(Y^0-X^0)=0\\&\quad\ \text{或} \quad |\nabla^T f(X^0)(Y^0-X^0)|\leqslant\varepsilon\end{aligned}\right\}\tag{7—38}$$

则 $\qquad \nabla^T f(X^0)Y^0=\nabla^T f(X^0)X^0$

因此 X^0 是非线性规划的最优解，停机。

② 若 $\nabla^T f(X^0)(Y^0-X^0)\neq 0$，则一定 <0，

这是因为 $\nabla^T f(X^0)Y^0=\min\limits_X \nabla^T f(X^0)X$，$X^0$ 在可行域内，

故 $\qquad \nabla^T f(X^0)X^0>\nabla^T f(X^0)Y^0$。

本例中 $Y^0=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$X^0=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$，显然

$$\nabla^T f(X^0)(Y^0 - X^0) = [8x_1,\ 2(x_2-2)]\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{X=X^0}$$

$$= [-16,\ -6]\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} < 0$$

3. 从 X^0 沿 $Y^0 - X^0$ 方向走一步使 α_0 最优，$\alpha_0 \in [0,1]$。

$$X^1 = X^0 + \alpha_0(Y^0 - X^0) \in F$$

取 α 最优是要在 X^0 和 Y^0 间求 $\min f(X)$，即

$$\min \varphi(\alpha) = f[X^0 + \alpha(Y^0 - X^0)] \qquad (7\text{—}39)$$

本例中：

$$X^0 + \alpha(Y^0 - X^0) = \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} + \alpha\left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}4\alpha-2\\2\alpha-1\end{bmatrix}$$

$$\varphi(\alpha) = 4(4\alpha-2)^2 + (2\alpha-3)^2$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0,\quad \therefore\quad \alpha_0 = \frac{19}{34} = 0.56,\quad \text{求得}$$

$$X^1 = \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} + 0.56\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.24\\0.12\end{bmatrix}$$

4. 在 X^1 点作 $f(X)$ 的线性近似函数，求解第二次线性规划，其最优解一定在凸多面体另一个顶点上。设为 Y^1，本例中 $Y^1 = [-2,\ 1]^T$。

即 $\qquad \min\ \nabla^T f(X^1)X = \nabla^T f(X^1)Y^1$

5. 再用判别式判别 X^1 是否已达最优。

6. 重复以上步骤，最后总可以收敛到 $X^* = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$f(X^*) = 1$。

一般情况下迭代公式为

$$X^{k+1}=X^k+\alpha_k(Y^k-X^k) \tag{7—40}$$

α_k 取最优值使 $f(X^{k+1})$ 最小。

$$\min\ \nabla^T f(X^k)X=\nabla^T f(X^k)Y^k$$

其中 $\qquad f(X^{k+1})<f(X^k)$。

不断迭代可使 $\qquad \nabla^T f(X^k)(Y^k-X^k)\to 0,\ X^k\to X^*$

线性逼近法的计算程序为：

1. 设允许误差 $e>0$，顶点 $X^0\in F$，取 $k=0$。
2. 求线性规划问题 $\min\ \nabla^T f(X^k)X$ 的最优解 $Y^k\in F$。
3. 检验是否满足 $|\nabla^T f(X^k)(Y^k-X^k)|\leqslant e$

若满足则已得 $X^k=X^*$，停机，否则转 4 。

4. 求单变量极值：$\min\limits_{\alpha\in[0,1]} f[X^k+\alpha(Y^k-X^k)]$ 的最优解 α^k，

$0<\alpha_k\leqslant 1$。

5. 令 $X^{k+1}=X^k+\alpha_k(Y^k-X^k)$ ，$k=k+1$ 转 2。

有时可行域无界，即线性规划问题没有最优解，而原来非线性规划问题却有最优解存在。如图 7—18，可行解集合 F 是开域。

这时可增加约束 件$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant M$，使 F 成为有界集合。

当 M 足够大时，用上述线性逼近法使原问题至少有一个解是最优的，在 F 中找到。如果 M 不足够大，则“最优解”可能落到 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant M$ 这一边

图 7—81 可行解域 F 无界

界上，因此算法中应对 M 进行检验。

例如：设 $M=2.2$，则增加的线性约束为

$$x_1+x_2=2.2$$

于是在新的可行域中找最优解，得 X_M，它不是真正的最优解 X^*，说明 $M=2.2$ 不够大，取 $M=5$，即令约束为

$$x_1+x_2=5$$

将 $f(X)$ 线性化以后，用线性规划解出近似的线性最优解为顶点 Y^0，再在 Y^0 与 X^0 直线上进行一维搜索，得真正的最优解 X^*。

§ 7-7　可行方向法

可行方向法的寻优过程只在可行域中进行。它可用于目标函数及约束函数都是非线性的情况。在每一步将所有非线性函数线性化，因而每一步算法变成线性规划问题，以决定可行方向，该方向最接近于目标函数的梯度，也最接近于约束边界。

设问题为　　$\min \quad f(X) \quad X\in E^n$

$$g_i(X)\leqslant 0, \ i=1,2,\cdots,m$$

将每个非线性函数在 X^k 点展开成泰勒级数，取一次近似，则有

$$f(X^{k+1})=f(X^k+\triangle X^k)\approx f(X^k)+\nabla^T f(X^k)\triangle X^k$$

$$g_i(X^k+\triangle X^k)\approx g_i(X^k)+\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k$$

$$\triangle X^k=X^{k+1}-X^k$$

1.　如果 $f(X^k+\triangle X^k)-f(X^k)<0$，或 $\nabla^T f(X^k)\triangle X^k<0$，则目标函数值下降，是有利的，搜索方向是下降方向。

2. 若 X^k 在可行域以内，$g_i(X^k)<0$，则总可取步长 $\alpha^k>0$，得 $X^{k+1}=X^k+\alpha^k S^k$，使 X^{k+1} 仍在可行域内，即任意方向都是可行的。

3. 若 X^k 在边界上，$g_i(X^k)=0$，则对某个 $\alpha^k>0$ 说，如果 $g_i(X^{k+1})=g_i(X^k)+\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k<0$，$i=1, 2, \cdots, m$，则 X^{k+1} 在可行域内，故是可行的。如图 7—19。

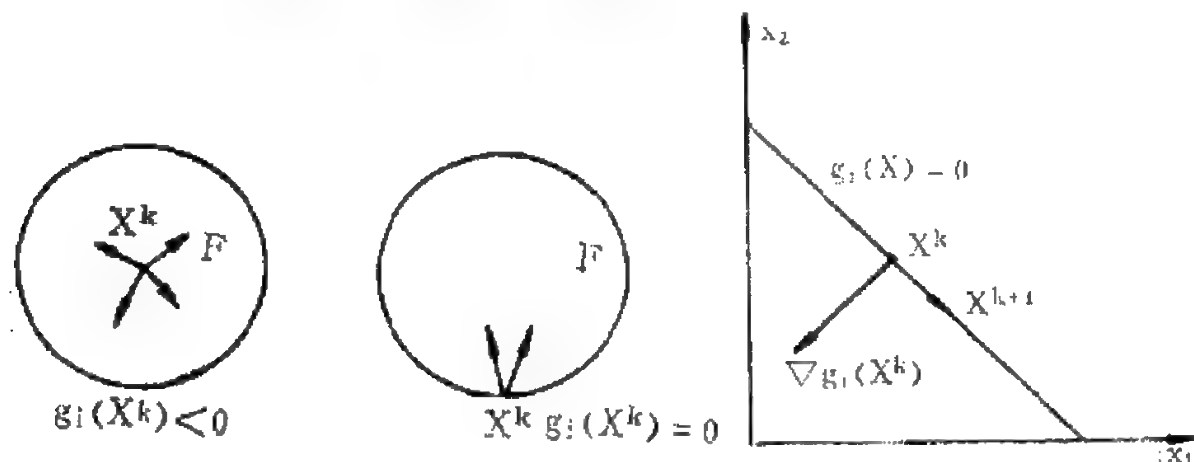


图 7—19

X^k 在可行解域 F 内的位置

图 7—20

约束 $g_i(X)=0$ 为线性方程

4. 如果上述情况下 $g_i(X^{k+1})=0$，或 $\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k=0$ 则 X^{k+1} 位于 $g_i(x)$ 在 X^k 点的切平面上，只有当 $g_i(X)$ 为线性时，X^{k+1} 才是可行点（如图 7—20）。

于是在线性约束条件下可得

$$\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k\leqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,m$$

对一般非线性约束，为了决定搜索方向 S^k 以得到可行点 X^{k+1}，并尽可能靠近目标函数的梯度方向，引入松弛变量 $V\geqslant 0$，将严格不等式

$$\nabla^T f(X^k)\triangle X^k<0$$

$$g_i(X^k)+\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k<0$$

变为≤0 的一般不等式。

即 $$\nabla^T f(X^k)\triangle X^k+V\leqslant 0$$

$$g_i(X^k)+\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k+V\leqslant 0\quad i=1,2,\cdots,m$$

然后在每一点 X^k 解下述线性规划问题

$$\max\ V$$

$$V+\nabla^T f(X^k)\triangle X^k\leqslant 0$$

$$V+\nabla^T g_i(X^k)\triangle X^k\leqslant -g_i(X^k),\quad i=1,2\cdots,m$$

当 $V=0$，表示已达有约束的最优点。

若 V 非零，$V>0$，表示尚未达最优，取步长 $\alpha^k>0$，使 $f(X^k+\alpha S^k)$ 为所有可行点中的极小者。

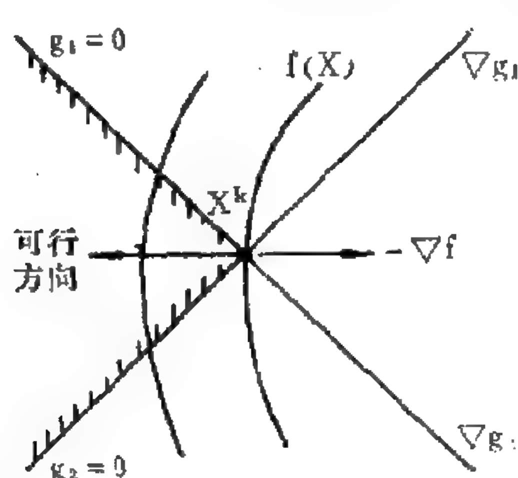


图 7—21 $\nabla^T f(X^k)\triangle X^k>0$

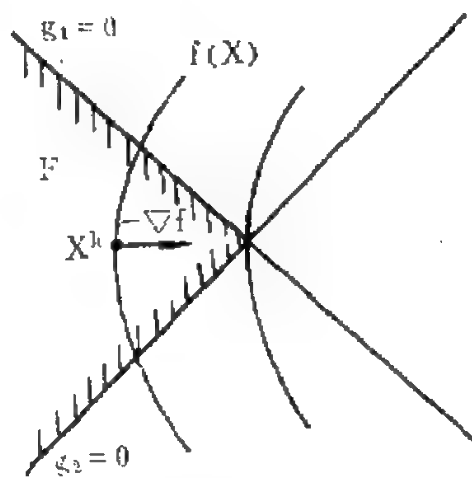


图 7—22 $\nabla^T f(X^k)\triangle X^k<0$

由库恩-—图克条件的几何解释，在最优点，沿所有可行方向前进一步，找到 X^{k+1}，均使 $\triangle X^k$ 与 $-\nabla f(X)$ 夹角大于 90°。即从 X^k 沿可行方向到 X^{k+1}，将使 $f(X^{k+1})-f(X^k)>0$。

$\nabla^T f(X^k)\triangle X^k>0$，要加负的松弛变量才能使该式小于零，即最大能加的正松弛变量为零，说明已达到最优点了（如图 7—21）。

若 $V>0$，说明原来 $\nabla^T f(X^k)\triangle X^l<0$，

即：
$$f(X^{k+1})-f(X^k)<0$$

在可行域内沿函数下降方向（负梯度方向）还可寻到更优点。负梯度方向即为可行方向（如图 7—22）。

[例]

$$\min\ f(X)=x_1^2+2x_2^2 \quad X\in E^2$$

$$x_1+x_2\geqslant 4$$

或
$$-(x_1+x_2)\leqslant -4$$

$$X^0=[0.85,\ 3.15]^T$$

用可行方向法决定从 X^0 点出发的搜索方向（见图 7—23）。

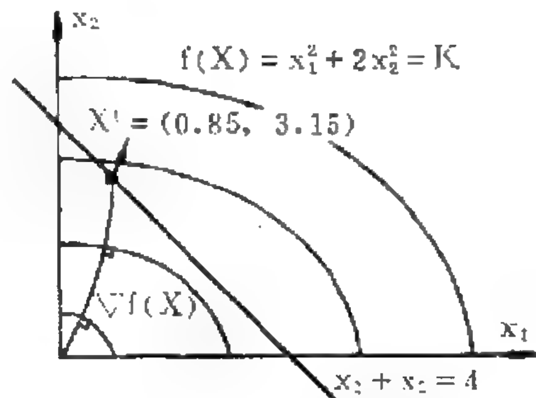


图 7—23 可行方向法求解的例

$f(X)=x_1^2+2x_2^2$

$g=x_1+x_2\geqslant 4$

已知约束是线性的，X^0 在边界上，故

$$-\nabla^T g(X^0)\triangle X^0\leqslant 0, \qquad \nabla f(X)=\begin{bmatrix}2x_1\\4x_2\end{bmatrix}$$

故求松弛变量 V 的线性规划问题为

$$\max\ V$$

$$V+\nabla^T f(X^0)\triangle X^0\leqslant 0$$

$$-\nabla^T g(X^0)\triangle X^0\leqslant 0$$

$$\frac{\triangle X^0}{\|\triangle X^0\|}=[S_1,S_2]^T, \quad S_1\leqslant 1,\ S_2\leqslant 1,$$

$$\frac{\nabla f(X^0)}{\|\nabla f(X^0)\|}=\frac{[2(0.85),\ 4(3.15)]^T}{\sqrt{2^2\cdot 0.85^2+4^2\ 3.15^2}}=[0.134,\ 0.993]^T$$

$$\frac{\nabla g(X^0)}{\|\nabla g(X^0)\|}=[0.707,\ 0.707]^T$$

上述线性规划条件为

$$[0.134,\ 0.993]\begin{bmatrix}S_1\\S_2\end{bmatrix}\leqslant -V,\quad 0.134S_1+0.993S_2\leqslant -V$$

$$[-0.707,-0.707]\begin{bmatrix}S_1\\S_2\end{bmatrix}\leqslant 0,\quad -(0.707S_1+0.707S_2)\leqslant 0$$

$$S_1\leqslant 1,\qquad S_2\leqslant 1$$

或：

$$S_2\leqslant\frac{-V}{0.993}-\frac{0.134}{0.993}S_1=-1.008V-0.135S_1$$

$$S_2\geqslant -S_1$$

$$S_1\leqslant 1,\quad S_2\leqslant 1$$

可行域如图 7—24 所示，使 V 为极大值的解为 $S_1=1$，$S_2=-1$，$V=0.859$，这个方向是沿约束边界的方向，即在等式约束线 $x_1+x_2=4$ 上。

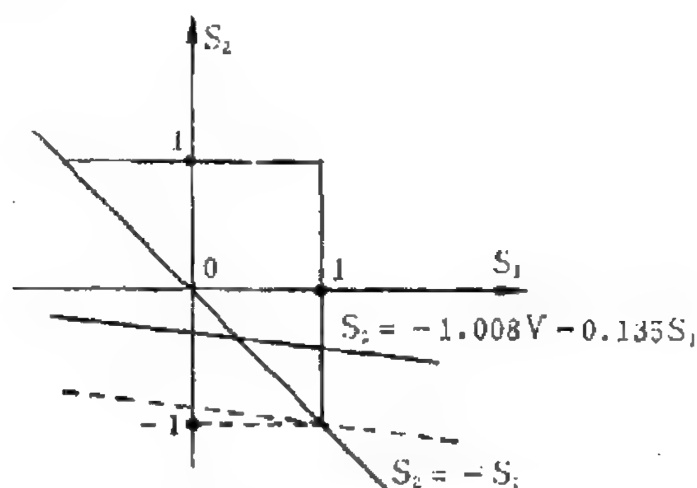


图 7—24 线性规划问题的图解

$f(X)$ 极小值发生在 $X^*=[2.667,\ 1.333]^T$

该点的梯度为

$$\frac{\nabla g(X^*)}{\|\nabla g(X^*)\|}=[0.707,\ 0.707]^T$$

$$\frac{\nabla f(X^*)}{\|\nabla f(X^*)\|}=\frac{\left[\frac{16}{3},\ \frac{16}{3}\right]^T}{\sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2}}=[0.707,\ 0.707]^T$$

在 X^* 点线性规划问题为

$$\max\ V$$

$$0.707S_1+0.707S_2\leqslant -V$$

$$-0.707S_1-0.707S_2\leqslant 0$$

$$S_1\leqslant 1,\ S_2\leqslant 1$$

解为 $S_1=-S_2$，$\max\ V=0$，即达极小点。

下面我们列出三种方法的数值计算结果以资比较，这三种方法是可行方向法、梯度投影法以及内点罚函数法。

求解的最优化问题有五个变量，十个约束，此外还有变量非负的约束。数学模型为

$$\min\quad f(X)=-15x_1-27x_2-36x_3-18x_4-12x_5$$

$$+30x_1^2+39x_2^2+10x_3^2+39x_4^2+30x_5^2$$

$$+4x_1^3+8x_2^3+10x_3^3+6x_4^3+2x_5^3$$

$$-40x_1x_2-20x_1x_3+64x_1x_4-20x_1x_5$$

$$-12x_2x_3-62x_2x_4+64x_2x_5-12x_3x_4$$

$$-20x_3x_5-40x_4x_5$$

约束条件为

$$16x_1-2x_2-x_4\leqslant 40$$

$$2x_3-0.4x_4-2x_5\leqslant 2$$

$$3.5x_1-2x_3\leqslant\frac{1}{4}$$

$$2x_2+4x_4+x_5\leqslant 4$$

$$9x_2+2x_3-x_4+2.8x_5\leqslant 4$$

$$-2x_1+4x_3\leqslant 1$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leqslant 40$$

$$x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5\leqslant 60$$

$$-x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5\leqslant -5$$

$$-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5\leqslant -1$$

$$-x_i\leqslant 0,\ i=1,2,3,4,5。$$

最优解为

$$X^*=[0.3,\ 0.33347,\ 0.4,\ 0.42831,\ 0.22396]^T$$

$$f(X^*)=-32.34868$$

初始点为

$$X^0=[0,0,0,0,1]^T$$

$$f(X^0)=20.0$$

1. 可行方向法

$f(X)$ 计算次数	$f(X)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	−19.184	0.1337	0.0224	0.3169	0.5422	0.3403
5	−23.916	0.3001	0.3328	0.4000	0.6728	0.0286
10	−31.601	0.2568	0.3220	0.3784	0.4892	0.2978
20	−31.779	0.2738	0.3474	0.3870	0.5147	0.2191
45	−32.285	0.2997	0.3234	0.4002	0.4521	0.2648
100	−32.3486	0.3000	0.3327	0.4000	0.4268	0.2255

[注] 尚有 20 次 ∇f 计算

2. 梯度投影法

$f(X)$ 计算次数	$f(X)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
7	11.215	0.0302	0.0000	0.0485	0.0500	0.9526
10	−24.363	0.2534	0.0000	0.3767	0.4062	0.6159
15	−24.825	0.2534	0.0000	0.3866	0.4063	0.6160
20	−31.582	0.3000	0.2735	0.3992	0.3887	0.4024
26	−32.043	0.3000	0.3556	0.4000	0.4924	0.1719
31	−32.329	0.3000	0.3403	0.4000	0.4449	0.2081
45	−32.3486	0.3000	0.3341	0.4000	0.4299	0.2226

[注] 尚有所有 g_i 及所有 ∇g_i 的计算，各 70 次。

3. 内点罚函数法$\left(\frac{r_k}{r_{k+1}}=50\right)$

(无约束极值计算用牛顿法)

r_k	$P(X,r_k)$	$f(X)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	69.20	−26.25	0.1762	0.2575	0.2888	0.5698	0.4272
2×10^{-2}	−29.70	−31.23	0.2684	0.3208	0.3743	0.4675	0.2677
4×10^{-4}	−32.04	−32.19	0.2954	0.3311	0.3961	0.4352	0.2327
8×10^{-6}	−32.31	−32.34	0.2993	0.3332	0.3994	0.4292	0.2254

[注] 计算 $f(X)$ 及所有 $g_i(X)$ 总共 315 次，计算 ∇P 27 次，求 P 的二次偏导数 18 次。

习　　题

1. 用罚函数外点法求解

$$\min \quad f(x)=x^2$$
$$x\geqslant 1$$

2. 用罚函数法求从原点到下述直线的最短距离。

$$g_1(X)=x_1+x_2-1=0$$
$$g_2(X)=x_1+x_2-2=0$$

3. 用障碍函数法求解

$$\min \quad f(x)=\frac{1}{2}x$$
$$x-1\geqslant 0$$

并作图。

4. 用对数罚函数 $P(X,K)=f(X)+K\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\ln g_i(X)}$ 求解

$$\min\ f(X)=\frac{1}{3}(x_1+1)^3+x_2$$

$$g_1(X)=x_1-1\geqslant 0$$

$$g_2(X)=x_2\geqslant 0$$

[提示]：令 $K\to-\infty$

5. 用梯度投影算法进行四次迭代求解下述最优化问题：

$$\min\ x_1^2+2x_2^2$$

$$3x_1+x_2\geqslant 2$$

$$x_1+2x_2\geqslant 3$$

第八章　网络最优化问题

§8-1　概　　述

有关网络图的概念读者已在电路原理课程中学习过。我们简要地复习一下，为讨论网络最优化问题做准备。

我们已知，电网络是一些支路和节点的集合。无向支路也可称为边，符号为 E。有向支路也可称为弧，符号为 A。节点又可称为顶点或点，符号为 V。在电网络中每个支路表示一定的元件，如电阻、电感、电容、电压源和电流源等。在电路图中是用标准符号来表示各个元件的。由于电路基本定律（KCL，KVL）只与网络结构有关，而与网络的元件性质无关。因此在研究网络结构时不考虑元件性质，可将图中元件符号去掉，只剩下节点和支路，变成一个抽象的图称为网络图（Network graph）或网络的线性图（Linear graph），简称线图。这样，抽象的图既可以表示某个电网络，也可以表示某个运输网络或其它网络。

研究图的理论称为图论，它是应用数学的一个重要分支，回路、树和割集是图论的基本概念。网络图论又称网络拓扑学，是应用图论以研究网络的几何结构及其连接关系，对网络进行分析。

50 年代以来，图论在电路和控制理论中应用愈来愈广泛，例如电网络的分析与综合、多端口网络、网络的计算机辅助分析、信号流图等各方面都有应用。现在图论的应用还渗透到各个科学技术领域中如信息论、运筹学、运输网络、通信网络、计算机网络等等。

网络拓扑的基本定义如下：

1．图

图 G 是由点集 V 和边集 E（或弧集 A）组成。无向图符号为 $G=(V,E)$，有向图符号为 $G=(V,A)$。每个边连接两点。如果图 G_1 的每个点和边也是图 G 的点和边，则 G_1 称为 G 的子图。如果 G 的任意两点间至少有一条支路，则称 G 为连通图。

2. 回路

回路是图 G 的一个子图，它是连通图。回路中每个点恰与两条边关联，而每条边恰与两点相连。

3. 树

树 T 是连通图 G 的子图。它是连通图，包含所有 G 的点，但不包含回路。

属于树 T 的边称为树支，G 中的边但不属于树 T，称为连支。

4. 割集

连通图 G 中满足下述条件的边集 C 称为割集：

a）割去所有 C 的边，就使 G 成为不连通，将 G 分割成两个分离部分。

b）割去 C 的边，但只剩下其中一条边，图 G 仍为连通。

以上是有关图论的基本概念和定义。

一个最优化问题，用一定的数学模型表示时，可以用规划论方法求解。如果这个问题可以用一张图来表示，则称为网络模型，可以用网络拓扑或线图分析寻优，称为网络最优化方法。

线性规划模型常可以转化成网络模型，用线图分析方法在数字计算机上求解可更快地得到解答。网络理论中的线图分析包括：最短路（The shortest path）问题，最大流（The max.flow）问题，关键路（critical path）分析等等。这些问题的分析对于用最优化方法解决运输问题、管道铺设问题、公路交通或通信线路的安排、生产管理问题等都有指导意义。

§ 8-2　最短路问题

一、最短路问题举例

[例 1]　某邮递员负责某区的邮件分发。图 8—1 表示必须经过的街道网络。问邮递员应怎样走才能使总路程最短？

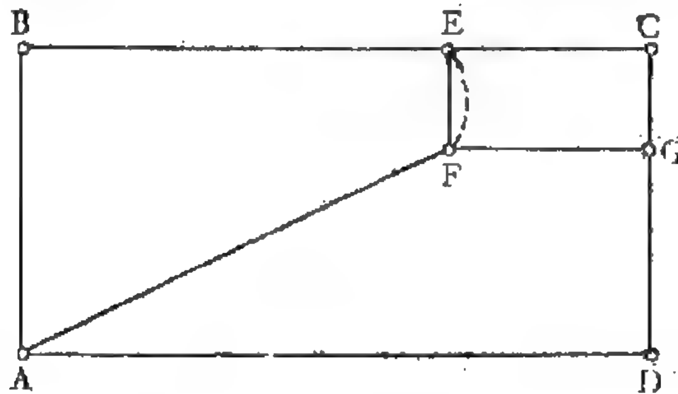


图 8—1　最短路问题的例子

显然，这个邮递员最好能不重复地一次走完规定街道（图8—1的实线）。如果在距离最短的两点间加一条重复路线（如图中虚线 EF），则可沿路线 $ABEFADGCEFG$ 走，除 EF 重复一次外，其余都是不重复地一次走完，所以这是一条最短的邮递路线。

[例 2]　从水源铺设管道，把水引到若干居民点和工业区，要求水源与各点相通，而且各点到水源间路径最短。这是供水管道布置问题。显然油管铺设问题、通信网架设问题和这一例子是类似的。

设图 8—2 中 V_1 为水源。V_2，V_3，…V_{12} 为供水点。若 V_1、V_2…V_{n-1}、V_n 是从 V_1 到 V_n 的最短路，则显然 V_1、V_2、…V_{n-1} 也是从 V_1 到 V_{n-1} 的最短路。根据这一道理可如下求得各点到水源的最短路。

1.　与 V_1 直接相联的点为 V_2、V_5，但 $l_{12}=1$，$l_{15}=2$，

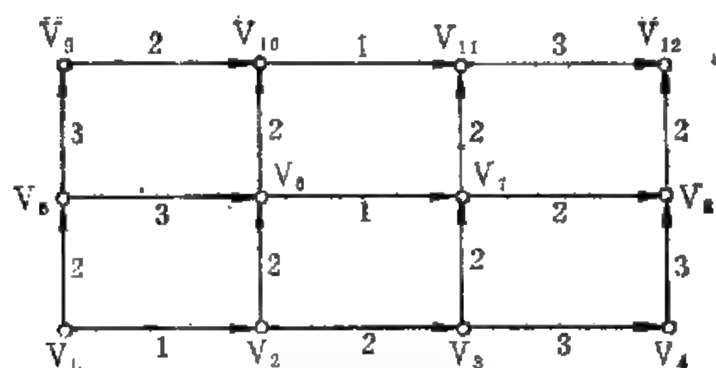


图 8—2 管道铺设问题

$l_{12}<l_{15}$，∴V_1V_2 为最短路，联接 V_1 及 V_2 两点（如图 8—3）。

2． 与 V_1、V_2 直接相联的点为 V_3、V_5、V_6，$l_{15}=2$，$l_{16}=3$，$l_{13}=l_{12}+l_{23}=3$，$l_{15}=\min\{l_{15}、l_{16}、l_{13}\}$，联接 V_1、V_5。

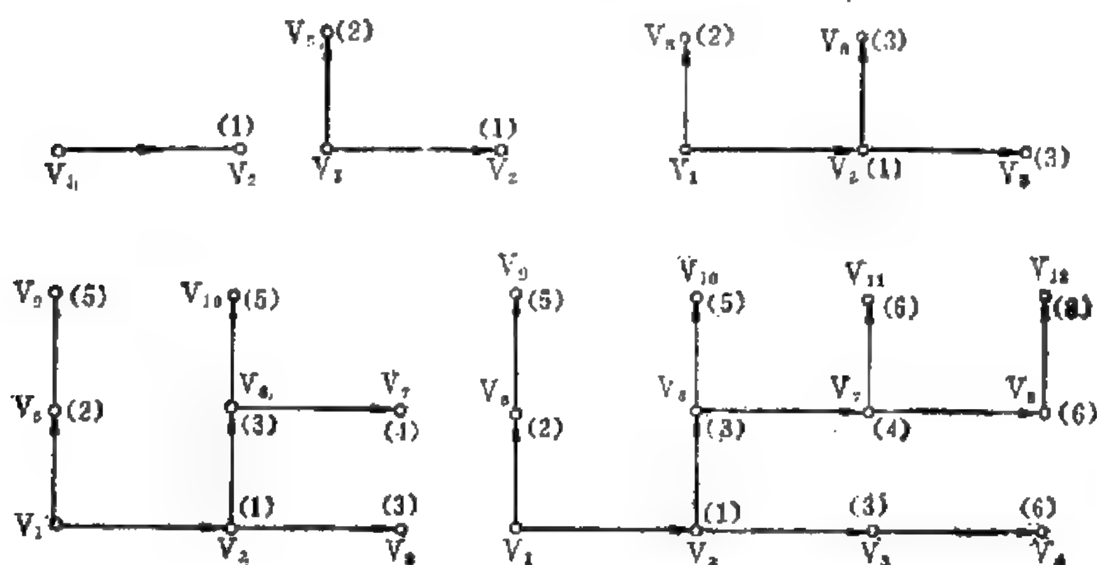


图 8—3 各点到 V_1 的最短路

3． 与 V_1、V_2、V_5 相联的点为 V_3、V_6、V_9，$l_{13}=3$，$l_{16}=3$，$l_{19}=5$，∴l_{13}、l_{16} 最短，联接 V_2V_3，V_2V_6。

4． ……

依次进行直到所有点都相联为止，图 8—3 中各点所标数字为从 V_1 到该点的最短路。

从以上两例推广到一般情况，可以对网络中最短路问题作一个简要叙述：

设 $G=(V,A)$ 为一个有向图。与每一弧 $(V_iV_j)\in A$ 相应有一长度 l_{ij}。$l_{ij}=\infty$ 表示从 V_i 到 V_j 没有弧，即没有路。$l_{ij}=0$，表示在 i 点停留。

设始点为 V_1，终点为 V_N，从 V_1 到 V_N 经过 V_2，V_3，… V_{N-1} 各点，则路的总长度为 $\sum_{i=1}^{N-1} l_{ij}$，$j=i+1$。最短路问题就是在所有从 V_1 到 V_N 的路中寻求总长度最小的路，称为从 V_1 到 V_N 的最短路。

统筹方法中的关键路（critical path）实际上是工序流程图中的最长路。而运输网络中最小费用流问题可以化成一系列最短路问题去求解。因此所谓“长度”是广义的。例如从 V_i 运输物资到 V_j，求运输距离（公里数）最小的运输路线，长度就是通常意义的距离；若求运输时间最短的路线，则“长度”代表运输时间，求运输费用最省的路线，则“长度”代表运输费用等等。

如果是无向图则可以化成有向图，只要把每条边用两条方向相反的并联弧代替，而令弧的长度等于边的长度。

最短路问题有两类：

1. 从始点 V_1 到终点 V_m 的最短路，最后所得是从始点 V_1 到各点的最短路。

2. 从任意一点到另外任意一点的所有最短路。

二、Dijkstra 标号算法

求始点 V_1 到终点 V_m 的最短路，设所有弧长 $l_{ij}\geqslant 0$。目前公认较好的算法是标号法，首先由 E.W.Dijkstra 提出。我们结合具体例子来说明。

图 8—4 网络中，弧长（广义长度）矩阵如下：

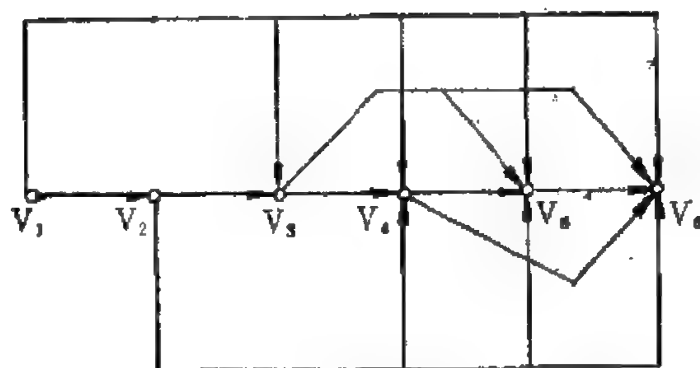


图 8—4 求最短路的一个网络

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	16	22	30	41	59
V_2	∞	0	16	22	30	41
V_3	∞	∞	0	17	23	31
V_4	∞	∞	∞	0	17	23
V_5	∞	∞	∞	∞	0	18
V_6	∞	∞	∞	∞	∞	0

从始点 V_1 开始，给每点一个数，或称标号。分 T 标号与 P 标号两种。T 为试探性标号，P 为永久性标号。

给 V_j 点一个 P 标号时，表示从 V_1 到 V_j 的最短路长。给 V_j 点一个 T 标号时，表示从 V_1 到 V_j 的估计最短路长。凡是没有标上 P 标号的点，标以 T 标号，以便用来进一步计算该点的 P 标号。已得到 P 标号的点不再改变标号。一旦终点得到 P 标号，算法停止。最多经过 $m-1$ 步算法就可以求得从始点 V_1 到终点 V_m 的最短路。

图 8—4 的最短路算法如下：

1. 将 V_1 标上 P 标号 0，即 $P(1)=0$，表示从 V_1 到 V_1 的距离为 0。

其它点（V_2~V_6）还没有 P 标号，给它们标上 $T(j)=\infty$，$j=2,3,4,5,6$。

2. 分析还没有得到 P 标号的各点 V_j ($j=2,3,4,5,6$)，比较 $T(j)$ 和 $P(1)+l_{1j}$，l_{1j} 为 V_1 到 V_j 的弧长。将 V_j 的新标号取较小者，即 $T(j)=\min[T(j),P(1)+l_{1j}]$。如果 $[P(1)+l_{1j}]<T(j)$，则用 $P(1)+l_{1j}$ 代替 $T(j)$ 作为 V_j 点的新的 T 标号。

$$T(2)=\min[T(2),\ P(1)+l_{12}]=\min[\infty,\ 0+16]=16$$

$$T(3)=\min[T(3),\ P(1)+l_{13}]=\min[\infty,\ 0+22]=22$$

$$T(4)=\min[T(4),\ P(1)+l_{14}]=\min[\infty,\ 0+30]=30$$

$$T(5)=\min[T(5),\ P(1)+l_{15}]=\min[\infty,\ 0+41]=41$$

$$T(6)=\min[T(6),\ P(1)+l_{16}]=\min[\infty,\ 0+59]=59$$

点 V_2 的 T 标号的数最小，令 $P(2)=16$。

3. 以点 V_2（刚得到 P 标号的点）作为比较基础，重复上述过程，即比较 $T(j)$ 与 $[P(2)+l_{2j}]$，$j=3,4,5,6$ 取较小的数作为点 V_j 的新的 T 标号。

$$T(3)=\min[T(3),\ P(2)+l_{23}]=\min[22,\ 16+16]=22$$

$$T(4)=\min[T(4),\ P(2)+l_{24}]=\min[30,\ 16+22]=30$$

$$T(5)=\min[T(5),\ P(2)+l_{25}]=\min[41,\ 16+30]=41$$

$$T(6)=\min[T(6),\ P(2)+l_{26}]=\min[59,\ 16+41]=57$$

显见，点 V_6 的 T 标号数由 59 变为 57，其余未改动。

比较 $T(3)$、$T(4)$、$T(5)$、$T(6)$，$T(3)=22$ 为最小，将点 V_3 的 T 标号改为 P 标号：$P(3)=22$。

4. 再重复上述过程，以点 V_3 为比较基础。

$$T(4)=\min[T(4),\ P(3)+l_{34}]=\min[30,\ 22+17]=30$$

$$T(5)=\min[T(5),\ P(3)+l_{35}]=\min[41,\ 22+23]=41$$

$T(6)=\min[T(6),\ P(3)+l_{36}]=\min[57,\ 22+31]=53$

点 V_6 的 T 标号由 57 变为 53 ，其余未动。$T(4)\sim T(6)$ 中 $T(4)=30$ 为最小，令 $P(4)=30$。

5. 下一步以点 V_4 为比较基础。

$T(5)=\min[T(5),\ P(4)+l_{45}]=\min[41,\ 30+17]=41$

$T(6)=\min[T(6),\ P(4)+l_{46}]=\min[53,\ 30+23]=53$

V_5，V_6 的 T 标号均未变，$T(5)=41$ 为最小，令 $P(5)=41$。

6. 最后一步以点 V_5 为比较基础。

$T(6)=\min[T(6),\ P(5)+l_{56}]=\min[53,\ 41+18]=53$，

令 $P(6)=53$。

终点 V_6 已标了 P 标号，程序到此结束。前已指出，$P(j)$ 表示始点 V_1 到 V_j 的最短路长。例如点 V_1 到 V_3 最短路长为 22，点 V_1 到 V_5 最短路长为 41，而点 V_1 到终点最短路长为 $P(6)=53$。

如果只须要知道从点 V_1 到点 V_k 的最短路，则一旦点 V_k 标了 P 标号，算法即可终止。(编程序时可安排在这时停机）。

这种算法只适用于弧长为正的情况。在考虑弧长允许为负的情况，上述算法显然不适用了。因为如图 8—5 所示，从 V_1 到 V_3 的最短路不是 $l_{13}=1$，而是 $l_{12}+l_{23}=-2$。关于这种特殊情况的算法，我们不作详细讨论。

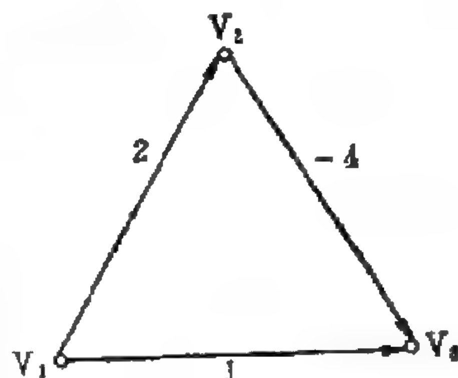


图 8—5 一弧长为负的特殊情况

三、从任一点到另外任一点的最短路算法

这种算法要求先构造长度矩阵 L，依次计算：

$$L^{(2)} = L * L,\ L^{(3)} = L^{(2)} * L,\ \cdots$$

定义 $A * B = C = [c_{ij}]_{m\times n}$

其中 $A = [a_{ij}]_{m\times l}$, $B = [b_{ij}]_{l\times n}$

$$c_{ij} = \min_{\text{非零元素}} \{a_{i1} * b_{1j}, a_{i2} * b_{2j}, \cdots a_{il} * b_{lj}\}$$

若 $a_{ik} * b_{kj}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ 全为0，则 $c_{ij} = 0$

$$a_{ik} * b_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{当 } a_{ik} = 0 \text{ 或 } b_{kj} = 0 \\ a_{ik} + b_{kj} & \text{当 } a_{ik} \neq 0\text{、}b_{kj} \neq 0 \end{cases}$$

[例] $A = [1\ 2\ 3\ 4\ 0\ 0]$, $B = [0\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0]^T$

则 $A * B = [1\ 2\ 3\ 4\ 0\ 0] * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \min_{\text{非零元素}} \{0, 4, 4, 5, 0, 0\}$

$= 4$

下面我们以图 8—6 说明各长度矩阵的构造法。取没有路时长度为 0。

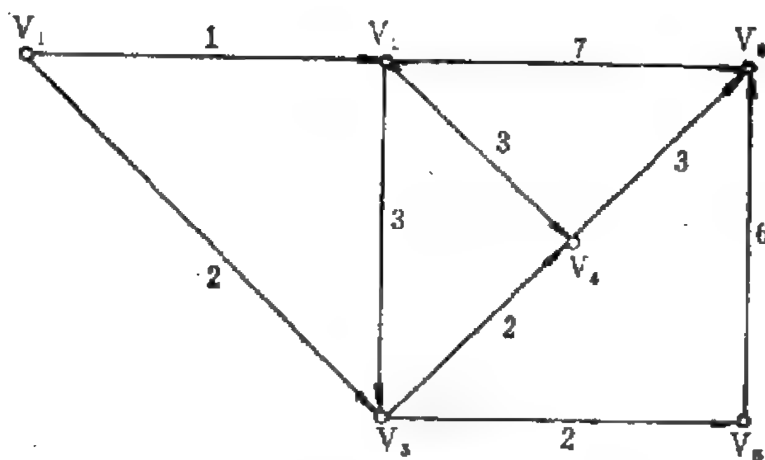


图 8—6 网络举例

$$L = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$L^{(2)} = [l_{ij}^{(2)}] = L * L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$l_{ij}^{(2)} \neq 0$ 表示从 V_i 到 V_j 走两步的路程中距离最短的一条。

$l_{ij}^{(2)} = 0$ 表示从 V_i 到 V_j 两步到不了。

例如 $l_{14}^{(2)} = 4$ 表示从 V_1 到 V_4 走两步的最短距离为 4。(从 V_1 经过 V_2 或 V_3 到 V_4)。

$l_{36}^{(2)} = 5$，由图 8—6 可见从 V_3 到 V_6 走两步有两条路：$V_3 \to V_5 \to V_6$，$l_{36} = 8$ 及 $V_3 \to V_4 \to V_6$，$l_{36} = 5$。其中最短路为 $V_3 \to V_4 \to V_6$，$\therefore l_{36}^{(2)} = 5$。

$$L^{(3)} = L^{(2)} * L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [l_{ij}^{(3)}]$$

同理 $l_{ij}^{(3)}$ 表示从 V_i 走三步到 V_j 距离最短的一条路。例如

$l_{26}^{(3)}=\min\{8,\ 11\}=8$。

$$L^{(4)}=L^{(3)}*L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$L^{(5)}=L^{(4)}*L=0$ (零矩阵)。

为求从 V_i 到 V_j 的最短距离，定义

$A\oplus B=[c_{ij}]_{m\times n}$

其中 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，　$B=[b_{ij}]_{m\times n}$

$$c_{ij}=\begin{cases} 0, & a_{ij}=b_{ij}=0 \\ a_{ij}, & a_{ij}>0,\ b_{ij}=0 \\ b_{ij}, & a_{ij}=0\quad b_{ij}>0 \\ \min(a_{ij},b_{ij}), & a_{ij}、b_{ij}\neq 0 \end{cases}$$

$$L_{\min}=L\oplus L^{(2)}\oplus L^{(3)}\oplus L^{(4)}\oplus L^{(5)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 4 & 7 \\ & 0 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ & & 0 & 2 & 2 & 5 \\ & & & 0 & 0 & 3 \\ & 0 & & & 0 & 6 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$=[l_{ij\min}]$

$l_{ij}\min$ 表示从 V_i 到 V_j 的最短距离。

§ 8-3　网络最大流问题

许多工程系统的网络包含了流量问题。例如公路系统中有车辆

流（车辆数/小时），控制系统、计算机中有信息流，供水系统中有水流（m^3/单位时间），金融系统中有现金流等等。网络中每条弧有一定的容量 C，即最大通过能力有限制。实际流量 f 并不一定等于容量 C。决定网络的最大流量称为网络最大流问题。

一、可行流与最大流

图 8—7 表示电力系统的网络图。V_1、V_2、V_3 是三个电站，其发电容量分别为 15、10、40 兆瓦。V_4～V_8 为电站供电的各城市。各点间联线表示高压输电线。用 C_{ij}（单位为兆瓦）表示 V_i 与 V_j 间输电线容量。

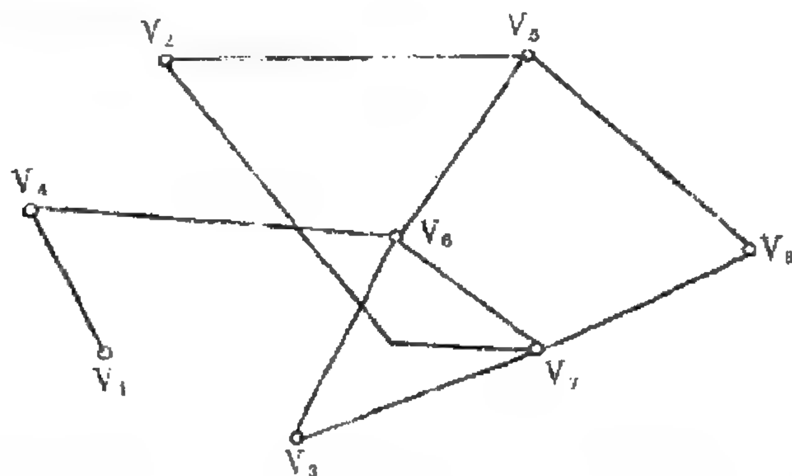


图 8—7 某电力系统网络

人们自然会提出这样的问题：从三个电站输送电力到每个城市的最大兆瓦数等于多少？要解决电力系统最大流问题必须对该系统输电能力进行分析。如果分析结果认为现有输电线容量（输电能力的限制）大于城市发展规划要求，则在扩建城市时，可以充分挖掘潜力，不必另架输电线路。

图 8—8 表示一个输油管道网络，弧为输油管，数字（C_{ij}）表示从 V_i 到 V_j 每条弧（输油管）的最大输油能力。点 V_1，V_2，…V_6 表示油泵站。

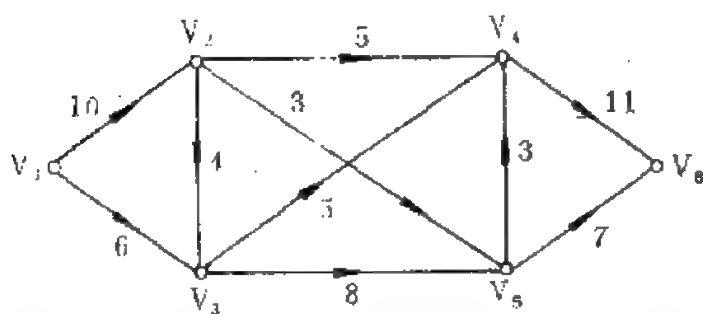


图 8—8 管道网络

设 f_{ij} 为从 V_i 到 V_j 的流量。由图 8—8可知：

$$\left.\begin{array}{l} f_{12}\leqslant 10,\ f_{13}\leqslant 6,\ f_{23}\leqslant 4,\ f_{24}\leqslant 5,\ f_{25}\leqslant 3, \\ f_{34}\leqslant 5,\ f_{35}\leqslant 8,\ f_{46}\leqslant 11,\ f_{54}\leqslant 3,\ f_{56}\leqslant 7 \end{array}\right\} \tag{8—1}$$

点 V_1、V_6 分别称为发点和收点，应满足：

$$f_{12}+f_{13}=f_{46}+f_{56} \tag{8—2}$$

最大流问题可用线性规划模型表示：

目标
$$\max_{f_{ij}} F=f_{12}+f_{13} \tag{8—3}$$

约束条件为各中间点输入油量 = 输出油量，

即
$$\left.\begin{array}{l} f_{12}-f_{23}-f_{24}-f_{25}=0 \\ f_{13}+f_{23}-f_{34}-f_{35}=0 \\ f_{24}+f_{34}+f_{54}-f_{46}=0 \\ f_{25}+f_{35}-f_{54}-f_{56}=0 \\ f_{12}+f_{13}-f_{46}-f_{56}=0 \end{array}\right\} \tag{8—4}$$

此外流量 f_{ij} 总是非负的，所以对所有 i 及 j

$$f_{ij}\geqslant 0 \tag{8—5}$$

并应满足式（8—1）规定的范围。

运输问题是最大流问题的实际应用。在 A、B 两城市间有几个中间站由铁路网连成一片，每两站之间铁路通过能力即容量用数字 C_{ij} 表示。设 A 为某产品产地，B 为销地，产品通过铁路网从 A 运到 B，求从 A 到 B 的最大运输量（即最大流）。每段铁路的运输量当然不能超过该段最大通过能力。而每个中间站总运进量等于总运出量。从 A 城的运出量 F 等于给 B 城的运进量。

最大流问题可以用线性规划问题求解，也可以用网络模型求解。

设有向图 $G=(V、A)$。弧 $a_{ij}=(V_iV_j)\in A$，弧 a_{ij} 的容量为 C_{ij}，f_{ij} 为 a_{ij} 上的流量。弧的流量函数集合称为网络流。

网络中有发点（或源）V_s 和收点（或汇集点）V_t，其余点为中间点。

定义。满足下述条件的流 f 称为可行流：

a） 容量限制条件，对每一弧 $a_{ij}\in A$

$$0\leqslant f_{ij}\leqslant C_{ij} \qquad (8—6)$$

这是线性不等式约束条件。

b） 平衡条件

对中间点说　流出量＝流入量，

$$\Sigma f_{ij}-\Sigma f_{ji}=0, \quad i\neq s,t \qquad (8—7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{发点 } V_s \text{ 净输出 } \Sigma f_{sj}=F \\ \text{收点 } V_t \text{ 净输入 } \Sigma f_{jt}=F\end{array}\right\} \quad (8—8)$$

这是线性等式约束条件。

用网络模型求可行流就是求一个总输送量为 F 的运输方案，相当于线性规划中求一个可行解。如果所有各弧流量为 0，即 $f=0$，这也是一种可行流，它的流量为 0。

最大流问题为求一个使流量 F 达到最大的可行流 $\{f_{ij}\}$，使满足

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant C_{ij}$$

$$\Sigma f_{ij} - \Sigma f_{ji} = \begin{cases} F, & i = s \\ 0, & i \neq s, t \\ -F, & i = t \end{cases} \qquad (8\text{—}9)$$

二、最大流—最小割定理（Ford-Fulkersen 定理）

［例］ 图 8—9 为一个交通运输网络 $G=(V、A)$。假设有一条小河穿过（V_bV_t）和（V_cV_t）两弧，能渡河的运输量各为 10 与 22。所以运输量不会超过 32。若小河穿过（V_sV_a）、（V_bV_a）、（V_bV_c）、（V_bV_t）四段路，则渡河运输量不超过 $20+9+13+22=64$，（见图 8—10）。

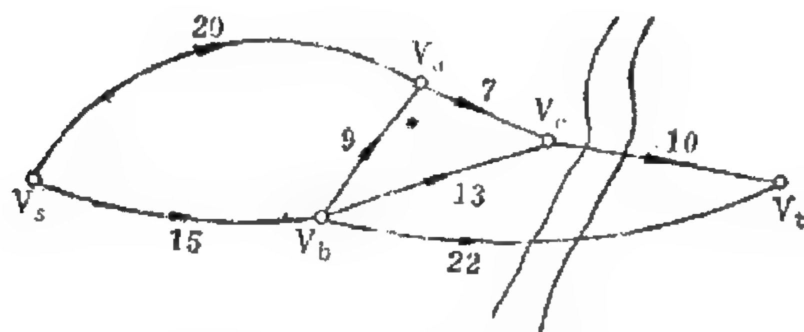


图 8—9　交通运输网络（一）

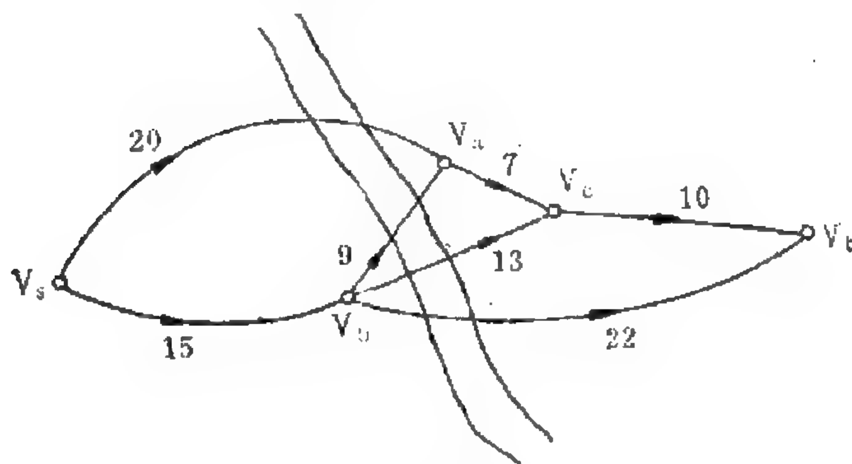


图 8—10　交通运输网络（二）

上面所述两条小河分别割断不同弧集使连通图 G 中收点 V_t 和发点 V_s 分别属于两个子图，称为割集。割集是从 V_s 到 V_t 的必经之道，显见任何一个可行流的流量 F 不会超过任一割集的容量，称为割集容量。上述运输网络有5个割集（如图 8—11），其容量分别为 35，31，64，42，32。最小的割集容量为 31，简称为最小割。显然从 V_s 流向 V_t 的运输量 F 最大不能超过 31，即网络最大流与网络最小割有密切关系。

图 8—11 中各弧都是由 V_s 指向 V_t，割集将图分成两部分 X 和 $\bar{X}$，$V_s \in X$，$V_t \in \bar{X}$。画成等效图如图 8—12*a*。从 X 集

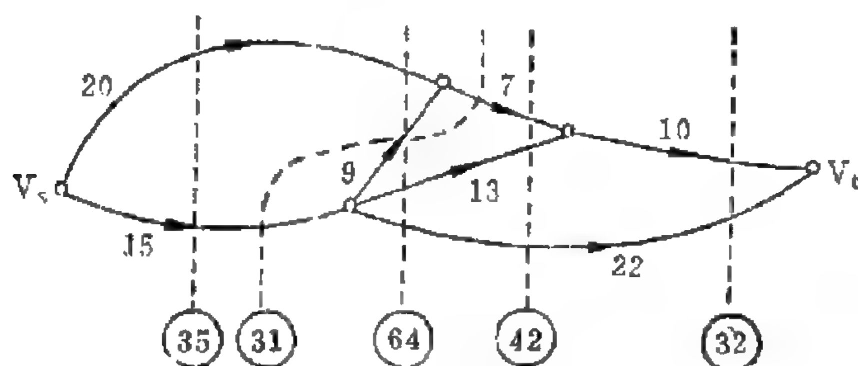


图 8—11 割集

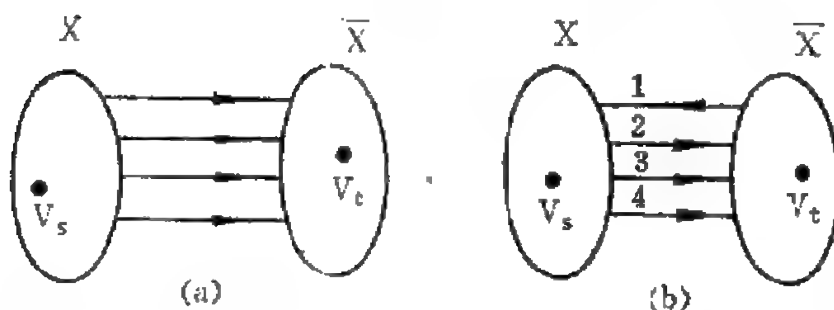


图 8—12 割集将图分为 X 及 $\bar{X}$ 两部分

合指向 $\bar{X}$ 集合的所有弧都是割集。但 X 和 $\bar{X}$ 间的弧可能从 X 指向 $\bar{X}$，也可能从 $\bar{X}$ 指向 X（如图 8—12*b*），若将 X 和 $\bar{X}$ 间所有弧都割断，则图 G 变为不连通图。若只割断从 X 指向 $\bar{X}$ 的那部分弧（如图 8—12*b* 中 2,3,4），则图 G 仍连通，但从 V_s

到 V_t 仍没有路。这里弧 2、3、4 正是运输问题上定义的割集：即从 X 到 $\bar{X}$ 的所有弧。广义的割集定义是（见本章 §8-1）：X 和 $\bar{X}$ 间的所有弧。去掉这组割集将使图 G 成为不连通的。

当割集中的弧的流量 $f_{ij}=C_{ij}$ 时，称为饱和。

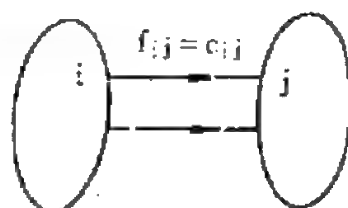


图 8—13 $f_{ij}=C_{ij}$

任一网络 G 中从 V_s 到 V_t 的最大流的流量等于分离 V_s、V_t 的最小割集容量。称为最大流-最小割定理：

最大流 = 最小割

这是求最大流问题的一个重要定理，它告诉我们：若能找到一个可行流 f^* 和一个割集 $(X^*\bar{X}^*)$ 使 $F(f^*)=C(X^*\bar{X}^*)$，则 f^* 就是最大流，而 $(X^*\bar{X}^*)$ 是所有割集中容量最小的一个。

定理. 任一网络 G 中，若所有弧容量为整数，则必存在整数的最大流。

求网络（两点间）的最短距离和求网络的最大流（或最小割）是一个对偶问题，这牵涉到网络的变换问题，我们将这一变换问题留到本节最后讨论。

三、最大流算法一

为了说明寻找最大流的算法，先介绍增广链的概念。

定义：设 f 是一个可行流，μ 是从 V_s 到 V_t 的一条链，满足下述条件的链称为增广链。

$$\left.\begin{aligned} &弧\ (V_iV_j)\in\mu^+, \quad 0\leqslant f_{ij}<C_{ij} \\ &弧\ (V_iV_j)\in\mu^-, \quad 0<f_{ij}\leqslant C_{ij} \end{aligned}\right\}(8—10)$$

弧向与走向一致标为 μ^+，相反的时候标为 μ^-。

[例] 图 8—14a 中每弧标有两个数字 (C, f)。第一位数字 C 为容量，第二位数字 f 为流量。该网络的流量 $F=4$，它不一定

是最大流。

取从 V_s 到 V_t 的一条链（如图 8—14b），$V_s \to V_1 \to V_2 \to V_4 \to V_t$。$(V_sV_1)$、$(V_2V_4)$、$(V_4V_t) \in \mu^+$，$(V_2V_1) \in \mu^-$ 满足增广链的条件式（8—10）。∴图 8—14b 表示的链为增广链。

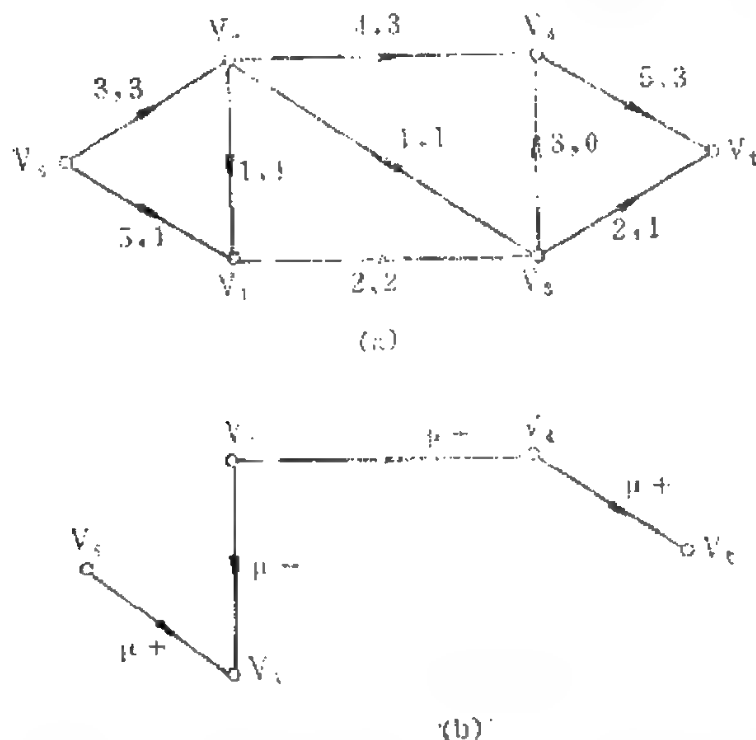


图 8—14　计算最大流的例子

定理．可行流 f^* 是最大流，当且仅当不存在关于 f^* 的增广链。

这一定理没有给出最大流，但它提供了求最大流的搜索方向，即将最大流问题化为求增广链问题。增广链的实际意义是：沿着这条链从发点到收点输送一个流，有潜力可挖。将流量进行调整后有可能得到最大流。这是应用增广链概念的好处。调整各弧的流量后，各点仍满足平衡条件及容量限制条件。调整方法是：若调整前流量为 f_{ij}，设调整后流量为 f'_{ij}。取△为适当小的数，则

$$f_{ij}'=\begin{cases}f_{ij}+\triangle, & (V_iV_j)\in\mu^+\\ f_{ij}-\triangle, & (V_iV_j)\in\mu^-\\ f_{ij}\quad, & (V_iV_j)\overline{\in}\mu\end{cases}\qquad(8\text{—}11)$$

图 8—14(b) 取$\triangle=1$，则增广链调整前后流量如图 8—15 所示。调整后 f' 满足平衡及容量限制条件，所以仍是可行流。流量 $F(f')=5$ 代替原来的 $F(f)=4$。

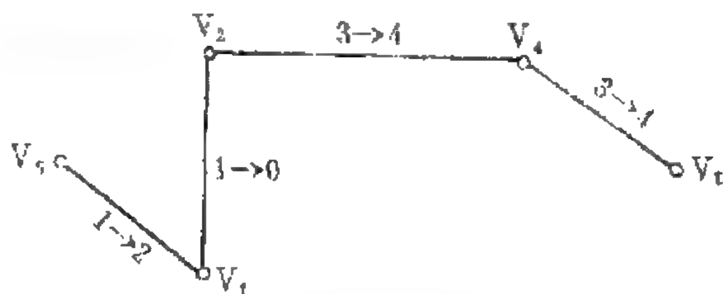


图 8—15 增广链调整前后的流量

	(V_sV_1)	(V_1V_2)	(V_2V_4)	(V_4V_t)
f	1	1	3	3
f'	2	0	4	4

这里所述的最大流算法仍是一种标号法。从一个可行流 f 开始，若网络中没有给定 f，则可以假设 $f=0$，即从零流开始，(零流也是一个可行流)。然后用标号法求关于可行流 f 的增广链。若增广链存在，则可以经过调整，得到一个新的可行流 f'，其流量 $F(f')$ 比 $F(f)$ 增大。下一步重复这一过程，直到得出某一可行流 f^*，关于该流的增广链不复存在，则 f^* 即为最大流。上述求最大流的方法实质上就是通过调整尽量使正向弧的流量等于（或接近于）容量，而使反向弧流量尽量等于（或接近于）0。

算法分为两步（见图 8—16）：

第一步是标号过程，用标号法找有无增广链。

第二步是调整过程，若有增广链，调整 f。

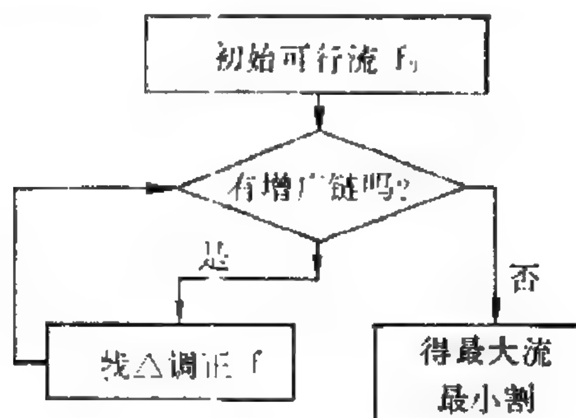


图 8—16 最大流算法框图

现以图 8—14a 为例说明算法。取网络已给定的 f 为可行流。

第一步，标号过程。

1. 首先给 V_s 标上 $[S, +\infty]$

2. 检验 V_s，看有无满足增广链条件的弧，它有两个相邻点 V_1 及 V_2，检查从 V_s 点出来的弧其 f 是否小于 C？$f_{s2}=C_{s2}=3$，舍弃不用。

$f_{s1}=1<C_{s1}$，在 V_1 点标上 $[+S, 4]$，$+S$ 表示从 V_s 来，可以由该点向 V_1 增加流量，4 表示从发点到 V_1 可以增加的流量。

[注]一般情况，对弧 (V_jV_k)，若 $0\leqslant f_{jk}<C_{jk}$，给 V_k 标上 $[+j, \triangle(k)]$，$\triangle(k)=\min[\triangle(j),\ C_{jk}-f_{jk}]$。

对弧 (V_kV_j)，若 $0<f_{kj}$，给 V_k 标上 $[-j,\ \triangle(k)]$，$\triangle(k)=\min[\triangle(j), f_{kj}]$。

3. 检验 V_1，看从 V_1 出去的弧是否满足 $f<C$ 条件，进入 V_1 的弧是否满足 $f>0$ 的条件。

检验结果： (V_1V_3)， $f=C=2$ 舍弃

(V_sV_1)， V_s 已标号， 不考虑

(V_2V_1)， 从 V_2 进入 V_1，$f=1>0$

在 V_2 点标 [-1,1]，其中 -1 表示"到 V_1 去"，1 表示可从 f_{21} 减少的流量。$\min[4,f_{21}]=\min[4,1]=1$。

4. 检验 V_2，V_2 有 V_3、V_4 两个相邻点。

$f_{24}<C_{24}$，$f_{32}=1>0$，∴ V_4、V_3 均可标号，分别标以 [+2,1][-2,1]。

5. 在 V_3、V_4 两个点中任选一个进行检验。

例如 V_3 共相邻点为 V_t，未标号，而 $f_{3t}<C_{3t}$，∴V_t 可标以 [+3,1]。

至此标号过程完毕，找到一条增广链如图 8—17 所示。其中 $\mu^+=\{(V_sV_1),(V_3V_t)\}$，$\mu^-=\{(V_2V_1),(V_3V_2)\}$。

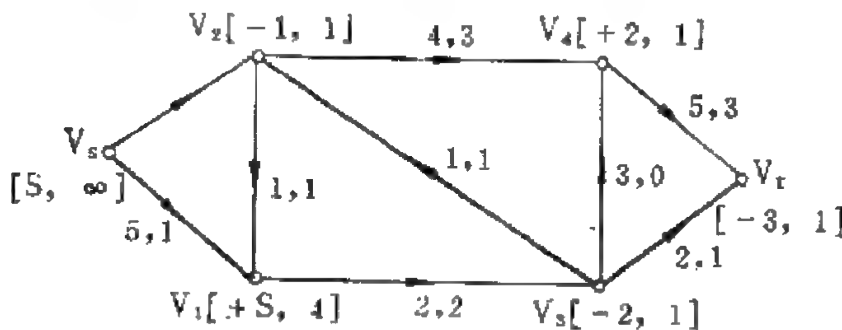


图 8—17 增广链 (V_sV_1)、(V_3V_t)、(V_2V_1)、(V_3V_2)

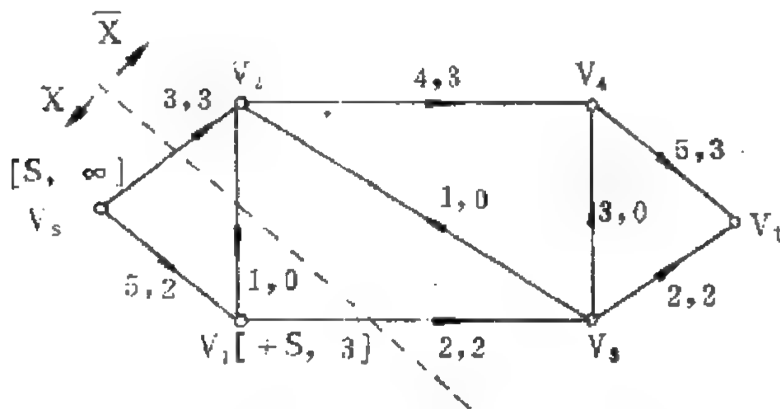


图 8—18 虚线表示最小割

第二步，调整过程。

取调整量 $\triangle=\min\{4,1,1,1\}=1$，调整后各弧 f 如图 8—18，得新的可行流。

重复进行标号过程找增广链。

重新给 V_s 标以 $[S,\ +\infty]$，V_1 标以 $[+S,3]$，从 V_1 到 V_3，$f=C$；从 V_2 到 V_1，$f=0$；均不符合增广链条件，所以不可能再给其它点标号。

这时 $F(f)=f_{s1}+f_{s2}=f_{3t}+f_{4t}=5$，$f$ 即为所求的最大流。算法过程至此结束。

用标号法可以很快找到最小割，即标号点指向未标号点集合的割集，如图 8—18 虚线所示。如果图 8—18 所示 f 已是最大流，则该割集容量应为最小，而且最小割 = 最大流 = 5。

令已标号的点组成集合 X，$X=\{V_sV_1\}$，未标号的点组成集合 $\bar{X}$，$\bar{X}=\{V_2V_3V_4V_t\}$，则割集 $(X\bar{X})=\{(V_sV_2),(V_1V_3)\}$，弧 (V_2V_1) 由 $\bar{X}$ 指向 X，所以不计入割集中。由计算可知 $C(X\bar{X})=3+2=5$。

由上述可见，用标号法找增广链以求最大流的结果，同时求得最小割。最小割的意义是：网络中从发点到收点，有一条必经之路，其容量决定了网络通过能力。最小割则是这条必经之路中的咽喉部分，其容量最小。因此决定了网络的最大通过能力。要提高流量，提高网络运输能力，必须改造这个咽喉部分。

四、最大流算法二

这一方法不必寻找增广链，而是应用正反向标号法。算法过程简述如下：

1． 在网络中从发点到收点任意选择一条容量为正的路。即路中各弧均为正向弧。令 C 表示路的容量，选 C 等于这条路上各段弧中容量最小者。

2． 在所选的路中，每弧增加流量 C，即用 $f_{ij}+C$ 代替 f_{ij} [f_{ij} 为（V_iV_j）弧的流量]。与原来情况相比，从发点到收点沿该路多送了一个流量 C。

3． 用 $C_{ij}-C$ 代替原来 C_{ij}，C_{ij} 表示前一步计算时弧（$V_i V_j$）的容量多余数。例如开始设 $f=0$，则 C_{ij} = 每弧实际容量，全部都是多余的，没有被利用。令 $f=0+C$，则下一步多余的容量变为 $C_{ij}-f=C_{ij}-C$，将 $C_{ij}-C$ 标在弧的起点，作为正向标号。

4． 假设网络中沿上述路存在（V_jV_i）反向弧，（这是算法上的需要，实际并不存在反向弧）。将反向弧（V_jV_i）容量加 C，用 $C_{ji}+C$ 代替 C_{ji}，相当于沿正向弧（V_iV_j）容量为 $C_{ij}-C$。将 $C_{ji}+C$ 作为反向标号标在弧的终点。

5． 选择另一条从发点到收点具有正容量的路，重复以上过程，直到从发点到收点没有其它正容量的路为止。

[例] 图 8—1 输电系统中网络最大流算法。所给网络中 V_1、

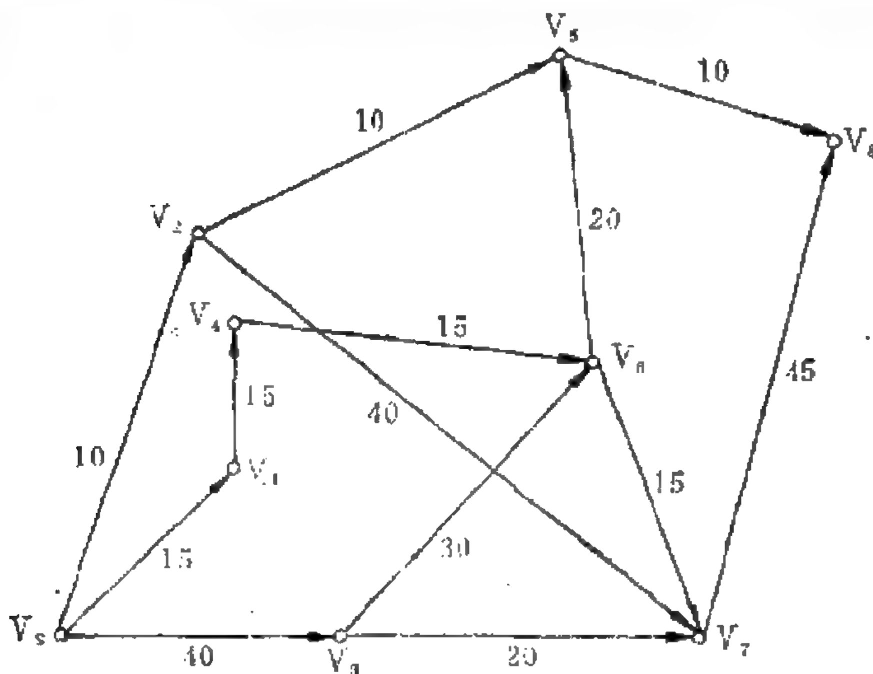


图 8—19 输电系统网络

V_2、V_3 为电站，因此这是一个多发点网络，在计算时将它化为单发点网络较方便。这只要在原网络中增加一个新的发点 V_s，V_s 有三个关联弧分别指向 V_1、V_2、V_3（实际的发点），如图 8—19，而 V_1、V_2、V_3 不再看作是发点。从 V_s 到 V_1、V_2、V_3 各弧的容量 C_{s1}、C_{s2}、C_{s3} 应该等于三个电站的发电功率，即分别为 15、10、40 兆瓦。图 8—19 中还标明了其它各弧（V_iV_j）的容量 C_{ij}。（单位均为兆瓦）。现在求从电站到 V_4～V_8 五个城市输电的最大流。如果在这五个城市中任何一个算作收点，求从 V_s 点到该点的最大流，则图 8--19 所示网络存在着五个最大流问题。

现在设点 V_8 为收点。从图 8—19 直观判断，容量最小的割集为 $\{(V_6V_8),(V_7V_8)\}$，因此网络的最小割为 $10+45=55$，这就是最大流量 F。但每段弧上的流量不能一下子看出来，必须逐步计算。我们用上述的正反向标号算法。

第一次计算

1. 从 V_s 点开始，任意选择一条到 V_8 的路，路上各弧均为正向弧，即容量 C_{ij} 均为正。例如选$V_s \to V_3 \to V_7 \to V_8$ 这条路，选路的容量为

$$C=\min\{C_{s3},\ C_{37},\ C_{78}\}=\min\{40,\ 20,\ 45\}=20$$

2. 图 8—19 中未标明流量，设可行流为 0，于是所选的一条路上各弧流量为 $f_{s3}=f_{37}=f_{78}=C=20$。

3. 在 0 流时，这条路上每段弧的容量都未被利用，增加 20 单位的流量，则未被利用的容量减少 20，所以

$$C_{s3}'=C_{s3}-20=20$$

$$C_{37}'=C_{37}-20=0$$

$$C_{78}'=C_{78}-20=25$$

4. 这条路上假设反向弧（V_8V_7），（V_7V_3），（V_3V_s）容量

C_{ji} 原为0，现在分别加 $C=20$，则

$$C_{87}'=C_{73}'=C_{35}'=20$$

5. 网络中其它各弧流量仍为0，我们可以分别标出其正向及反向容量，例如 $C_{s2}=10$，$C_{2s}=0$，整个网络的正反向标号如图8—20。

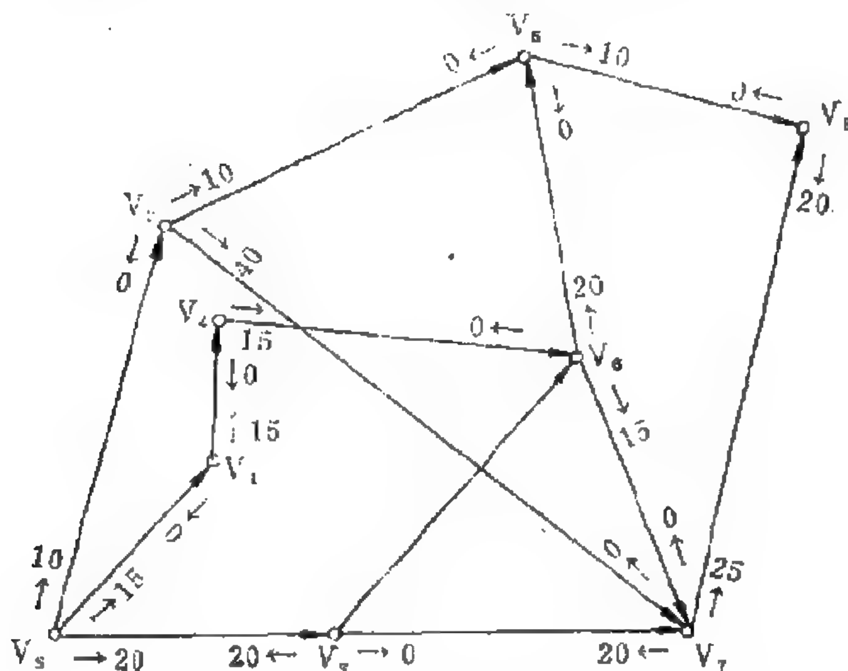


图 8—20　第一次计算后正反向标号

然后从发点到收点选择另一条具有正容量的路。重复以上步骤。沿这条路输送尽可能大的流，每次运算，均将这条路上各弧正向容量减少，而将每个弧反向容量加大。

第二次计算

设选一条路为 $V_s \to V_2 \to V_5 \to V_8$，其最小容量为10，取 $C=10$，沿该路输送一个流量为10的流。于是 $f_{s2}=f_{25}=f_{58}=10$。

C_{s2}'、C_{25}'、C_{58}' 均由原来的10减为0。

C_{85}'、C_{52}'、C_{2s}' 均由原来的0增为10，新的网络标号如图8—21。

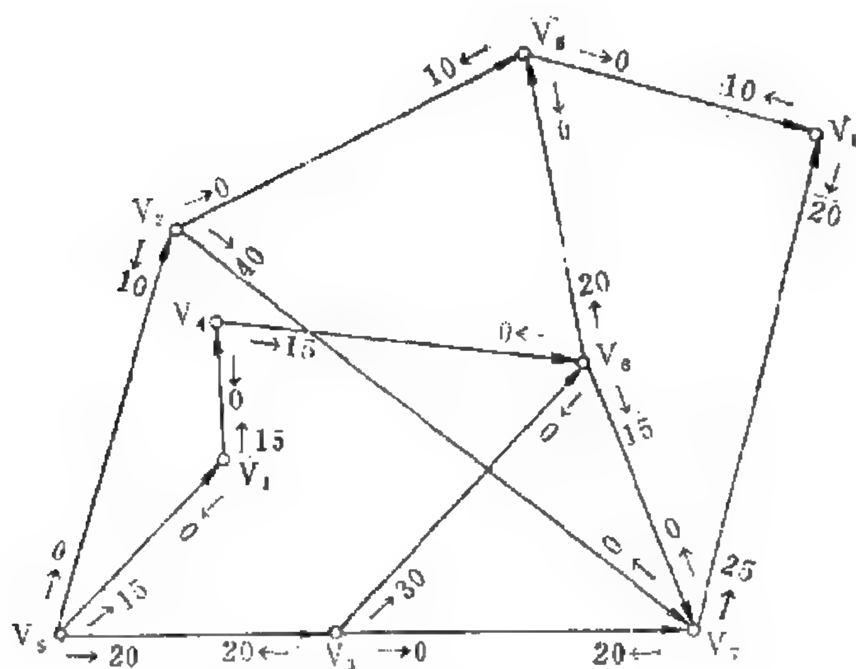


图 8—21 第二次计算结果

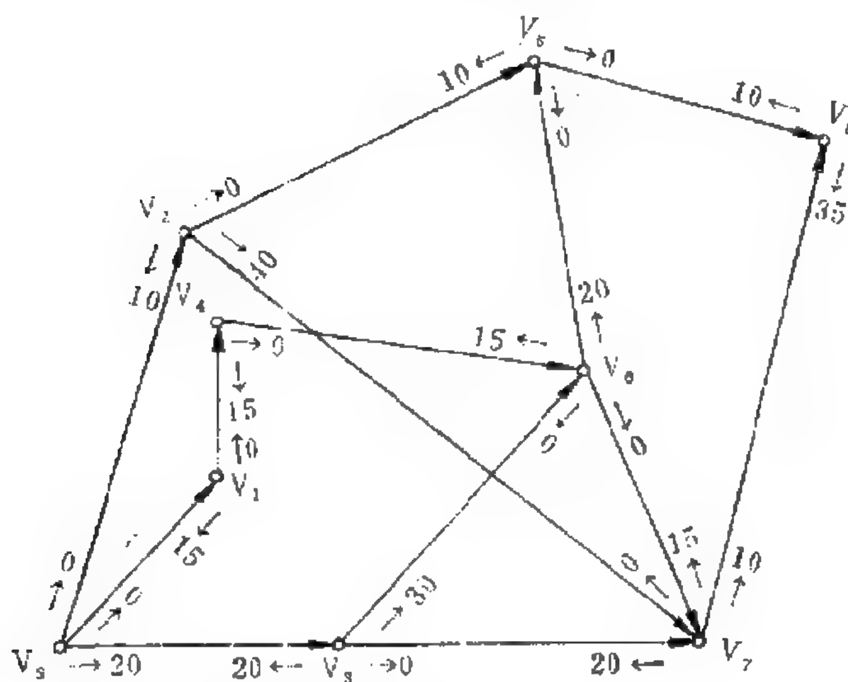


图 8—22 第三次计算结果

第三次计算

选一条路为 $V_s \to V_1 \to V_4 \to V_6 \to V_7 \to V_8$，其最小容量为 15，

取 $C=15$。

标号调整如下：f_{78} 由 20 增为 35，f_{s1}、f_{14}、f_{46}、f_{67} 均由 0 增为 15。

C_{78} 由 25 降为 10，而 C_{s1}、C_{14}、C_{46}、C_{67} 由 15 降为0 。

C_{87} 由 20 增为 35，C_{76}、C_{64}、C_{41}、C_{1s} 由0增为 15，调整后的网络标号如图 8—22。

第四次计算

现在从 V_s 到 V_8 只剩下一条路还未选用，即 $V_s \to V_3 \to V_6 \to V_5 \to V_2 \to V_7 \to V_8$，其最小容量为 $C_{52}=10$，取 $C=10$。即沿这条路增加一个流量为 10 的流。

调整标号：

f_{s3} 由 20 增为 30，f_{78} 由 35 增为 45，f_{36}、f_{65}、f_{52}、f_{27} 由0增为 10。

正向容量调整

	C_{s3}	C_{36}	C_{65}	C_{52}	C_{27}	C_{78}
调整前	20	30	20	10	40	10
调整后	10	20	10	0	30	0

反向容量调整

	C_{87}	C_{72}	C_{25}	C_{56}	C_{63}	C_{3s}
调整前	35	0	0	0	0	20
调整后	45	10	10	10	10	30

网络的最后标号如图 8—23，从 V_s 到 V_8 已没有其它具有正容量的路，算法到此结束。各弧的流量如下：



图 8—23　第四次计算结果

$f_{s1}=15$，$f_{s2}=10$，$f_{s3}=30$，$f_{s4}=15$，$f_{25}=0$，

$f_{36}=10$，$f_{46}=15$，$f_{27}=10$，$f_{37}=20$，$f_{65}=10$，

$f_{67}=15$，$f_{58}=10$，$f_{78}=45$。

从 V_s 到 V_8 最大流 $F=55$ 兆瓦。

图 8—23 计算结果表明网络中正向容量的潜力均已挖掘完，因为最小割集 $\{(V_5V_8),(V_7V_8)\}$ 的正向容量标号为 0，说明这两弧已经饱和，全部容量均已被利用。其它弧段虽然正向容量还有富余，但受到最小割的限制，不能充分利用。

反向容量标号恰好表示每弧的流量。(V_5V_2) 反向容量 $C_{52}=0$，$\therefore f_{25}=0$，即城市 V_5 的电力不由电站 V_2 输送，而是由电站 V_3 经 V_6 输送到 V_5。

五、网络的线性变换与对偶网络

（最短路问题与最大流问题的转化）

求一个网络的最短路问题可以变换为求另一个网络的最大流问题。这两个网络之间有对偶关系。若其中一个称为原网络，则另一个称为对偶网络。原网络与对偶网络之间互为对偶。

［例］ 图 8—24 表示 V_aV_b 两城市间公路网络，图中数字表示每段公路的长度（公里数），求 V_aV_b 间最短路。这个图形较简单，可以很快推算出最短路为 $V_a \to V_c \to V_d \to V_b$，其长度为 $15+9+7=31$，

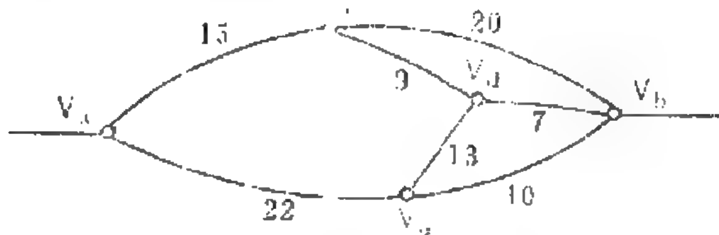


图 8—24 公路运输网络

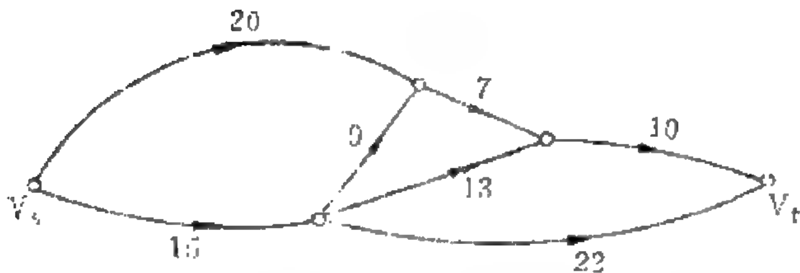


图 8—25 图 8—24 的对偶网络

图 8—25 表示一个运输网络，其中数字表示最大通过能力，即运输容量。这个网络的最大流（即最小割）为 31。恰好与图 8—2 最短路相同。这说明图 8—24 与图 8—25 之间有一定的线性变换关系，称为对偶关系。我们说图 8—24 与图 8—25 互为对偶。

从原图到对偶图的变换可如下得到：

在原图每个区域间取一点（如图 8—26），图 8—26 中共有五

个点称为对偶点。通常令最上面一个点作为对偶始点 V_s，最下面一个点作为对偶终点 V_t，这样做只是为了方便。将这些对偶点用虚线连接，令其边的长度等于与它相交的原图边长，于是就从原图（图 8—24）得到如图 8—25 所示的对偶图。

仔细观察图 8—26，可以发现，实线所表示的原图实际上就是虚线所画对偶图的全部割集（将 V_s 与 V_t 分割开，分属两个子图）。对偶图的每一割集恰好又是原图从 V_a 到 V_b 的一条路（或链）。求对偶图的最大流问题，即求最小割问题，转化成为求原图的最短路问题。例如由图 8—26 中不难看出：在全部割集中容量最小割集为 $\{(V_aV_c)、(V_cV_d)、(V_dV_b)\}$ 所割断的各虚线边集合。而 $V_a \to V_c \to V_d \to V_b$ 恰好又是原图的最短路。

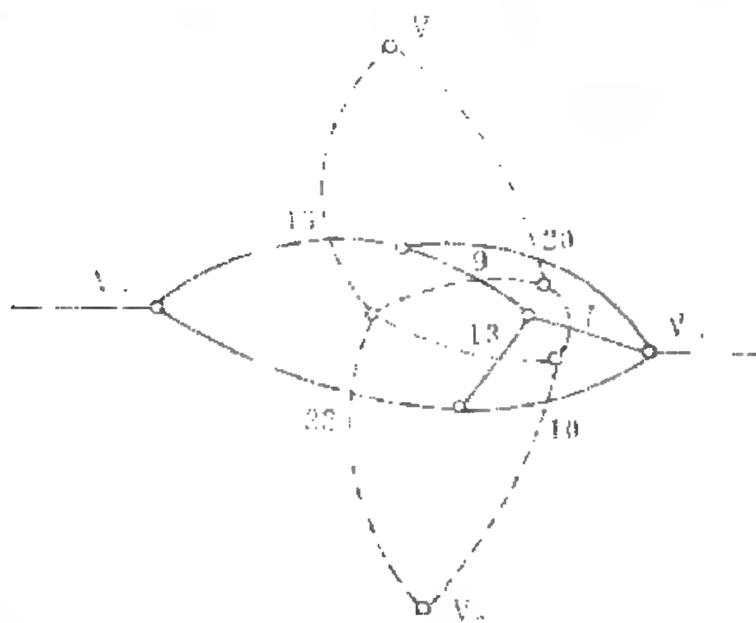


图 8—26 对偶网络构造法

原图中的方向也可对应地变换到对偶图中。例如在图 8—26 中原图弧的方向是沿着链的前进方向从 V_a 到 V_b，则在对偶图中的弧是从始点 V_s 经过割集到达终点 V_t。

从上面的分析可知，原图性质与对偶图性质有一定的依赖关系：割集与链互为对偶，最小割集与最小链互为对偶，因此最大流

问题与最短路问题互为对偶。

有时候，用某一图形分析和计算不方便，就可以将这个图形综合变换为等效的对偶图，图形性质也作了等效的变换。于是问题的提法相应变换为对偶问题提法。实际上是将图（或网络）的信息作了一次等效变换，从而更便于分析研究。

上述建立对偶图的方法只适用于平面图。所谓平面图是指任意两条弧都不相交的图，（如图 8—27）。否则就称为非平面图，如图 8—28。

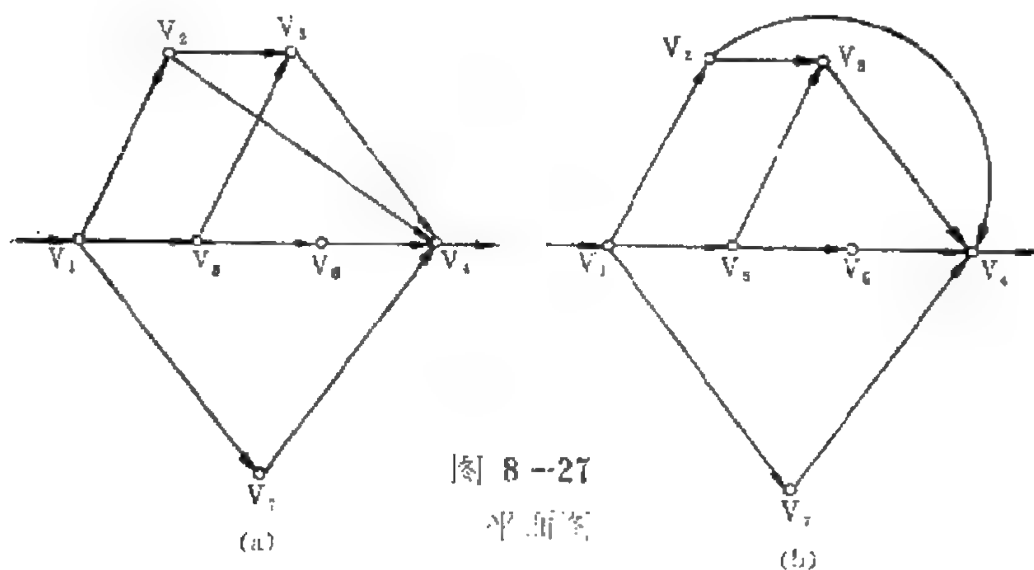


图 8—27 平面图

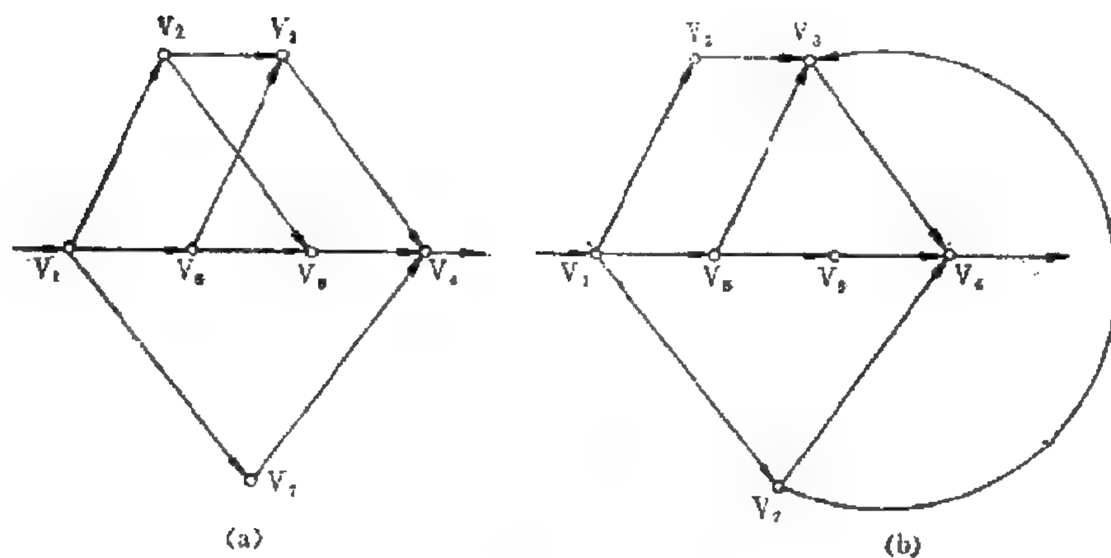


图 8—28 非平面图

定理. 若 G 图为平面图，则 G 图必有对偶图存在。

这定理说明了 G 图为平面图的充要条件。

如果 G 是一个非平面图，必须先修改为平面图，才能作图的变换，以得到对偶图。例如图 8—29(a) 表示供水系统的非平面图，数字表示管道的容量。

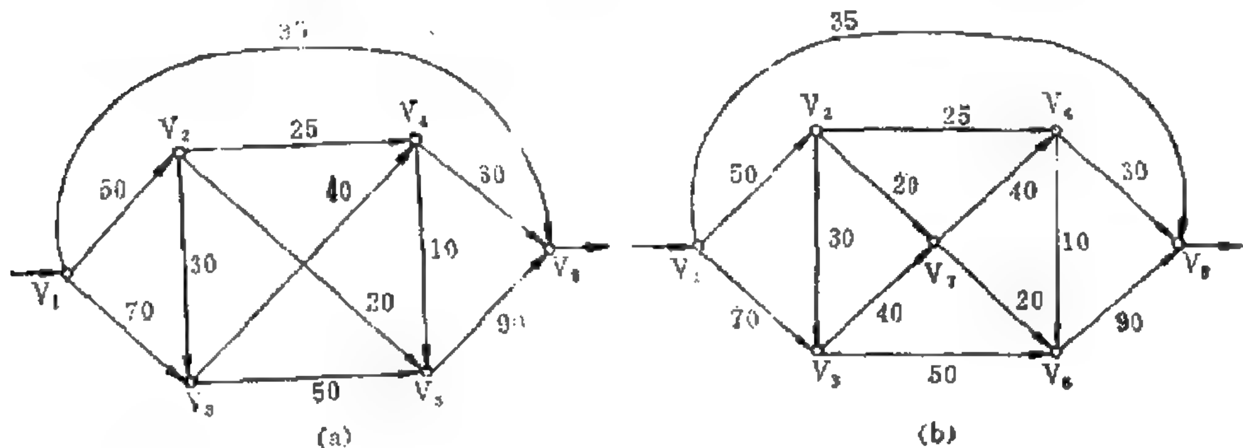


图 8—29 将非平面图(a) 改为平面图(b)

在图 8—29(a) 中 (V_2V_5)、(V_3V_4) 两弧有一个交点，为了改成平面图，可在这一交点加设一个虚拟点 V_7 (如图 8—29b)。

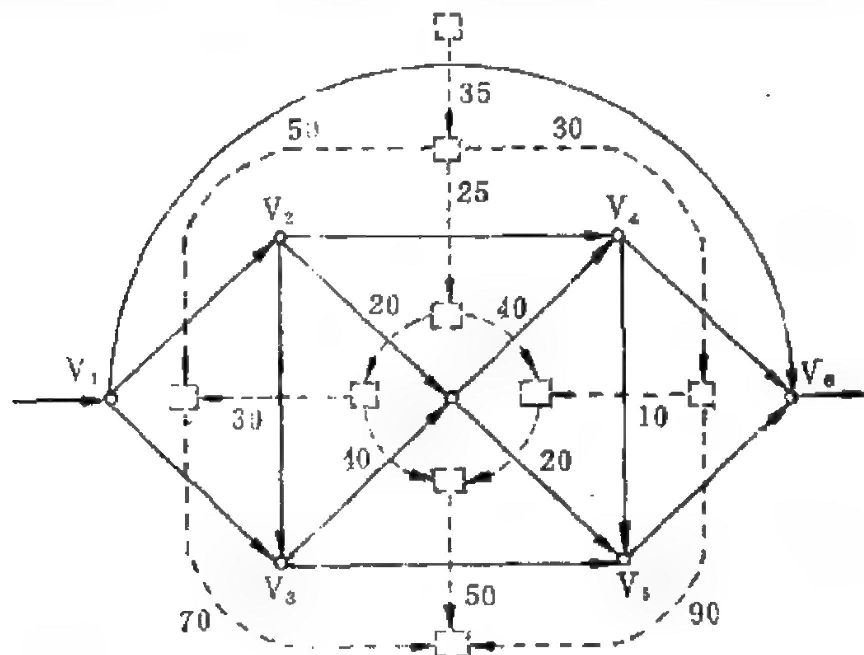


图 8—30 实线表示一平面图（图 8—29b）虚线表示其对偶图

(V_2V_7)、(V_7V_6) 是同一管道的两段，所以其方向也相同，容量均为 20。同理 (V_3V_7)、(V_7V_4) 两弧方向相同，容量均为 40。

这样我们就可以画出图 8--29b 的对偶图，如图 8—30 虚线所示。

电网络中，这种图的对偶关系也是经常碰到的，我们举一个最简单的例子。图 8—31 表示一个由电压源 V_1 供电的 $R_1L_1C_1$ 串联电路，其对偶电路如图 8--32，是由电流源供电的 $G_2C_2L_2$ 并联电路。

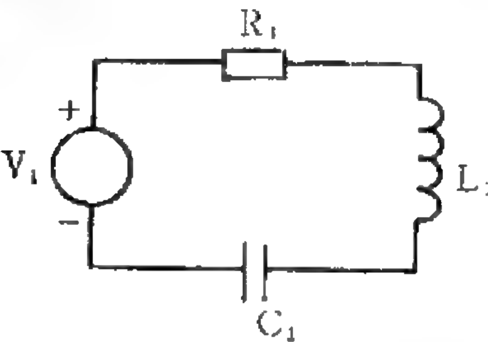


图 8—31 RLC 串联电路

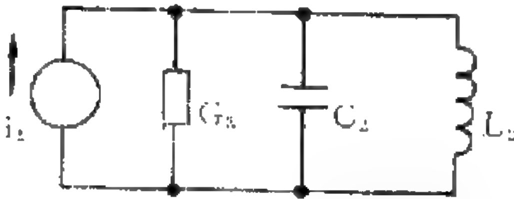


图 8—32 RLC 电路的对偶图

电路对偶关系

原　　图	对 偶 图
一个回路包含 n 个元件	一个节点与 n 个元件相关（另一个节点为参考点）
电 压 源	电 流 源
回 路 电 流	节点电位（以参考点为准）
电　　感	电　　容
电　　阻	电　　导
电　　容	电　　感

从原电路求对偶电路的简便方法是打点法。其步骤如下：

1. 在独立回路内打点，相当于对偶图中的独立节点。

2. 在回路外打点，相当于对偶图中的参考点。

3. 用虚线将各点连接，虚线与原图元件相交，表示对偶图中独立节点的支路，其元件与原图对应元件有对偶关系。

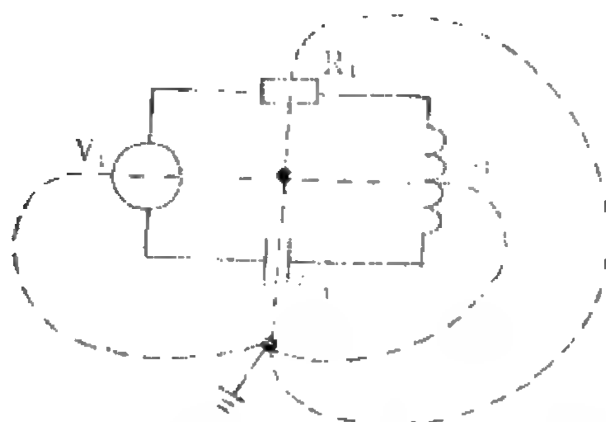


图 8—33 对偶电网络的构造法

图 8—33 表示用打点法构造图 8—31 的对偶图（如虚线所示），其结果如图 8—32 所示。

§ 8-4 最小费用流问题

一、运输问题

设有m个供应点 $S_i(i=1,2\cdots m)$，称为发点，n个需求点 t_j $(j=1,2,\cdots n)$，称为收点。为满足需求量，将货物（或产品）从发点运输到收点。令 a_i 为每个发点的供应量，d_j 为每个收点的需求量（如图 8—34）。若供应量为正，则需求量为负。

令 b_{ij} 为从第 i 个发点到第 j 个收点运输单位货物量（单位流量）的费用，b_{ij} 非负。

令 f_{ij} 为从第 i 个发点到第 j 个收点运输量（流量）。

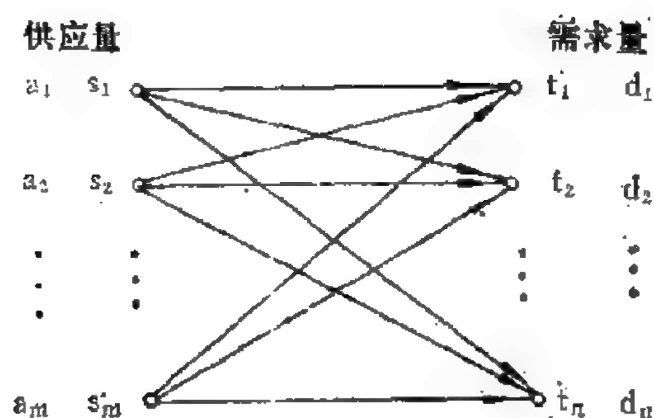


图 8—34 运输问题

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant C_{ij} \tag{8—12}$$

C_{ij} 为网络中每弧容量。

运输问题的数学模型为：

求一个可行流 f，使总费用最小

$$\min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_{ij} \tag{8—13}$$

同时满足下述约束条件

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} f_{ij} \leqslant a_i \qquad i=1,2,\cdots m \\ &\sum_{i=1}^{m} f_{ij} \geqslant d_j \qquad j=1,2,\cdots n \\ &f_{ij} \geqslant 0 \qquad i=1,2,\cdots m,\ \ j=1,2,\cdots n。\end{aligned}\right\} \tag{8—14}$$

使总费用最小的可行流称为最小费用流。

这是一个线性规划问题。现在我们用网络模型求解。运输问题的特点是具有整数性质，即如果所有 $a_i(i=1,2,\cdots m)$ 和 $b_j(j=1,2,\cdots n)$ 都是整数，则最小费用流（即问题的最优解）也是整数。在网络的中间各点应满足平衡条件。运入该点的货物量等于从该点运出的货物量。

如果要求出从发点到收点的最大流，同时又使总费用最小，则

上述问题变成求最小费用最大流，这是运输问题的一个特例。

二、增广回路与最小费用流算法

前面叙述用标号法求最大流算法时引进了增广链的概念。现在为求最小费用流算法，引进增广回路的概念。增广回路只不过是增广链的进一步发展推广。

如果回路的方向已定。设 μ 是图 G 中一个回路，则弧的方向与回路方向一致时，这些弧记为 μ^+，反之方向不一致时，记为 μ^-。在满足下述条件时，称 μ 是关于可行流 f（相对于回路方向）的增广回路。

$$\begin{cases}(V_iV_j)\in\mu^+, & f_{ij}<C_{ij}\\ (V_iV_j)\in\mu^-, & f_{ij}>0\end{cases} \tag{8—15}$$

一个回路是否为增广回路不仅与 f 有关，而且与 μ 的方向有关、所以要规定增广回路是相对于 μ 的某方向（例如顺时针）的回路。

［例］ 设有一个可行流如图 8—35。弧上数字表示（C、f）、图中

$$\mu^+=\{(V_1V_2),\ (V_2V_3)\}$$

$$\mu^-=\{(V_1V_4),\ (V_4V_3)\}$$

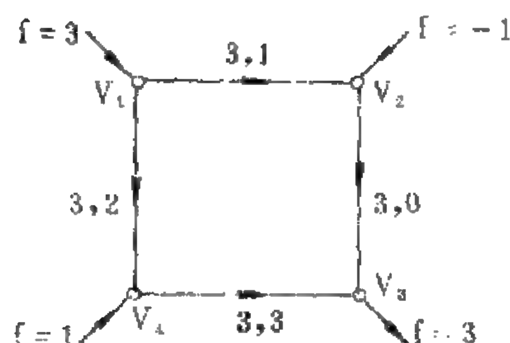


图 8—35 顺时针方向回路是增广回路

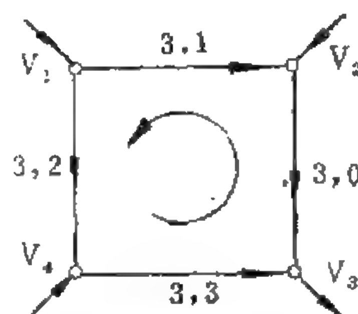


图 8—36 逆时针方向回路不是增广回路

由图可见，对 μ^+，$f_{12}<C_{12}$，$f_{23}<C_{23}$

对 μ^-，$f_{14}>0$，　$f_{43}>0$。

∴顺时针方向为关于这个可行流的增广回路。

如果将回路方向改为逆时针（如图 8—36），其它不变，则

$$\mu^+=\{(V_1V_4),\ (V_4V_3)\},$$

$f_{14}<C_{14}$，$f_{43}\nless C_{43}$（不满足 $f<C$ 条件）

$$\mu^-=\{(V_1V_2),\ (V_2V_3)\}$$

$f_{12}>0$，$f_{23}=0$（不满足 $f>0$ 条件）

∴逆时针方向不是增广回路。

如果有可行流 f，回路 μ 若为增广回路，则和最大流算法中调整增广链的流量一样，在求最小费用流算法时，可适当选取△，调整增广回路的流量。

取△，使满足

$$0<\triangle\leqslant \mathrm{Min}\left[\min_{\mu^+}(C_{ij}-f_{ij}),\ \min_{\mu^-}(f_{ij})\right] \qquad (8\text{—}16)$$

并调整流量，使

$$\left.\begin{aligned} f_{ij}'&=f_{ij}+\triangle & (V_iV_j)&\in\mu^+\\ f_{ij}'&=f_{ij}-\triangle & (V_iV_j)&\in\mu^-\\ f_{ij}'&=f_{ij} & (V_iV_j)&\overline{\in}\mu \end{aligned}\right\}\ (8\text{—}17)$$

则 f_{ij}' 仍是一个可行流。

经过这样调整以后，希望属于 μ^+ 的弧，从原来 $f_{ij}<C_{ij}$ 的状态变为 $f_{ij}'=C_{ij}$，或与 C_{ij} 差别小些。而属于 μ^- 的弧尽量使 $f_{ij}=0$ 或更近于0。

［例］ 图 8—37 为调整前可行流 f。图 8—38 为按上述方法调整后的可行流 f'。

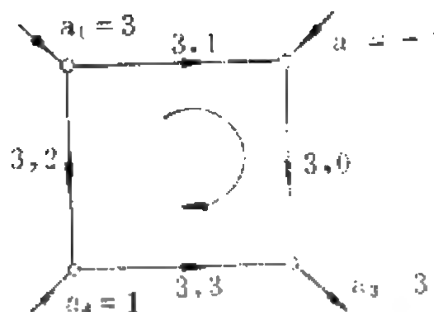


图 8—37　调整前可行流

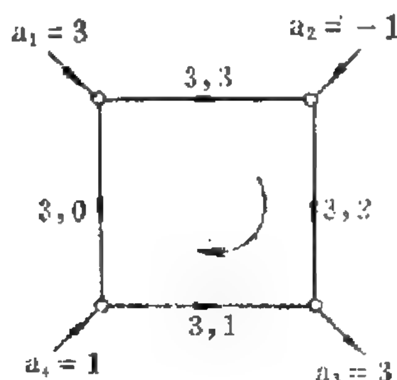


图 8—38　调整后可行流

调整量 $\triangle = \text{Min}\left\{\min\limits_{\mu^+}(2,\ 3),\ \min\limits_{\mu^-}(2,\ 3)\right\} = 2$

比较调整前后可行流 f 与 f' 的费用 $b(f')$ 及 $b(f)$。可以证明

$$b(f') - b(f) = \triangle\left(\sum_{\mu^+} b_{ij} - \sum_{\mu^-} b_{ij}\right) \tag{8—18}$$

式中 $\triangle > 0$，$b(\mu) = \sum\limits_{\mu^+} b_{ij} - \sum\limits_{\mu^-} b_{ij}$ 称为回路 μ 的费用，若 $b(f') - b(f) \geqslant 0$，表示调整后费用变大，$b(f') - b(f) < 0$，即负费用表示费用减小。若某一可行流 f 已是最小费用，则图中不存在负费用的增广回路。

于是我们可得可行流最小费用的充分必要条件为：

1．可行性：满足平衡条件及容量限制条件。

2．最优性：不存在关于 f 的费用为负的增广回路，其逆也真，这是最小费用流的基本定理。

所以计算方法有两种：

1．计算过程中使 f 总满足可行性条件，同时每次迭代使 f 逐步满足最优性条件，一旦满足最优性，即得最小费用流。

2．在计算过程中使 f 总满足最优性条件，同时每次迭代使 f 逐步满足可行性条件，一旦满足可行性，即得最小费用流。

图 8—39 表示计算程序框图。

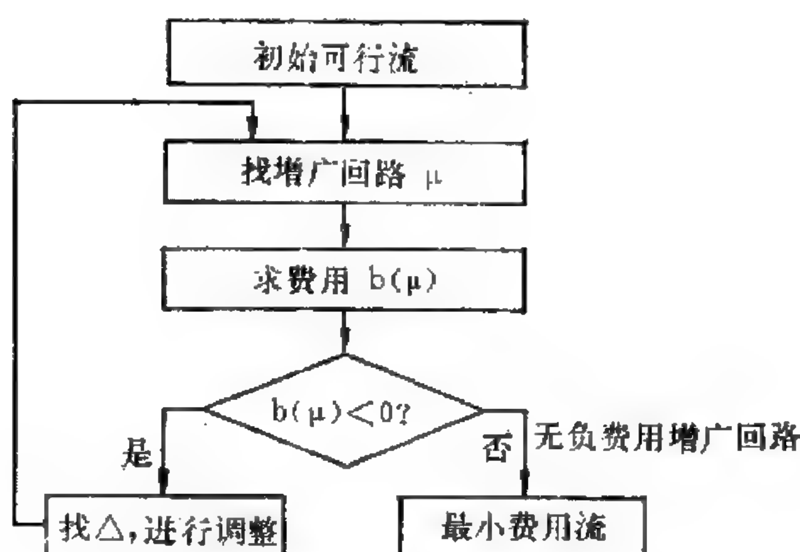


图 8—39　最小费用流算法的程序框图

三、最小费用最大流问题的算法

这是最小费用流的特例。最大流不一定是最小费用流，要在最大流中挑选一个费用最小的。所以既要满足最大流条件，又要满足最优性条件，即不存在关于 f 的负费用的增广回路。

设发点 V_s，令 $a_s=F(f)$

收点 V_t，　$a_t=-F(f)$

当 $i\neq s,\ i\neq t$ 时　$\sum a_i=0$

算法一.

求从 V_s 到 V_t 的最大流，作为一种可行流，即令 $F(f)$ 为 V_s 到 V_t 的最大流量。每步迭代保持最大流（即满足可行性条件），检查有无负费用的增广回路，直到满足最优性条件为止。

为了求运输网络从 V_s 到 V_t 的最小费用，我们可以把问题转化为求解 V_s 到 V_t 的最短路问题。这就需要构造另一个网络，称为长度网络，在长度网络中求最短路。

长度网络的构造方法为：

1． 保持原网络各点不动，每两点之间各联正反两条弧（如图8—40）。

2． 令弧长

$$l_{ij}=\begin{cases} b_{ij} & 设\ f_{ij}<C_{ij} \\ +\infty & f_{ij}=C_{ij} \end{cases} \tag{8—19}$$

其中 $+\infty$ 的意义是：这段弧已饱和，不能再增大流量，若要增大流量，则要花费很高代价，实际上不能实现。因此长度为$+\infty$的弧可从长度网络中去掉。

3． 令弧长

$$l_{ji}=\begin{cases} -b_{ij} & 当\ f_{ij}>0 \\ +\infty & 当\ f_{ij}=0 \end{cases} \tag{8—20}$$

这里$+\infty$的意义是流量已减小到0，不能再小，否则要付出很高的代价，实际上不能实现。

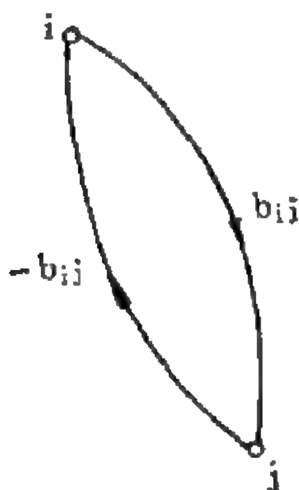


图 8—40 两点间联正反两弧

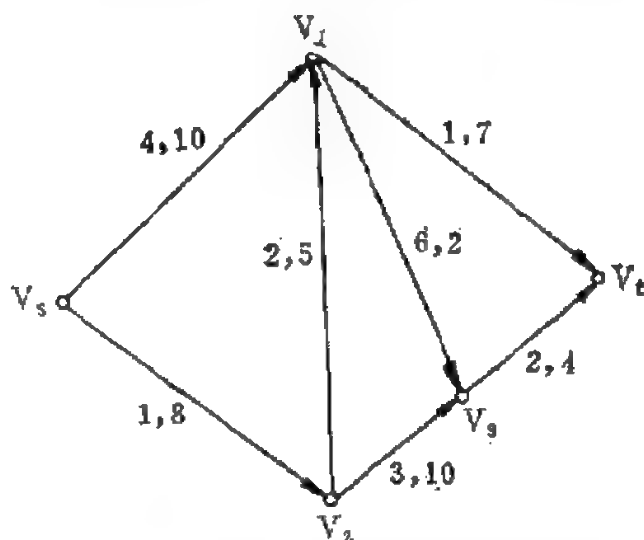


图 8—41 求最小费用最大流问题

在原运输网络中找负费用增广回路，等价于在长度网络中找负回路（总长度为负的回路），若不存在负回路。则表示从 V_s 到 V_t 为最短路。相当于运输网络中费用最小。若有负回路，则在原网络

的增广回路上沿回路方向调整 f，得新的最大流，再去求长度网络。因此每一步算法为：

1. 求 V_s 到 V_t 的最大流 f，

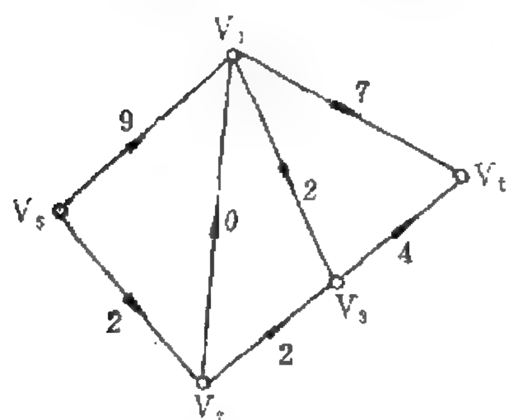
2. 构造长度网络 L，

3. 在长度网络中搜索负回路，若存在负回路，调整原网络增广回路的流量，得新的最大流，重复 2。

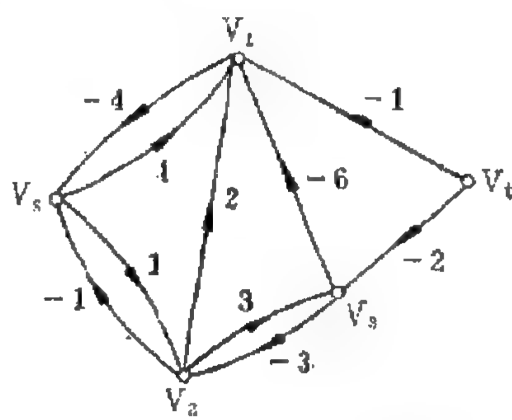
直到长度网络中没有负回路为止。

[例] 给定网络 G，如图 8—41，弧上数字为 (b_{ij}, C_{ij})，从图 8—41 中可直观地看出 V_s 与 V_t 间最小割集为 $\{(V_1V_t), (V_3V_t)\}$，其最小割为 11，因此最大流量 $F=11$。

我们可以用求最大流方法找出这一网络的初始最大流 $f^{(0)}$，如图 8—42a，它满足可行性，显然初始最大流不一定是最小费用流。与 G 网络对应的长度网络 L 如图 8—42b。



(a) G 网络、初始最大流 $f^{(0)}$、增广回路 $V_sV_2V_3V_1V_s$



(b) L 网络，负回路 $V_sV_2V_3V_1V_s$

图 8—42

在 L 网络中有负回路 $V_sV_2V_3V_1V_s$，相应地在 G 网络中有增广回路 $V_sV_2V_3V_1V_s$，因为沿该回路反时针方向 $\mu^+=\{(V_sV_2), (V_2V_3)\}$，$\mu^-=\{(V_1V_3), (V_sV_1)\}$ 满足增广回路条件。

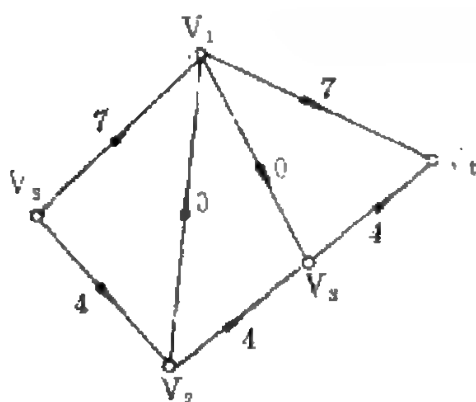
进行调整取 $\triangle = \mathrm{Min}\{\min_{\mu+}(C_{ij}-f_{ij}),\ \min_{\mu-}(f_{ij})\}$

$$= \mathrm{Min}\{6,8,2,9\} = 2$$

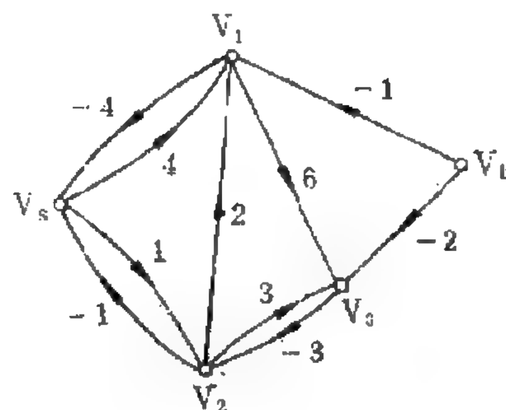
$$b(f')-b(f) = \triangle(\sum_{\mu+} b - \sum_{\mu-} b) = 2[(1+3)-(4+6)] = -12.$$

可见调整前存在负费用增广回路，费用流还不是最小，调整前运送 11 单位货物从 V_s 到 V_t 总费用为 71。现在可节省 12，故调整后可望使费用降到 $71-12=59$。

在增广回路上进行调整，得新的最大流 $f^{(1)}$ 如图 8—43a。构造相应的 L 网络，找出负回路为 $\{V_sV_2V_1V_s\}$，在相应的 G 网络上找逆时针方向的增广回路 $V_sV_2V_1V_s$，$\mu^+ = \{(V_sV_2),(V_2V_1)\}$ $\mu^- = (V_sV_1)$ ，即满足增广回路条件。



(a) G 网络，最大流 $f^{(1)}$，增广回路 $V_sV_2V_1V$



(b) L 网络，负回路 $V_sV_2V_1V_s$

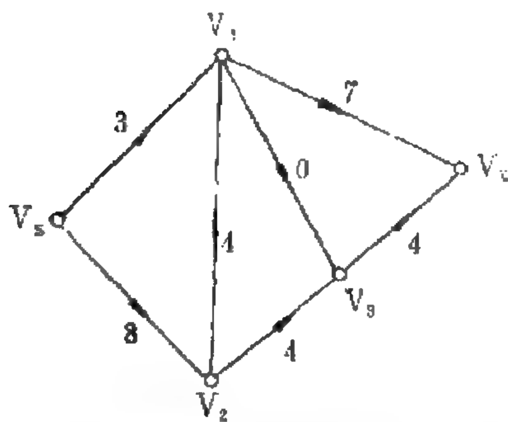
图 8—43

调整流量，$\triangle = \min\{4,5,7\} = 4$

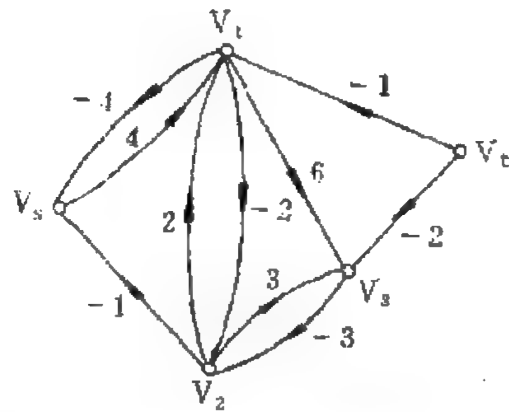
$$b(f')-b(f) = \triangle(\sum_{\mu+} b - \sum_{\mu-} b) = 4(1+2-4) = -4。$$

调整前存在负费用增广回路，费用流还不是最小，调整后可望运输总费用从 59 降为 $59-4=55$。

调整后得新的最大流 $f^{(2)}$，如图 8—44a，相应的长度网络 L，如图 8—44b。在 L 中已没有负回路，因此所得最大流费用最小，从 V_s 输送 11 个单位货物到 V_t 总费用为 $12+8+8+12+8+7=55$。



(a) G 网络，最大流 $f^{(2)}$，无负费用增广回路，$f^{(2)}$ 为最小费用最大流



(b) L 网络，无负回路

图 8—44

算法二

我们知道，零流 $f=0$ 也是最小费用流，当然它不是最大流。为了求最小费用最大流，我们可以应用前几节介绍的标号法先找关于 f 的最小费用增广链，利用本节算法一介绍的长度网络构造法，求该网络的最短路，就等价于在 G 网络中求关于 f 的最小费用增广链。所以算法可进行如下：

1． 取零流为初始可行流 $f^{(0)}=0$

2． 构造长度网络 L，求最短路。

3． 这最短路就是对应在 G 网络中的关于 $f^{(0)}$ 的最小费用增广链。

4． 在增广链上进行调整，于是得到费用最小的可行流 $f^{(1)}$。

回到第 2 步重复这一步骤，直到 L 网络中不出现最短路为止。

设在第 $k-1$ 步，我们得到最小费用流 $f^{(k-1)}$，构造一个与 $f^{(k-1)}$ 相应的 L 网络，求从 V_s 到 V_t 的最短路，然后在 G 网络中相应的增广链 μ 上对 $f^{(k-1)}$ 进行调整，得最小费用流 $f^{(k)}$，调整量为：

$$\triangle=\min[\min_{\mu+}(C_{ij}-f_{ij}^{(k-1)}),\ \min_{\mu-}f_{ij}^{(k-1)}]$$

再对 $f^{(k)}$ 重复上述步骤。

若根据最小费用流 $f^{(k-1)}$ 的 G 网络所构造的 L 网络中不存在最短路，则 $f^{(k-1)}$ 就是最小费用最大流。这个算法将最大流问题化为最短路问题，使在满足最小费用流的条件下一步一步接近最大流。

[例] 图 8—41 中给定每弧参数 $(b_{ij},\ C_{ij})$，用算法二求最小费用最大流。

从 $f^{(0)}=0$ 开始，图 8—45 表示与 $f^{(0)}$ 相应的长度网络 $L^{(0)}$，$V_sV_2V_1V_t$ 是最短路，即为 G 网络中关于 $f^{(0)}$ 的最小费用增广链。

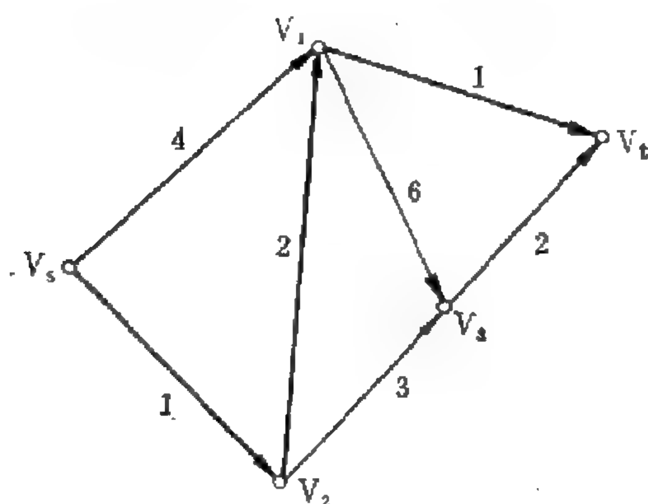
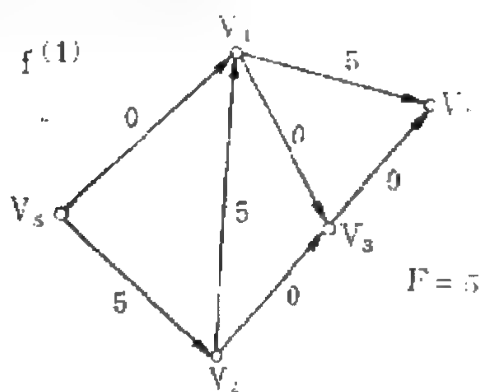
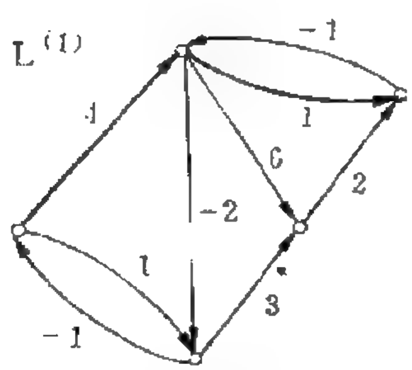


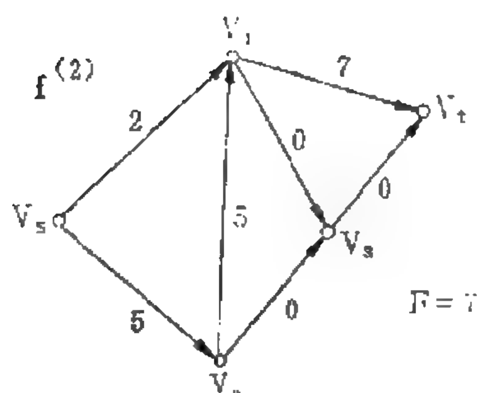
图 8—45 图 8—41 的长度网络

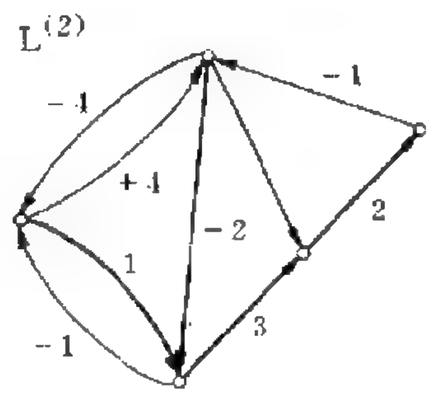
按照上述算法依次得最小费用流 $f^{(1)}$、$f^{(2)}$、$f^{(3)}$、$f^{(4)}$，构造相应的长度网络 $L^{(1)}$、$L^{(2)}$、$L^{(3)}$、$L^{(4)}$，如图 8—46。总流量依次为 5,7,10,11。$L^{(4)}$ 中从 V_s 到 V_t 已经不通，没有最短路，所以 $f^{(4)}$

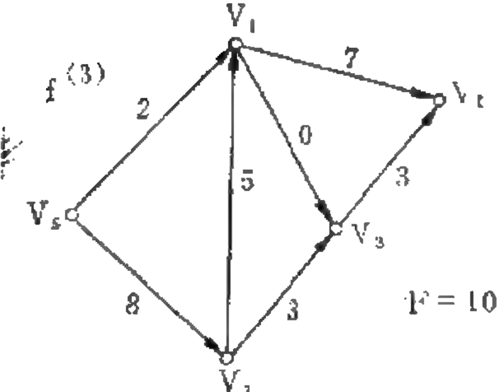
为最小费用最大流。

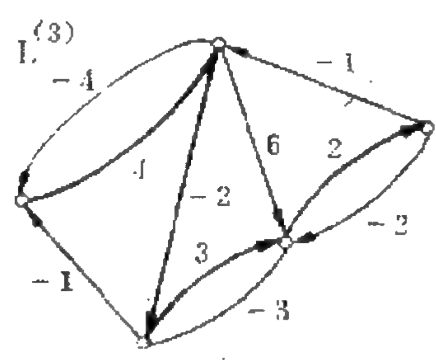


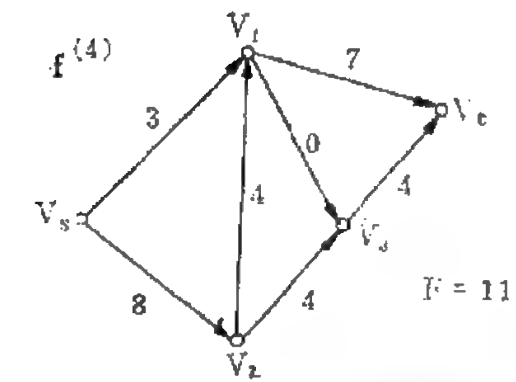












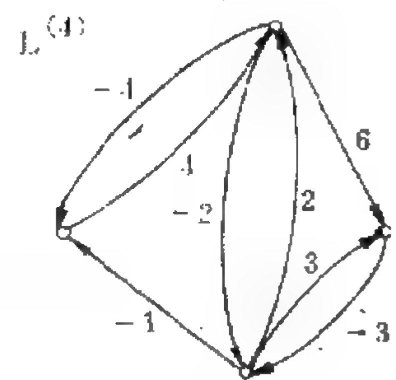


图 8—46 用算法二计算最小费用最大流

§ 8-5　网络最优化理论的其它应用

一、关键路分析

关键路法是在计划管理和生产组织安排中很有用的计划和调整工具。关键路分析可帮助我们决定最合理的工期，而避免浪费时间。我们下面举例来说明。

［例 1］ 设某项研究任务需要建立四个电子系统（即有 4 道工序），标号分别为甲、乙、丙、丁。建立这四个电子系统估计所需时间如下：

系　统	甲	乙	丙	丁
需时（月）	5	6	4	3

其中甲、乙、丙是相互独立的。而系统丁的设计与前三个系统的特性有关，因此在甲、乙、丙没有完成以前，系统丁的工作不能开始。

我们用图 8—47 所示网络表示这项研究工作的进程。每弧表

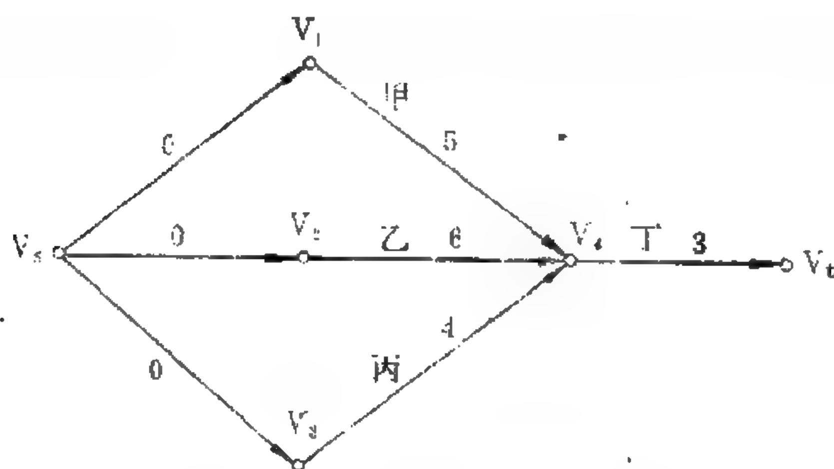


图 8—47　某项研究任务的关键路 $V_s V_2 V_4 V_t$

示一道工序（本例中即为建立一个电子系统）。点表示下述事件：来到这个点的工序均已完成，而离开这个点的工序刚开始。

V_s 为始点表示整个研究任务开始，终点 V_t 表示整个研究任务完成。

图 8—47 所示网络模型表示各工序先后顺序和相互制约的关系。弧上的数字一般表示完成这道工序所需时间（或所需资源如人力、材料、资金等），本例中表示时间。从 V_s 开始，同时执行甲、乙、丙工序，所以弧（V_sV_1）、（V_sV_2）、（V_sV_3）所需时间均为0，表示“任务开始”这一事件并不耗费时间。从图中可看出，甲、乙、丙没有完成以前，工序丁不能开始。当工序丁完成时，才能宣布整个任务结束。

显见当任务开始以后工序乙所需时间 6 个月是最长的，在 6 个月内，工序丁不能开始。从任务开始到任务结束最长需要 9 个月。因此 $V_sV_2V_4V_t$ 这一过程决定了完成整个任务所需时间。如果能减少工序乙和丁所需时间，整个工期就可缩短，否则，延长乙和丁的时间，整个任务工期就要延长。

$V_sV_2V_4V_t$ 称为关键路，这个网络称为工序流线图或关键路法网络。和关键路法类似的是计划评审技术。它也是统筹方法的主要工具，用以合理的组织、调配、管理和控制使用人力、材料、资金和时间，对工作量大的任务（复杂的工程系统）进行合理安排，使能最早完成任务而投资最少。这里不作详细介绍。

求关键路实质上就是求网络的最长路。

由图 8—47 可见，工序丙不在关键路上，它的完工时间最多可以延长 2 个月而不会影响整个任务的完工期限，而工序乙和丁均在关键路上，即便延长一点时间也会使整个任务拖后，所以关键路上的工序称为关键工序。

[例 2] 灯泡厂制造某种灯泡，共需十种工序 $a,b,c\cdots h,i,j$。这些工序的先后可以用工序流线图（图 8—48）表示。弧上所标数

字代表该工序所需时间（分钟）。

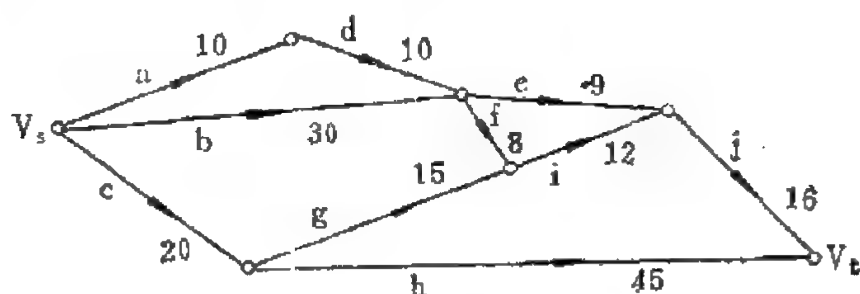


图 8—48 灯泡厂工序流线图

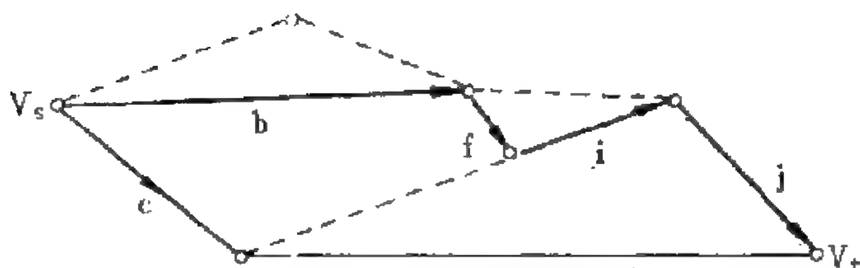


图 8—49 制造灯泡的关键路（$bfij$）

制成一个灯泡所需最少时间可由工序流线图中关键路求得。方法是比较两点间不同路的长短，舍弃较短的一个。

1. 比较 $a+d$ 与 b，$b>a+d$，舍弃 $a+d$（图 8—49 中用虚线表示）。

2. 比较 $f+i$ 与 e，$f+i>e$，舍弃 e。

3. $b+f>c+g$，舍弃 g

4. $b+f+i+j>c+h$，舍弃 $c+h$

因此从 V_s 到 V_t 的最长路为 $b+f+i+j$，长度为 66，它说明做一个灯泡最少需要 66 分钟。即为关键路。

由关键路分析可知，工序 a、b、c 不一定要同时开始，例如 a 比 b 迟 10 分钟开始，而 c 比 b 晚几分钟开始，都不会妨碍整个灯泡生产进程和最少需要的时间。

[例 3] 图 8—50 表示预制房屋的装配进度计划流线图。

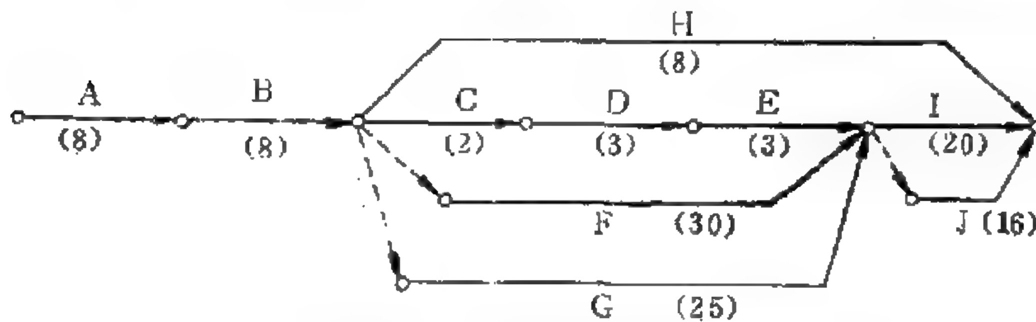


图 8—50 预制房屋装配工序图及关键路 *ABFI*

各工序名称如下：

A	清理现场	F	敷设电线
B	打基础	G	装管道
C	铺地面	H	绿化环境
D	装配构架、墙	I	粉刷
E	盖屋顶	J	设备安装

弧上数字表示每项工序的估计进度（以小时计）。完成这项工程任务最少需要 66 小时。关键路为 $A\ B\ F\ I$。

二、用网络理论求解分配问题

分配问题（Assignment Problem）是运输问题的特殊类型，它应用十分广泛。

[例] 工作分配问题

设有m个人 S_1, $S_2 \cdots S_m$ 要完成 n 项工作 t_1, $t_2 \cdots t_n$。其中有的人只能胜任一项工作，有的则可能胜任二项或三项工作。现在假设分配工作使每件工作只有一人去做，而每个人只做一件工作。

这个问题画成网络模型如图 8—51。其特点是图中的点分成 S 与 T 两部份。S 与 T 不能重，即 S 集与 T 集的交为零。每弧 a 有两端点，一端在 S 集内，另一端在 T 集内。

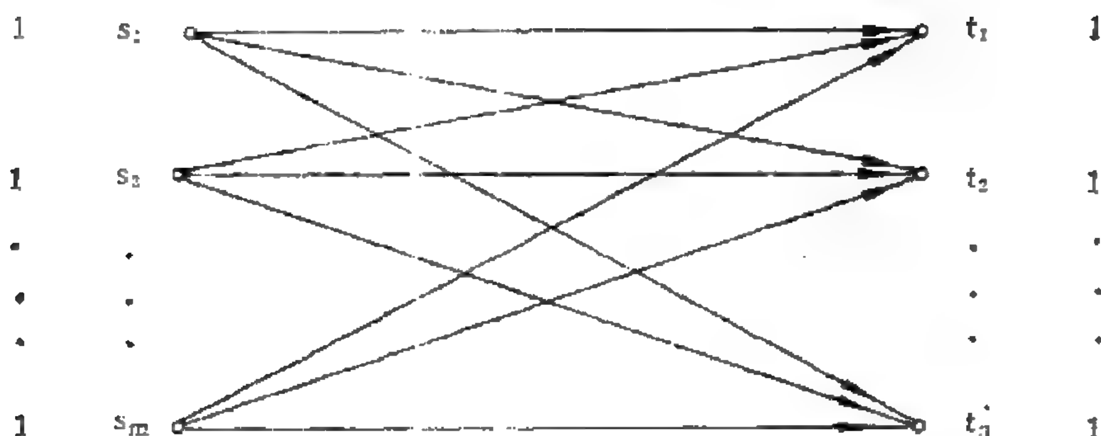


图 8—51 用网络表示分配问题

工作分配问题要求每人只做一件工作，每件工作由一人去做，也即在图中找出一个弧集合，其中任意两条弧都没有公共端点，每两点形成一对，图论中称为对集（Matching）。因此每个人力安排方案为一个对集，最好的方案是使一个对集所含的弧数最多，即安排尽可能多的人去做他所胜任的工作，称为最大对集。

上述分配问题也可以用线性规划模型表示如下：

令决策变量 $x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{表示第 } i \text{ 人分配工作 } j\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

对所有 n 项工作说，应满足，

$$\left.\begin{array}{l} x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{mj}=1,\quad j=1,2,\cdots n \\ \text{或}\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots n \end{array}\right\} \quad (8—21)$$

即每项工作只分配给一人去完成。为使各变量之和为1，必须令一个变量为1而其余变量为0。显见每方程有m个解。

对m个人说应满足

$$\left.\begin{array}{l} x_{i1}+x_{i2}+\cdots+x_{in}=1 \\ \text{或}\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \end{array}\right\} i=1,2,\cdots m \quad (8—22)$$

即分配给每个人的工作只有一件。

我们希望选择决策变量使

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \tag{8—23}$$

一般情况下可写成

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij} \tag{8—24}$$

b_{ij} 表示与 x_{ij} 相应的效益。在（8—23）式中 $b_{ij}=1$

概括说，工作分配问题的线性规划模型为

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_{ij}$$

约束条件为 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 \quad j=1,\ 2,\cdots n$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad i=1,\ 2,\cdots m$$

$$x_{ij}=0 \text{ 或 } 1,\ i=1,2\cdots m,\ j=1,2\cdots n$$

决策变量 x_{ij} 也可理解为网络流。显见工作分配问题是运输问题的特例，只不过供应量或需求量为 1，若可以分配给一个人不止一件工作，例如 S 件，则（8—22）式变为

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=S_i \quad i=1,2,\cdots m \tag{8—25}$$

于是工作分配问题就和运输问题一样了。见（8—13）式。

其它类似于上述工作分配问题的例子还有：

1. 学校分配 n 个教室给 m 个班，需要决定那个班应分配在那个教室？

2. m 台机床加工 n 种零件，已知第 i 台机床加工第 j 种零件

的时间为 t_{ij}，假设m台机床同时开始加工，要求制定一个加工计划，使每种零件只在一部机床上加工，而每台机床只加工一种零件，并且使所有零件完成加工的时间最早。

这些分配问题可以用求网络最大流的算法去解决。我们仍以工作分配问题为例，设有五个人 S_1，$S_2 \cdots S_5$，有四项工作要做。图8—52 表示人与工作关系，构造一个网络 G（如图 8—53）。

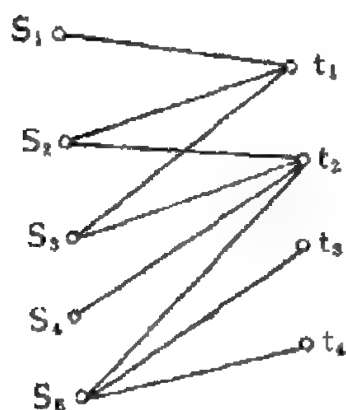


图 8—52 工作分配问题

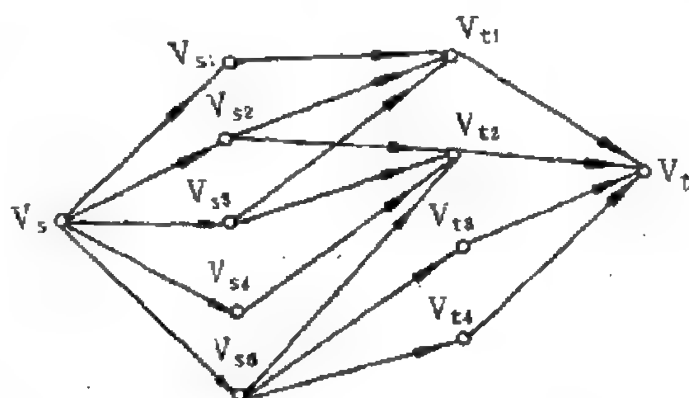


图 8—53 工作分配网络 G

其方法是在图 8—52 中增加发点 V_s 和收点 V_t 及弧 (V_sV_{si})、$(V_{tj}V_t)$。

定义容量

$$\left.\begin{aligned} &C(V_sV_{si})=1 \qquad V_{ij}\in S \\ &C(V_{si}V_{tj})=\infty \\ &C(V_{tj}V_t)=1 \qquad V_{tj}\in T \end{aligned}\right\} \quad (8-26)$$

网络 G 为整数流

$$\left.\begin{aligned} &f(V_sV_{si})\leqslant 1 \quad (\text{或为 1 或为 0}) \\ &f(V_{tj}V_t)\leqslant 1 \quad (\text{或为 1 或为 0}) \end{aligned}\right\} \quad (8-27)$$

网络整数流和图 8—52 对集相对应。

设 f 是 G 的最大流，则最大对集为

$$M_0 = \{(V_{si}V_{tj} \in A | f_{sitj} = 1\} \qquad (8-28)$$

下面用标号法寻找增广链以求网络 G 最大流。

设已有方案为 $f_{31}=1$，$f_{52}=1$，则从 V_s 到 V_t 各弧上标明数字（C，f）。图 8—54 中用实线画出 $f=1$ 的弧，虚线表示 $f=0$。

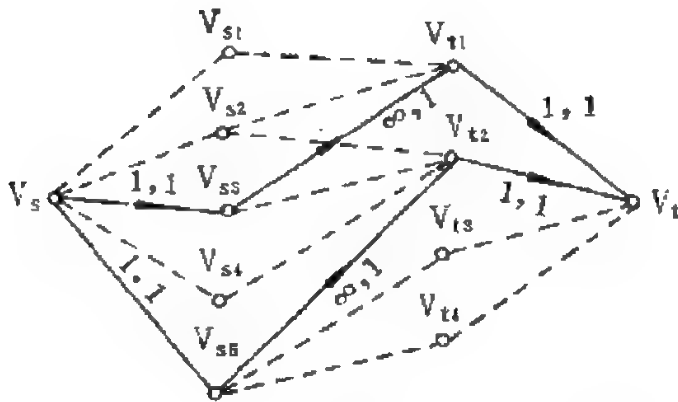


图 8—54 一种不是最好的分配方案

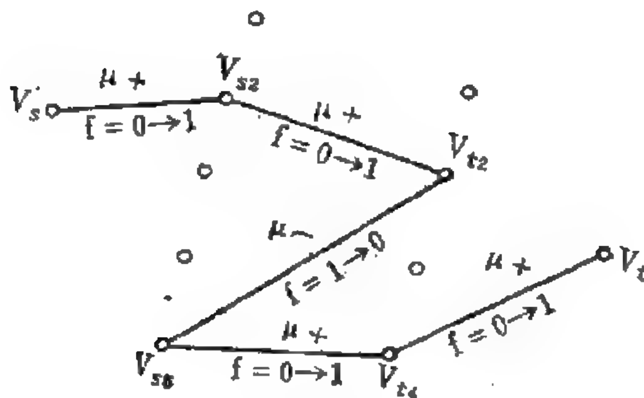


图 8—55 由增广链找最好的分配方案

图 8—54 这一方案，分配 S_3，S_5 分别做 t_1，t_2 两件工作，剩下 S_1、S_2、S_4 无工作，而 t_3、t_4 两件工作却无人做，显然不是最好的分配方案。

用标号法找到增广链如图 8—55，取调整量$\triangle=1$，进行调整，

于是得 $f_{22}=1$，$f_{54}=1$，加上原来 $f_{31}=1$，比原方案有了改进，如此继续进行下去已找不到增广链，即这一方案就是最好的工作分配方案。

习　　题

1. 求图 8—56 中的最小割及最大流，设图中数字表示各弧流量。
   [注]. 先将所有可能的割集都求出来。

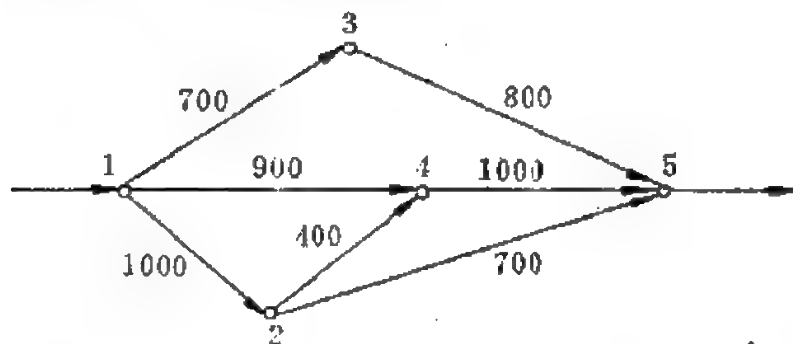


图 8—56

2. 画出图 8—56 的对偶图，并求对偶图中的最短路。

3. 设有运输网络，如图 8—57。每弧上标有两个数字，第一个表示该弧容量，第二个表示该弧的流。试用标号法求最大流。

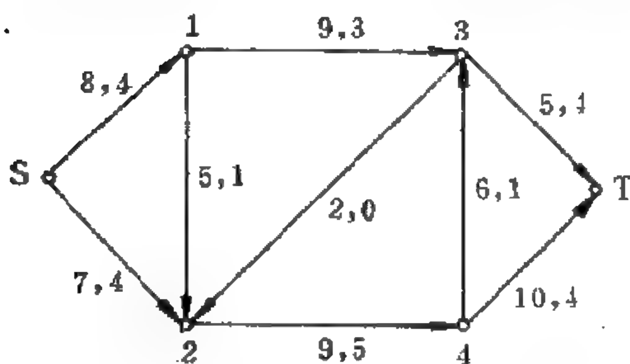


图 8—57

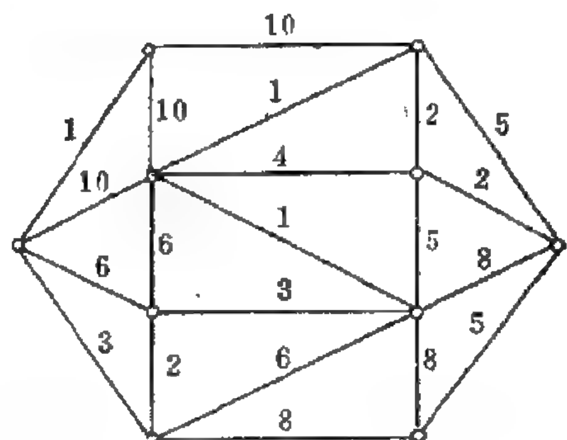


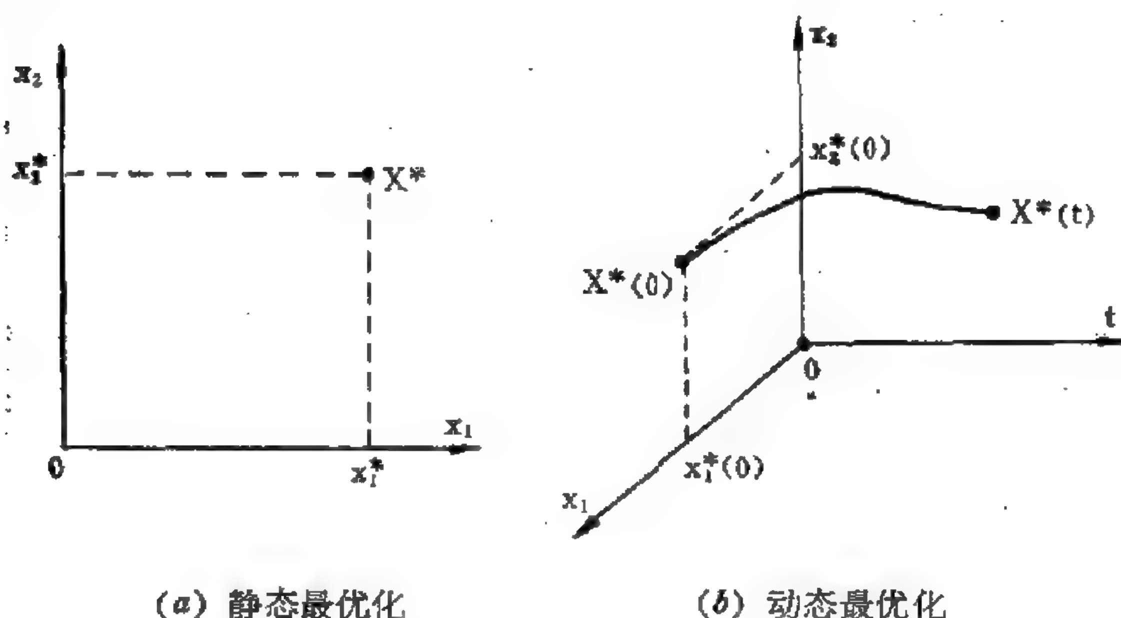
图 8—58

4. 用标号法求图 8—58 中的最短路，各边长度均用数字标明在相应的边上。

第九章　变分法和连续系统的最优控制

§ 9-1　最优控制问题

前几章中，我们讨论了求多变量函数的极值问题。从第九章起，我们将讨论动态最优化问题，即最优控制系统的设计问题，我们要求解的是泛函极值问题。泛函极值问题和多变量函数的极值问题是类似的。所不同的是：泛函极值问题中，独立变量也是时间的函数。我们已知，多变量函数极值问题的求解结果，可得到最优点 $X^* \in E^n$，而泛函极值问题的求解结果，可得到最优函数 $X^*(t)$。图 9—1 以二维系统为例说明两种情况下求解结果的不同。



(a) 静态最优化　　(b) 动态最优化

图 9—1　二维问题最优解

动态最优化问题可以分为确定性和随机性两大类。

1. 确定性最优控制问题

确定性问题中，没有随机变量，系统的参数都是确定的。例如线性系统的数学模型为

$$\dot{X} = AX(t) + BU(t)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

X 为状态变量、Y 为输出变量。

问题是求解最优控制函数 $U^*(t)$，使某个指标泛函为极小。所得结果可能是开环控制，也可能是闭环控制，根据最优控制 $U^*(t)$ 是否为状态变量 $X(t)$ 的函数而定。

最简单的确定性最优控制问题是线性二次型问题。即系统是线性的，指标泛函为二次型。图 9—2 表示确定性最优控制问题的框图。

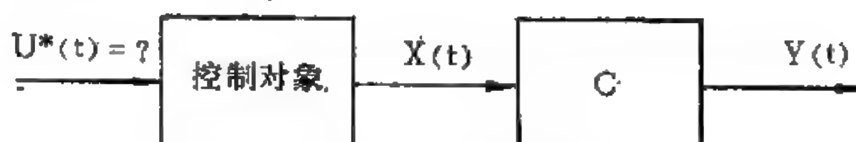


图 9—2 确定性最优控制系统框图

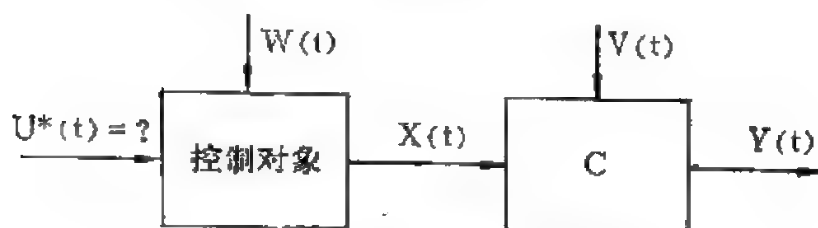


图 9—3 随机最优控制系统框图

2. 随机性最优控制问题

图 9—3 表示随机最优控制问题的框图。系统有输入噪声$W(t)$和测量噪声 $V(t)$，于是数学模型可用下式表示：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) + W(t)$$

$$Y(t)=CX(t)+V(t)$$

$W(t)$ 和 $V(t)$ 都是随机变量，它们的概率统计规律可以通过大量的试验得到。

问题也是要求解最优控制 $U^*(t)$，使某个指标泛函为最优。

对于线性系统、二次型指标泛函、噪声按高斯分布的随机最优控制问题称为线性二次型高斯分布（LQG）问题。

本书主要讨论确定性最优控制问题。

一个控制系统，如果在某种意义上说是最优的，当然它也必须是稳定的，并且是可控的[注]。我们的目的是要设计一个控制系统，使某个性能指标值为极大或极小。和以前一样，我们首先应当列出这个最优化问题的数学模型。

控制系统的数学模型可用非线性状态方程表示，如（9—1）式所示，它是动态最优化问题应当遵守的约束条件。

$$\dot{X}=\mathbf{f}(X(t),\ U(t),\ t) \tag{9-1}$$

式中 $\mathbf{f}$ 为 n 维向量函数 $\mathbf{f}^T=[f_1,\ f_2,\cdots,f_n]$

$X(t)$ 为 n 维状态向量 $X^T=[x_1,\ x_2,\cdots,x_n]$

$U(t)$ 为 m 维控制向量 $U^T=[u_1,\ u_2,\cdots,u_m]$

如果这一系统是完全可控的，则对于任意给定的两个状态 X_0 和 X_f，一定存在一种控制规律，在有限时间内，使系统从 X_0 转移到 X_f。其中，$X_0=X(t_0)$ 表示初始时间 t_0 的状态，称为初始状态（始端状态），$X_f=X(t_f)$ 表示终端时间 t_f 的状态，称为终端状态。

因此，最优控制问题是：系统状态从 X_0 到 X_f 的转移过程中，某种性能指标为最优，如：系统中消耗的能量为最小、转移时间为最短、或者与给定状态的误差为最小等等。我们说这种情况下的

［注］ 见本章附录。

控制规律是最优的。

性能指标和系统所受的控制作用、系统状态有关，但是它并不仅仅取决于某个固定时刻的控制变量和状态变量，而是与状态转移过程中的控制规律 $U(t)$ 及状态轨线 $X(t)$ 有关。因此，性能指标是一个泛函，用（9—2）式表示：

$$J[U(\cdot)]=\theta[t_f,\ X(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}L[X(t),\ U(t),t]dt \tag{9—2}$$

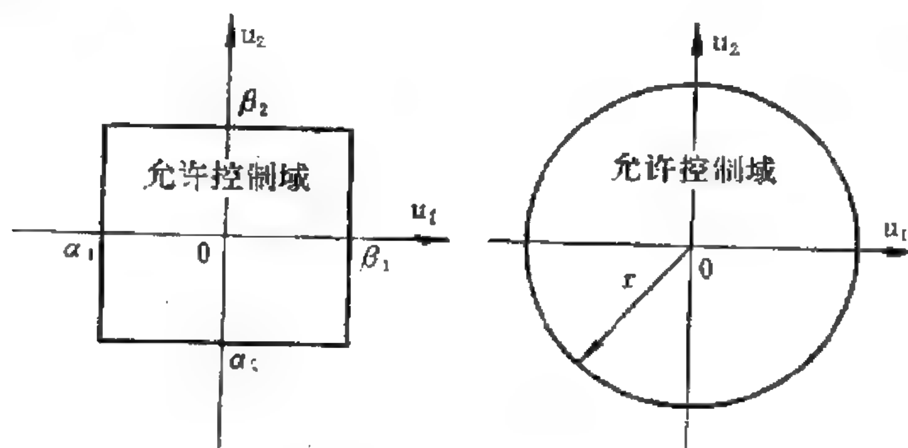
式中 L 是标量函数，它是向量 X 和 U 的函数。

θ 是标量，与终端时间 t_f 及终端状态 $X(t_f)$ 有关。$\theta[t_f,\ X(t_f)]$ 称为终端性能指标，表示对终端状态或终端时间有一定的要求。

J 是标量，对每个控制函数都有一个对应值。

$U(\cdot)$ 表示控制函数整体，而 $U(t)$ 表示 t 时刻的控制向量。

实际控制系统中，控制向量 U 只能在允许范围内变化，例如任何系统中能获得的燃料、电压以及允许的温度都是有限制的，不可能取任意大的值。例如图 9—4（a）中在 u_1、u_2 平面上，允许控制域为长方形，$\alpha_1<u_1<\beta_1$，$\alpha_2<u_2<\beta_2$。α、β 是下界和上界。



（a）$\alpha_1<u_1<\beta_1,\alpha_2<u_2<\beta_2$　　（b）$u_1^2+u_2^2\leqslant r^2$

图 9—4　允许控制域

图 9—4(b) 中允许控制域为半径等于 r 的圆。$u_1^2+u_2^2\leqslant r^2$。这样最优控制问题应当是含有不等式约束（在允许控制域内）的求泛函极值的问题。

除了对控制变量有约束以外，对终端时刻和终端状态也有约束，称为终端约束，用（9—3）式表示：

$$N[t_f,\ X(t_f)]=0 \tag{9—3}$$

满足这一约束的状态集合称为目标集。如果目标只是一个点：$X(t_f)=X_f$，称为固定终端状态，简称固定终端。终端时刻 t_f 可能给定，也可能不给定。当 t_f 给定时，（9—3）式表示终端状态的各分量 $x_1(t_f)$、$x_2(t_f)$、……之间有一定的相关性。

例如，导弹拦截目标（称为拦截问题），只要求导弹的终端位置和目标位置重合，对导弹的终端速度并没有要求。但是两个飞船会合（称为会合问题），不仅终端位置要重合，而且终端速度也要重合。这些例子说明，不同的最优控制问题，对终端状态的约束是不同的。

图 9—5 画出了只有一个状态变量时，三种不同终端状态约束，假设始端状态都是固定的。

综上所述，最优控制问题的数学模型可以用以下五个方程来描述

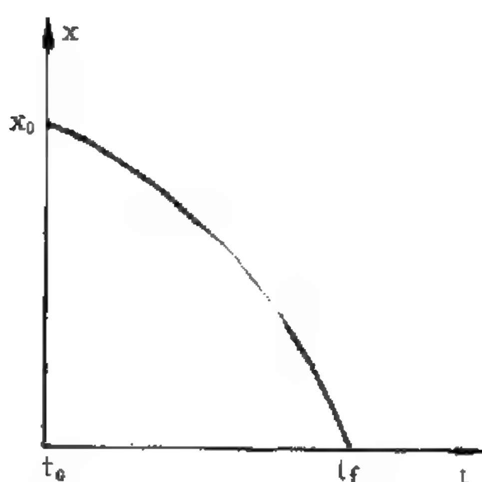
$$\dot{X}=\mathbf{f}(X,\ U,\ t) \tag{9—1}$$

$$J[U(\cdot)]=\theta[t_f,X(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}L[t,\ X(t),\ U(t)]dt \tag{9—2}$$

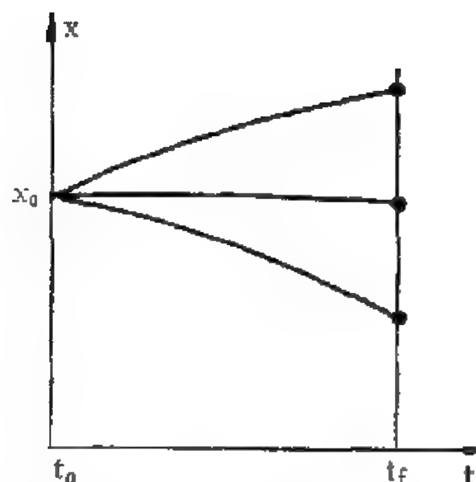
$$N[t_f,\ X(t_f)]=0 \tag{9—3}$$

$$X(t_0)=X_0 \tag{9—4}$$

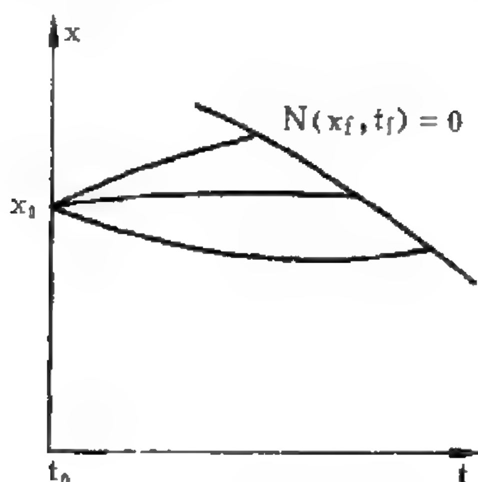
$$U_{\min}\leqslant U\leqslant U_{\max} \tag{9—5}$$



a. 终端状态固定，t_f 给定



b. 终端状态自由，t_f 给定



c. 终端状态满足约束，$N[X(t_f), t_f]=0$

图 9—5 始端固定，三种终端状态

最优控制问题的提法为：求允许控制 $U(t)$，使系统由初始状态 X_0 出发，经过一定时间，到达目标集 $N[t_f, X(t_f)]=0$，并且性能指标泛函 J 为极值。

使 J 为极值的控制规律称为最优控制 $U^*(t)$，将 $U^*(t)$ 代入（9—1）式可求得最优轨线 $X^*(t)$，再将 $U^*(t)$ 和 $X^*(t)$ 代入（9—2）式可求得最优泛函极值 $J^*=J[U^*(t)]$。

控制系统的经典设计方法（频率法或根轨迹法）是工程方法。而最优控制系统的设计方法则是数学方法和计算机算法的结合。本

书第五章到第七章介绍的非线性函数极值的数值计算方法原则上也可应用于最优控制问题的计算。

最优控制的理论最早在导弹技术、航天、航海等系统中应用。在这些领域中，最优控制实践的成功也为工程系统中最优控制的应用开辟了道路。

最优控制的一个典型例子是登月火箭到达月球表面时的软着陆问题。火箭飞行的最后阶段，进入了月球引力范围。当火箭垂直自由降落到距离月球表面为 h （约有几百米）的地方， 见 图 9—6，要求火箭速度为零，并且消耗燃料最小。

在火箭速度降为零以前，推力

$$F=-K\frac{dm}{dt}$$

起制动的作用，其中，

$\frac{dm}{dt}$ 为燃料消耗率，

K 为常数。

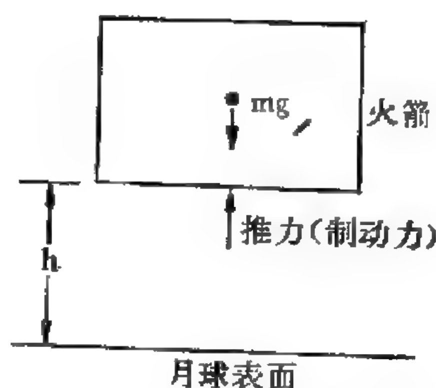


图 9—6 登月火箭到月球表面软着陆示意图

火箭从 $t=t_0$开始减速，到 $t=t_f$，速度为零，$x(t_f)=h$，这一过程的运动方程为：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-K\frac{dm}{dt}-mg$$

m 为火箭（包括燃料）质量，mg 为月球引力。

当 $t=t_0$ 时，　$x_0>0$，$m_0>0$，$\dot{x}_0<0$；

　$t=t_f$ 时，　$x_f=h$，m_f 自由，$\dot{x}_f=0$，t_f 自由。

$$m_0=m(t_0),\quad m_f=m(t_f)。$$

燃料消耗率限制为：　$-\alpha\leqslant\frac{dm(t)}{dt}\leqslant 0$

现在的问题是要确定$\frac{dm(t)}{dt}$，使火箭制动阶段燃料消耗为最小，即：

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f}\left[-\frac{dm(t)}{dt}\right]dt = m(t_0) - m(t_f)$$

$$= m_0 - m_f$$

J 是火箭质量减少量，即燃料消耗量。

另一个最优控制的典型例子是：飞船的姿态控制，要求飞船的姿态跟踪某种给定的姿态变化规律，如俯仰、偏转、或要求姿态稳定。这时，飞船的动力学方程可表示成：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + u$$

其中 x_1 表示角度 θ，控制变量 u 与控制力矩 $M(t)$ 成正比。要求选择控制力矩 $M(t)$，使跟踪时间最短、或跟踪误差最小等等，系统的状态方程就是姿态控制问题的等式约束。

从上面两个典型例子以及其它实践中得到成功应用的最优控制问题，可以归纳成以下几个最优控制问题。

1. 时间最优控制

使系统在最小时间内从初始状态转移到规定的终端状态，这时指标泛函可表示为：

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \qquad (9\text{—}6)$$

2. 线性调节器问题

使线性调节系统 $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$ 保持在平衡状态，误差最小、控制能量也最小，指标泛函可表示为：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[X^TQX+U^TRU]dt \tag{9—7}$$

X 为误差，Q 及 R 为权矩阵，U^TRU 与功率相当。(9—7)式为二次型指标泛函，因此这个问题属于线性二次型问题。

3． 跟踪问题

使系统的状态 X 尽可能接近给定状态 X_r，并且控制能量为最小，指标泛函为：

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[(X-X_r)^TQ(X-X_r)+U^TRU]dt \tag{9—8}$$

当 $X_r=0$ 时，就是线性调节器问题。

4． 最小燃料控制

系统燃料消耗速度与控制变量（例如推力）大小成正比。不管控制变量为正或负都要消耗燃料，因此指标泛函为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}|U(t)|dt \tag{9—9}$$

5． 终端控制

在规定时间内使系统状态尽可能接近终端要求值。也可以将最优时间控制看作是终端控制的特殊情况，这时终端状态给定而终端时间自由。

终端控制的指标泛函形式为

$$J=\theta[t_f,\ X(t_f)] \tag{9-10}$$

求泛函极值的基本方法是变分法。五十年代中期以后，庞特里亚金等人提出了极大值原理，贝尔曼提出了动态规划方法，使最优控制理论得到进一步的发展。和连续系统的最优控制理论相似，离散系统最优控制理论有离散变分法和离散极大值原理，此外动态规划也是求解离散控制系统最优化的基本方法，也可以用来求解连续

系统最优化，称为连续动态规划。本章讨论用古典变分法求解连续系统的最优控制问题。其它方法分别在以后各章讨论。

古典变分法是考虑更普遍条件下求泛函极值的方法。变分法的三个基本问题是：

1． 拉格朗日问题

这个问题的数学模型为：

$$\dot{X}=\mathbf{f}(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0)=X_0,\quad t_f \text{ 给定}$$

$$\min J=\int_{t_0}^{t_f} L(X,\ U,\ t)dt \tag{9-11}$$

性能指标为积分型，包括误差平方积分、燃料或控制能量最小等问题。

2． 梅耶（Mayer）问题

数学模型为：

$$\dot{X}=\mathbf{f}(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

$X(t_f)=X_f$，t_f 未给定，终端状态部分给定。

$$\min J=\theta[X,\ U,\ t]_{t_0}^{t_f} \tag{9-12}$$

（9－12）式指标为终端型，包括终端状态控制、最优时间控制等问题。

3． 波尔查（Bolza）问题

数学模型为：

$$\dot{X}=\mathbf{f}(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

$X(t_f)=X_f$，t_f 未给定，终端状态只有部分给定。

$$\min\ J=\theta[X,\ U,\ t]_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}L[X,U,\ t]dt \tag{9-13}$$

（9—13）式指标为一般型，当 $L=0$ 时就是梅耶问题，$\theta=0$ 时就是拉格朗日问题。因此波尔查问题是更一般的情况，它描述了在终端约束下的最小积分控制问题或在积分式约束下的终端控制问题。

实际上，所有最优控制问题都可以用上述三种问题之一来表示。我们的目的是要寻找最优控制函数。和多变量函数极值问题一样，求最优控制问题也有间接法和直接法两种，间接法是首先求一组最优的必要条件，从而得到最优控制规律。直接法也是用梯度法等进行数值计算，经过若干次迭代，得到最优控制规律。

§ 9-2　泛函与变分的基本概念

一、泛函定义

如果有一类函数 $\{y(x)\}$，对每个函数 $y(x)$ 有一个 J 的值与之对应，则变量 J 称为函数 $y(x)$ 的泛函数，简称泛函，记作 $J[y(x)]$。

例如，图 9—7 中函数 $y=f(x)$，在固定两点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ 之间弧长 l 是 $y(x)$ 的泛函。

已知　$dl^2=dx^2+dy^2$，

$$\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\dot{y}^2}。$$

泛函 $J[y(x)]=l$，对不同的曲线 $y(x)$，有不同长度 l 与之对应，可以写成：

$$J[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx=\int_{x_1}^{x_2}F(\dot{y})dx$$

式中　$F(\dot{y})=\sqrt{1+\dot{y}^2}$，一般 F 也是 x，y 的函数，因此应写作：

$$J=\int_{x_1}^{x_2}F(x,\ y,\ \dot{y})dx \tag{9-14}$$

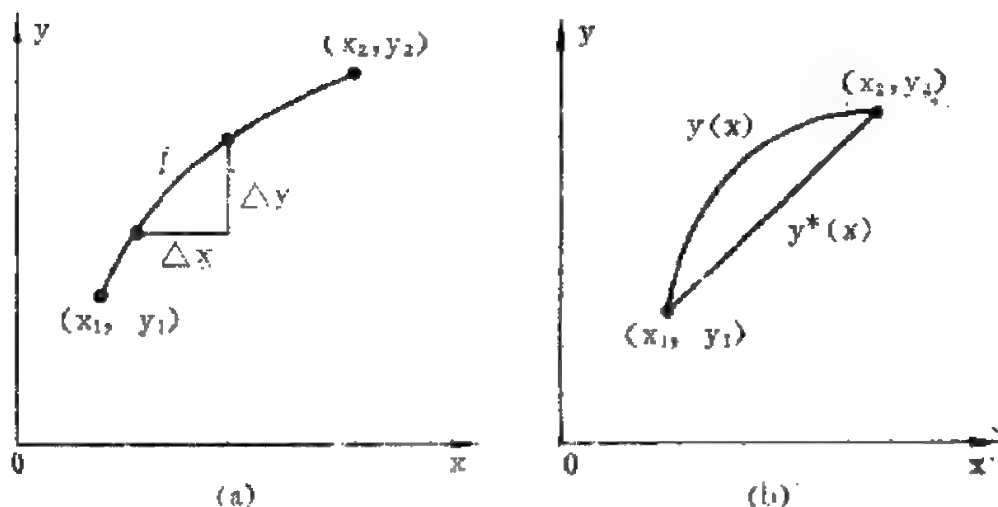


图 9—7　$y(x)$ 在固定两点间的弧长

两点间最短弧长是直线 $y^*(x)$，如图 9—7b 所示，即 $l\min=J^*=\min J[y(x)]=J[y^*(x)]$。

控制系统中自变量是时间 t，因变量函数是状态变量 $X(t)$，因此（9—14）式可写成：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(t,\ X,\ \dot{X})dt$$

X 为向量，$\dot{X}(t)=f(X,\ U,\ t)$，因此上式也可写作：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}L(t,\ X,\ U)dt \tag{9—15}$$

这就是积分型指标泛函。

二、泛函的变分

求泛函的极大或极小问题都称为变分问题。在图 9—7b 中，最优函数 $y^*(x)$ 附近，曲线 $y(x)$ 可表示为：

$$y(x)=y^*(x)+\delta y(x) \tag{9-16}$$

$\delta y(x)$ 称为 $y(x)$ 的变分。

泛函 J 的变分 δJ 定义如下：

$$\delta J=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x, y, \dot{y})}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right]dx \tag{9-17}$$

[证] 设被积函数为 $F(x, y)$

$$J=\int_a^b F(x, y)dx$$

取 y 的增量函数 $y+\triangle y$，则

$$\triangle J=\int_a^b F(x, y+\triangle y)dx-\int_a^b F(x, y)dx$$

$$=\int_a^b \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\triangle y dx+\int_a^b \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}(\triangle y)^2 dx+\varepsilon$$

$$=\delta J+\delta^2 J+\varepsilon$$

上式是将 $F(x, y+\triangle y)$ 在 $y(x)$ 曲线上展成泰勒级数，取二次近似，ε 为高阶无穷小。令 $\triangle y\approx\delta y$，$(\triangle y)^2\approx\delta^2 y$，则

一阶变分 $$\delta J=\int_a^b \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\delta y dx \tag{9-18}$$

二阶变分 $$\delta^2 J=\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2}\delta^2 y dx \tag{9-19}$$

如果被积函数为 $F(x, y, \dot{y})$，则由（9—18）式推广可得：

$$\delta J=\int_a^b\left[\frac{\partial F(x, y, \dot{y})}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F(x, y, \dot{y})}{\partial y}\delta \dot{y}\right]dx \quad (9\text{—}20)$$

这就是关于泛函变分的一般定义。

可以证明二阶变分公式为

$$\delta^2 J=\frac{1}{2}[\delta y, \delta \dot{y}]\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial \dot{y}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{y}^2}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\delta y \\ \delta \dot{y}\end{bmatrix} \quad (9\text{-}21)$$

三、变分规则

设 F_1 和 F_2 是 t、x、$\dot{x}$ 的函数，则有如下的变分规则：

$$\left.\begin{array}{ll}1. & \delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2 \\ 2. & \delta(F_1F_2)=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1 \\ 3. & \delta\int F(t, x, \dot{x})dt=\int \delta F(t, x, \dot{x})dx \\ 4. & \delta \dot{x}=\frac{d}{dt}\delta x\end{array}\right\} \quad (9\text{-}22)$$

附表　函数微分与泛函变分的比较

微　　分	变　　分
1. 函数 $y=f(x)$ $\triangle x=x-x_0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\triangle x=dx$	1. 泛函 $J[y(x)]=\int_a^b F(x,y)\,dx$ $\triangle y=y(x)-y_0(x)$ $\lim\limits_{y(x)\to y_0(x)}\triangle y=\delta y$

微　　分	变　　分
2.　函数微分 $\triangle y=f(x+\triangle x)-f(x)$ $=f'(x)\triangle x+e$ $dy=f'(x)dx$	2.　泛函变分 $\triangle J=J(y+\triangle y)-J(y)$ $=\frac{d}{dy}J(y)\delta y+e$ $\delta J=\frac{d}{dy}J(y)\delta y$
3.　$\triangle x=x-x_0$ 很小时 $y(x)-y(x_0)\geqslant 0$, $y(x_0)$ 为极小 $y(x)-y(x_0)\leqslant 0$, $y(x_0)$ 为极大	3.　$y(x)$ 与 $y_0(x)$ 很靠近时 $J[y(x)]-J[y_0(x)]\geqslant 0$, J 在 $y_0(x)$ 上为极小 $J[y(x)]-J[y_0(x)]\leqslant 0$, J 在 $y_0(x)$ 上为极大
4.　函数极值的必要条件 $x=x_0$, $\frac{dy}{dx}=0$	4.　$y=y_0(x)$ 上泛函达极值的必要条件 $y=y_0(x)$, $\delta J=0$
5.　函数极值的充分条件 $\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}>0$，极小 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$，极大	5.　泛函极值的充分条件 $\delta J=0$, $\delta^2 J>0$，极小 $\delta^2 J<0$，极大

§ 9-3　泛函极值的必要条件——欧拉方程

一、泛函变分原理（无约束变分）

设曲线 $u(t)$，如图 9-8。求两点间弧长 l 为最短，曲线 $u^*(t)$

使泛函达极值。将数学模型写成一般形式如（9—23）式。因为对变量没有约束，故称为无约束变分问题。

$$\min J(u) = \int_{t_0}^{t_f} F(t, u, \dot{u}) dt \quad (9\text{–}23)$$

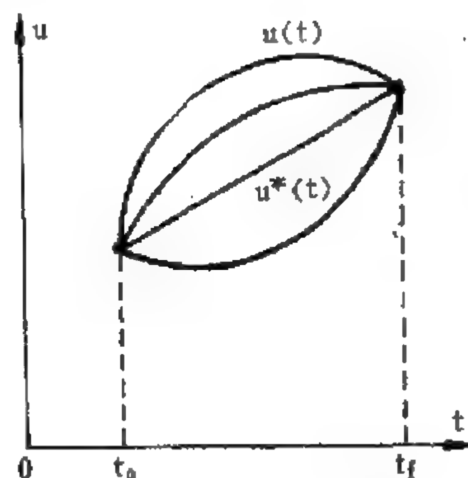


图 9—8　弧长 l 最短的曲线$u^*(t)$

取 $u(t)$ 的变分 $\delta u(t)$，$|\delta u(t)|$ 是很小的，则泛函 $J(u)$ 的变分为：

$$\delta J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} \right] dt \quad (9\text{–}24)$$

已知$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta \dot{u} dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \frac{d}{dt}(\delta u) dt$

（见变分规则）。

令 $x = \frac{\partial F}{\partial \dot{u}}$，$y = \delta u$，利用分部积分公式：

$$\int_a^b x dy = xy \Big|_a^b - \int_a^b y dx \quad (9\text{–}25)$$

$$dx = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} dt, \quad dy = \frac{d}{dt} \delta u dt$$

得
$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta u \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta u \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) \delta u dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \delta u \Big|_{t_0}^{t_f} \quad (9\text{–}26)$$

两端状态固定时，$u(t_0) = u_0$，$u(t_f) = u_f$，

所以 $\delta u(t_0)=0$，$\delta u(t_f)=0$

两端状态均为自由时，表示 $t=t_0$ 及 $t=t_f$ 时，δu 是任意的，$\delta u(t_0)\neq 0$，$\delta u(t_f)\neq 0$。

对于两端状态固定的情况，（9—26）式中

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\delta u\right|_{t_0}^{t_f}=0，于是得：$$

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right)\delta u dt \tag{9-27}$$

当 $u=u^*$ 时，J 为最小，$\delta J(u^*)=0$。

在 t_0 到 t_f 时间内，$\delta u(t)$ 是任意的，因此 u^* 应满足下述二阶微分方程：

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}=0 \tag{9-28}$$

并有 $$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\delta u\right|_{t_0}^{t_f}=0$$

这就是无约束泛函极值的必要条件，由欧拉和拉格朗日两人独立推导得出，称为欧拉—拉格朗日方程，以下简称欧拉方程。

（9-28）式所示的欧拉方程中有一项是求全导数，要用全导数公式展开：

设函数 $z=f(x, y,\cdots\cdots)$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\cdots\cdots \tag{9-29}$$

令（9-28）式中 $z=\dfrac{\partial F}{\partial \dot{u}}=g(\dot{u}, u, t)$

则 $$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}=\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\frac{d\dot{u}}{dt}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\frac{du}{dt}$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\frac{dt}{dt}$$

于是（9—28）式也可写成：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}\ddot{u}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial \dot{u}}\dot{u}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial t}-\frac{\partial F}{\partial u}=0 \tag{9-30}$$

有时为了书写简便，用下述符号表示偏导数：

$$F_u=\frac{\partial F}{\partial u},\quad F_{uu}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2},\quad F_{u\dot{u}}=\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial \dot{u}}。$$

$$F_{\dot{u}}=\frac{\partial F}{\partial \dot{u}},\quad F_{\dot{u}\dot{u}}=\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2},\quad F_{\dot{u}t}=\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial t}。$$

则（9—30）式也可写作：

$$F_{\dot{u}\dot{u}}\ddot{u}+F_{u\dot{u}}\dot{u}+F_{\dot{u}t}-F_u=0 \tag{9-31}$$

对于不同的函数 F，欧拉方程如下表所示，应用时注意函数所含的变量。

函　　数	欧　拉　方　程
$F[t,\ u(t)]$	$F_u(t,\ u)=0$
$M(u,\ t)+N(u,\ t)\dot{u}$	$\frac{\partial M}{\partial u}-\frac{\partial N}{\partial t}=0$
$F(\dot{u})$	$F_{\dot{u}\dot{u}}\ddot{u}=0$
$F(t,\ \dot{u})$	$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}=0$
$F(u,\ \dot{u})$	$F_{\dot{u}\dot{u}}\ddot{u}+F_{u\dot{u}}\dot{u}-F_u=0$

[例] 设已知 $x(0)=0$，$x(\pi/2)=1$，求 $x(t)$ 使泛函

$$J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)dt \text{ 为极小。}$$

解：
$$F(t, x, \dot{x})=\dot{x}^2-x^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}, \quad \frac{\partial F}{\partial x}=-2x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}=2。$$

由（9—30）式欧拉方程 $\quad 2x+2\ddot{x}=0$

解得
$$x=c_1\cos t+c_2\sin t,$$

由边界条件 $t=0$，$x(0)=0$；得 $c_1=0$。

$$t=\frac{\pi}{2}, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1；\text{ 得 } c_2=1。$$

故得
$$x^*(t)=\sin t。$$

二、多元泛函无约束极值问题

设
$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(t, X, \dot{X})dt$$

X 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集合，$\dot{X}$ 表示 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots \dot{x}_n$ 的集合。对变量没有任何约束。

已知边界条件 $x_i(t_0)$、$x_i(t_f)$，$i=1,2,\cdots,n$。

求解上述多元泛极值问题，可以对其中一元 $x_i(t)$ 取变分，其余各元看作固定，它们的变分为零。于是 n 元泛函极值问题变为求 n 个一元泛函极值问题。欧拉方程组为：

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}=0$$

……………

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}-\frac{d}{dt}\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}=0$$

用梯度表示，可得向量欧拉方程：

$$\nabla_X F-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{X}} F=0 \tag{9-32}$$

式中梯度 $\nabla_X F=\left[\frac{\partial F}{\partial x_1},\ \frac{\partial F}{\partial x_2},\ \cdots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}\right]^T$

$$\nabla_{\dot{X}} F=\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1},\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2},\cdots,\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n}\right]^T$$

(9-32) 式二阶微分方程的解 $X^*=[x_1^*,\ x_2^*,\cdots x_n^*]^T$ 可使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_f}F(t,\ X,\dot{X})dt$$ 达极小。

[例] 求下述泛函的极值曲线

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\dot{u}^2+2\dot{x}^2+4ux)dt$$

边界条件 $u(0)=0,\quad u\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$。

$x(0)=0,\quad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$。

这是二元泛函，$F=2\dot{u}^2+2\dot{x}^2+4ux$

$$\frac{\partial F}{\partial u}=4x,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}=4,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial \dot{u}}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial t}=0$$

故得欧拉方程　$4\ddot{u}-4x=0$，　$\ddot{u}-x=0$

同理　$\frac{\partial F}{\partial x}=4u$，$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}=4$，其余为 0 。

得欧拉方程　　$\ddot{x}-u=0$

解联立方程组　$\ddot{u}-x=0$，　$\ddot{x}-u=0$ 得

特征方程 $\lambda^4-1=0$，特征根 $\lambda=\pm 1$，$\pm j$。

$$u=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\sin t+c_4\cos t$$

$$x=\ddot{u}=c_1e^t+c_2e^{-t}-c_3\sin t-c_4\cos t$$

由边界条件得　$c_1=c_2=c_4=0$，$c_3=1$。

因此极值曲线为　$u=\sin t$

$$x=-\sin t。$$

三、条件泛函极值

求泛函在等式约束下的极值称为条件泛函极值问题，不等式约束的条件泛函极值问题求解起来要困难些，但可以将不等式约束化为等式约束来求解。用拉格朗日向量乘数法可以求出泛函条件极值的必要条件。

已知约束方程组

$$\begin{aligned} &g_1(t, X)=0,\ X\in E^n \qquad (9\text{-}33)\\ &g_2(t, X)=0,\\ &\vdots\\ &g_m(t, X)=0,\ m<n \end{aligned}$$

或写成向量形式　　$G(t, X)=0$

$$G(t, X)=[g_1(t, X), g_2(t, X), \cdots, g_m(t, X)]^T$$

求下述泛函为极值的必要条件：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}L(t,\ X,\ \dot{X})dt$$

应用和多元函数条件极值相类似的方法，构造一个增广泛函

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}\left[L(t,\ X,\ \dot{X})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(t)g_i(t,\ X)\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}[L(t,\ X,\ \dot{X})+\lambda^T(t)G(t,\ X)]dt \qquad (9\text{-}34)$$

式中 $\lambda(t)=[\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)\cdots\lambda_m(t)]^T$ 是时间的函数。称为拉格朗日乘子向量。

求泛函 J' 的无条件极值等效于求泛函 J 在（9—33）式约束下的条件极值，其必要条件为下述欧拉方程：

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j}=0,\ \ j=1,\ 2,\cdots,n \qquad (9\text{-}35)$$

$$g_i(t,\ X)=0,\ i=1,\ 2,\cdots m,\ \ m<n。$$

$$F=L(X,\ \dot{X},\ t)+\lambda^T(t)G(t,\ X)$$

上述方程组有 $m+n$ 个方程，未知函数待求的有 $m+n$ 个，即：

$$x_j(t),\ j=1,\ 2,\cdots n,\ \lambda_i(t),\ i=1,\ 2,\ \cdots,m。$$

[例 1] 在 $g(x,\ y,\ z)=0$ 的条件下沿什么规律可使下述泛函达极小：

$$J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\ dx$$

这个问题就是求在空间曲面 $g(x,\ y,\ z)=0$ 上，给定两点 x_0、x_1 间长度 J 最短的曲线。

解：构造增广泛函

$$J' = \int_{x_0}^{x_1} [(1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda(x) g(x, y, z)] dx$$

$$F = (1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}} + \lambda(x) g(x, y, z)$$

本例中只有一个约束，所以 $\lambda(x)$ 为单变量标量函数。

欧拉方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0$$

原约束 $g(x, y, z) = 0$

求解上述三式，得 y^*，z^*，λ^*，即为最优解。

[例 2] 等周问题

给定周长为 l 的曲线中，求面积 S 为极大的几何图形。

解：

$$S = \iint dx dy = \frac{1}{2} \oint_l (x dy - y dx)$$

$$= \frac{1}{2} \int_l (x\dot{y} - y) dx$$

$$l = \int_l \sqrt{1 + \dot{y}^2} \; dx$$

l 也是一个泛函，本例中是求 $\max S$ 的约束。构造增广泛函

$$J' = \int_l \left[\frac{1}{2} (x\dot{y} - y) + \lambda(x) \sqrt{1 + \dot{y}^2} \right] dx$$

由欧拉方程 $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}\right)+\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=-1$$

$$\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=-x+c_1$$

$$\dot{y}=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}$$

得
$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2$$

即给定周长，面积极大的几何图形是圆。

在最优控制问题中，系统的状态方程就是等式约束，此外也还有不等式约束，例如控制变量有限制时，就是不等式约束，对于这种情况，可将不等式约束化为等式约束来求解。

［例］ 不等式约束

$$u_{min}\leqslant u\leqslant u_{max} \tag{9-36}$$

可写成
$$u-u_{min}\geqslant 0$$

$$u_{max}-u\geqslant 0$$

或
$$(u-u_{min})(u_{max}-u)\geqslant 0 \tag{9-37}$$

引入松弛变量 α^2，可将（9—37）式化为等式约束：

$$(u-u_{min})(u_{max}-u)-\alpha^2=0 \tag{9-38}$$

如果控制变量 u（标量）的不等式约束非常简单，例如

$$|u|\leqslant 1$$

则可用下述形式来代替，得等式约束：

$$u = \frac{2}{\pi} \arctan v \tag{9-39}$$

v可取任意实数，则u就自动限制在所要求的范围内。从而将不等式约束化为等式约束。

§9-4 边界条件

求解欧拉方程，需要确定边界条件，以决定积分常数。最优控制问题中边界条件是多种多样的，其中包括：始端和终端状态是否给定，终端时刻t_f是否给定，终端状态有没有约束等。最优控制问题中大多数情况是始端状态 $X(t_0)$给定，而终端状态 $X(t_f)$ 不一定给定或者部分给定。

因此按终端状态是否给定，可以分成以下三种典型的最优控制问题：

1． 终端固定问题——这是指终端状态给定，终端时间 t_f 也是给定的。

2． 终端自由问题——终端状态没有规定，但终端时间 t_f 是给定的。

3． 可动边界问题——终端时间 t_f 自由，但终端状态沿规定的边界曲线移动，或者说对终端状态有一定的约束

$$N[X(t_f)、t_f] = 0。$$

下面我们分别讨论这三种情况。设始端是固定的，$X(t_0) = X_0$。

1． 终端固定问题。

这种情况是最简单的。从 t_0 到 t_f 状态运动轨线 $x(t)$ 如图9—9 所示（以单变量为例）。这个问题的边界条件就是：

$$x(t_0) = x_0,$$

$$x(t_f) = x_f。$$

在 $t=t_0$ 和 $t=t_f$ 时刻，状态已给定，所以这两点的 $\delta x=0$，因此

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f}=0$$

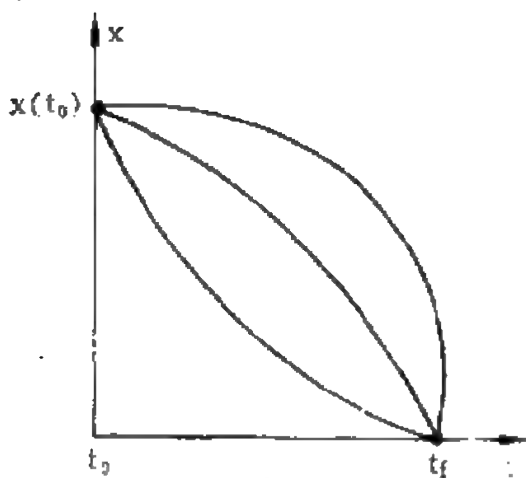


图 9—9　终端固定问题

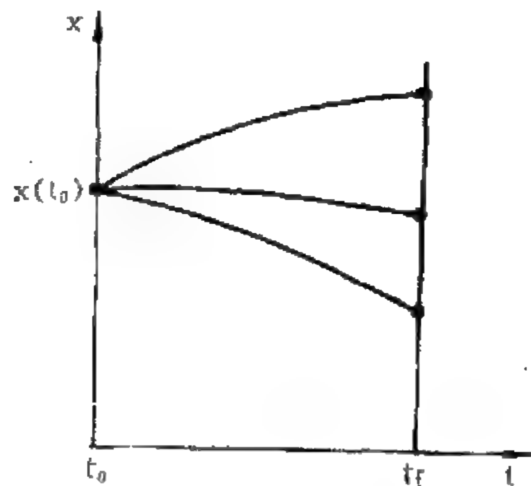


图 9—10　终端自由问题

2. 终端自由问题

这种情况下从 t_0 到 t_f 的状态运动轨线如图 9—10 所示。当 $t=t_0$ 时，$\delta x=0$；$t=t_f$ 时，$\delta x\neq 0$，是任意的。因此自由终端问题的最优解应满足的必要条件为（参见 9—28 式）：

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$$

边界条件为　　$x(t_0)=t_0$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_f}=0 \tag{9-40}$$

[例]　已知问题为

$$\min J(u)=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2+r^2u^2)dt$$

系统状态方程为　　$\dot{x}=ax+u$

r 及 a 均为常数。已知 $x(0)=x_0$，t_f 给定而 $x(t_f)$ 自由。
求解这一问题，可将状态方程代入指标泛函，消去 u，得：

$$J(x)=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[x^2+r^2(\dot{x}-ax)^2]dt$$

$$F=\frac{1}{2}[x^2+r^2(\dot{x}-ax)^2]$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=r^2(\dot{x}-ax)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}=r^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=r^2(\dot{x}-ax)(-a)+x$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}=-r^2a$$

由（9—30）式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial \dot{x}}\dot{x}+\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \dot{x}}-\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

得

$$r^2\ddot{x}-r^2a\dot{x}-x+ar^2(\dot{x}-ax)=0$$

$$\ddot{x}=\frac{1+a^2r^2}{r^2}x=\left(\frac{1}{r^2}+a^2\right)x$$

边界条件 $x(0)=x_0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_f}=0 \text{ 或 } \left.(\dot{x}-ax)\right|_{t=t_f}=0$$

3． 可动边界问题

设终端时间 t_f 是自由的，终端状态受到终端边界线的约束，应当满足 $N[x(t_f)、t_f]=0$ 或 $x(t_f)=\varphi(t_f)$，即终端状态 $x(t_f)$ 是终端时间 t_f 的函数。终端状态必须落在 $x(t_f)-\varphi(t_f)=0$ 曲线上。

图 9—11 说明了这时的状态轨线。由于终端时间 t_f 是自由的，变分 δt_f 不为零。为使泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t)dt$$

为极小，除了要确定最优状态轨线外，还要确定最优终端时间，见图 9—12。

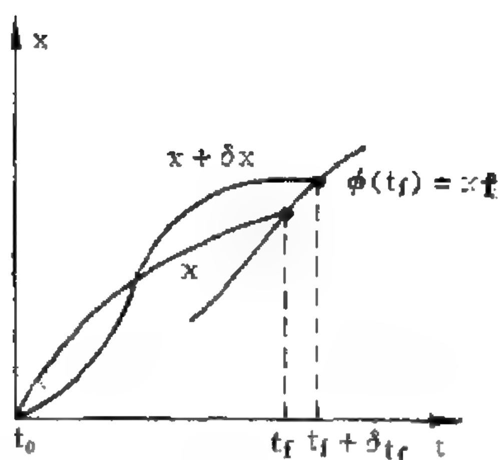


图 9—11 可动边界问题

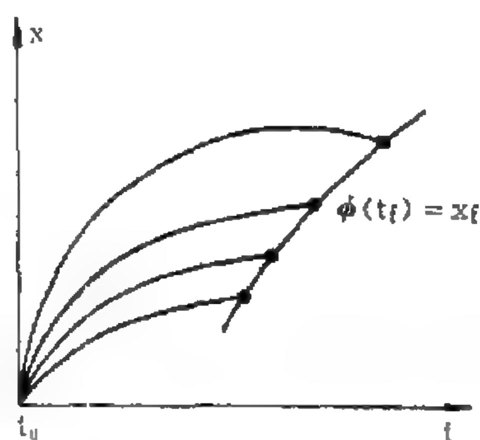


图 9—12 求状态轨线最优和终端时间最优

对 t_f、x、$\dot{x}$ 取变分，则

$$\triangle J=\int_{t_0}^{t_f+\delta t_f} F(x+\delta x, \dot{x}+\delta\dot{x}, t)dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t)dt$$

$$=\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x+\delta x,\ \dot{x}+\delta\dot{x},\ t)dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}[F(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-F(x,\dot{x},t)]dt$$

一阶变分

$$\delta J=\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x+\delta x,\ \dot{x}+\delta\dot{x},t)dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}\right)dt$$

由积分中值定理：在 $[a,\ b]$ 内，若 $f(x)$ 连续，则至少有一个 c 使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c),\quad a<c<b。$$

令 $a=t_f,\ b=t_f+\delta t_f,\ c=t_f+\gamma\delta t_f,\ 0<\gamma<1$。

$$\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} F(x+\delta x,\ \dot{x}+\delta\dot{x},\ t)dt$$

$$=\delta t_f F\Big|_{t=t_f+\gamma\delta t_f}\doteq\delta t_f F\Big|_{t=t_f}$$

代入上式，得一阶变分，并令它等于零：

$$\delta J=F(x,\ \dot{x},\ t)\Big|_{t_f}\delta t_f$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\delta\dot{x}}\delta\dot{x}\right)dt=0 \qquad (9-41)$$

(9-41) 式是可动边界问题最优解的必要条件。由分部积分公式，(9-41) 式可写成：

$$\delta J = F(x, \dot{x}, t)\delta t\Big|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\delta x\,dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

我们可得必要条件为：

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$

边界条件为 $\quad x(t_0) = x_0$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\Big|_{t=t_f} + \delta t F(x, \dot{x}, t)\Big|_{t=t_f} = 0 \qquad (9\text{-}42)$$

对于多变量泛函，必要条件为：

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0$$

$$X(t_0) = X_0$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right)^T \delta X\Big|_{t=t_f} + \delta t F(X, \dot{X}, t)\Big|_{t_f} = 0$$

(9—42) 式可以分两种情况讨论：

1. 终端没有约束，即 x 和 t_f 取变分是完全独立的，则得

$$\left.\begin{aligned} F(x, \dot{x}, t)\Big|_{t=t_f} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\Big|_{t=t_f} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}43)$$

2. 终端有约束： $\quad x(t_f) = \varphi(t_f) \qquad (9\text{-}44)$

则对 (9—44) 式两边取变分，应有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\delta t + \frac{\partial x}{\partial x}\delta x\right)\Big|_{t=t_f} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\delta t\Big|_{t=t_f}$$

或 $$\delta x(t_f)=[\dot{\varphi}(t)-\dot{x}(t)]_{t=t_f}\ \delta t_f$$

代入（9—42）式得

$$\delta t_f\left[(\dot{\varphi}(t)-\dot{x}(t))\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F(x,\ \dot{x},\ t)\right]_{t=t_f}=0$$

由于 δt_f 是任意的，即 $\delta t_f \neq 0$，故得终端边界条件为

$$\left[(\dot{\varphi}(t)-\dot{x}(t))\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F(x,\ \dot{x},\ t)\right]_{t=t_f}=0 \qquad (9\text{-}45)$$

（9—45）式也称为可动边界问题的横截条件。

可动边界问题的一个典型例子是拦截问题。发射火箭拦截一个目标，该目标正沿轨道 $x=\varphi(t)$ 运动（见图 9—13）。要求火箭发射出去消耗的燃料为最小。$t=t_f$ 时，火箭的位置 $x(t_f)=\varphi(t_f)$，即在目标运动的轨道上，与目标位置重合，也即要满足（9—45）式所示的横截条件。

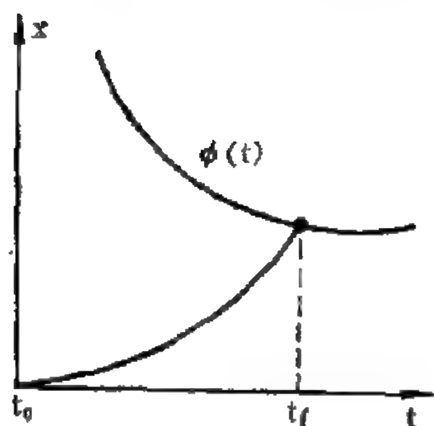


图 9—13 拦截问题

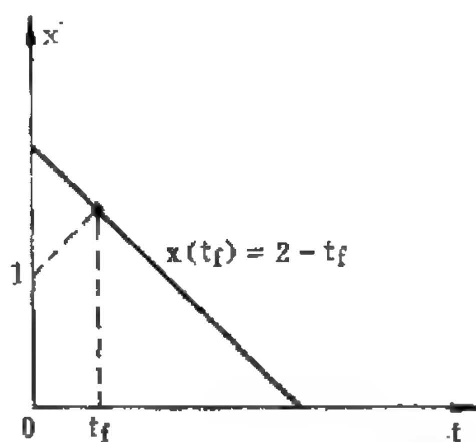


图 9—14 拦截问题举例

［例］ 设 $x(0)=1$，求从 $x(0)=1$ 到直线 $x(t)=2-t$ 间距离为最短的曲线（见图 9—14）。

这个最优问题是指：从初始状态 $x(0)=1$ 出发，终端约束 $x(t_f)=2-t_f$，t_f 自由，求最优的状态轨线。数学模型为：

$$\min J(x)=\int_0^{t_f}(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$F=(1+\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}$$

由（9—45）式横截条件为：

$t=t_f$ 时，
$$(\dot{\varphi}-\dot{x})\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}+F=0$$

$$\varphi(t)=2-t,\quad \therefore\quad \dot{\varphi}=-1$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=\dot{x}(1+\dot{x}^2)^{-\frac{1}{2}}$$ 因此 $t=t_f$ 时应满足

$$-(1+\dot{x})\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}+\sqrt{1+\dot{x}^2}=0$$

或 $t=t_f$ 时
$$-(1+\dot{x})\dot{x}+(1+\dot{x}^2)=0$$

$$\dot{x}=1$$

由欧拉公式
$$\ddot{x}=0$$

故
$$x^*=at+b$$

显然从一点到一直线的最短距离为一直线。由边界条件定积分常数：

$$t=0\quad x=1,\qquad 故\quad b=1$$

$$t=t_f\quad \dot{x}=1,\quad \frac{dx}{dt}=a,\quad 故\quad a=1$$

最优轨线
$$x^*(t)=t+1$$

求最优终端时间，令 $x(t_f)=t_f+1=2-t_f$

$$\therefore\qquad t_f^*=\frac{1}{2}$$

由上例可以看出，最优轨线与边界线相垂直，而不是相切，这是拦截问题的特点，因为这个缘故，称（9—45）式为横截条件。

有的问题中，对终端一部分状态分量有约束，另一部分状态分量是固定的，则边界条件要分别进行讨论。

［例］ 三维状态，x_1 终端为可动边界问题，x_2、x_3 为固定终端问题。

$$X=[x_1,\ x_2,\ x_3]^T$$

$$X(0)=[x_{10},\ x_{20},\ x_{30}]^T$$

$$X(t_f)=\Phi(t_f)=[\varphi_1(t_f),\ 0,\ 0]^T$$

则对 x_1 说，应有 $t=t_f$ 时

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1}+\frac{F}{\dot{\varphi}_1-\dot{x}_1}=0$$

对 x_2，x_3 说，　　$x_2(t_f)=x_3(t_f)=0$。

本节中，我们只分析讨论了积分型指标泛函即拉格朗日问题的边界条件，关于一般型指标泛函，即波尔查问题的边界条件将在下一节内讨论。

<table>
<tr><th colspan="3">问　　题</th><th>终端边界条件</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. 终端固定</td><td>$X(t_f)=X_f$</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. 终端自由（t_f 给定）</td><td>$t=t_f$，$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}\right]=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3.</td><td rowspan="2">可动边界，t_f 自由</td><td>a. 终端约束 $X=\varphi(t_f)$</td><td>$t=t_f$，$F+(\dot{\varphi}-\dot{X})^T\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=0$</td></tr>
<tr><td>b. 终端无约束</td><td>$t=t_f$，$F=0$，$\frac{\partial F}{\partial \dot{X}}=0$</td></tr>
</table>

上页表中列出拉格朗日问题三种情况的边界条件，假设始端固定。

$$X(t_0)=X_0,\ \ J=\int_{t_0}^{t_f}F(X,\ \dot{X},\ t)dt。$$

§ 9-5　古典变分法求解最优控制问题

应用变分法求泛函极值适用于等式约束的情况，最优控制问题中有状态变量和控制变量，引入哈密顿函数，应用变分法可以导出最优控制的必要条件，用解析形式表示，称为哈密顿（Hamilton）方法，它只适用于对控制变量和状态变量均没有约束的情况。

一、哈密顿方法

设最优控制问题为

$$\min\ J(U)=\int_{t_0}^{t_f}L(X,\ U,\ t)dt \tag{9-46}$$

$$\dot{X}=\mathrm{f}(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

t_f 给定，X_f 自由。求最优控制 $U^*(t)$。

状态方程是等式微分约束：

$$\mathrm{f}(X,\ U,\ t)-\dot{X}=0$$

引入伴随向量 $\lambda(t)=[\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\cdots\cdots,\lambda_n(t)]^T$，它与 n 维拉格朗日乘子向量类似，于是，我们可以构造一个增广泛函 J'：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}[L(X,\ U,\ t)+\lambda^T(t)f(X,\ U,\ t)-\lambda^T(t)\dot{X}(t)]dt \tag{9-47}$$

定义 $H(X, \lambda, U, t)=L(X, U, t)$

$$+\lambda^T(t)f(X, U, t) \quad (9\text{-}48)$$

式中 H 是标量函数，称为哈密顿函数。

则（9—47）式可写成：

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}[H(X, \lambda, U, t)-\lambda^T(t)\dot{X}(t)]dt \quad (9\text{-}49)$$

令 $$F=H-\lambda^T\dot{X}, \quad J'=\int_{t_0}^{t_f}F dt \quad (9\text{-}50)$$

求（9—49）式 J' 极小，等效于求（9—47）式原泛函在等式约束下极小。将（9—49）式用分部积分公式变换一下，得

$$J'=\int_{t_0}^{t_f}(H+\dot{\lambda}^T X)dt-\lambda^T X\Big|_{t_0}^{t_f}$$

将上式对控制变量和状态变量分别取变分，得：

$$\delta J'=-\lambda^T\delta X\Big|_{t_0}^{t_f}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T\delta U+\left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T\delta X+\dot{\lambda}^T\delta X\right]dt \quad (9\text{-}51)$$

式中 $$\delta X=(\delta x_1, \delta x_2, \cdots, \delta x_n)^T$$

$$\delta U=(\delta u_1, \delta u_2, \cdots, \delta u_m)^T$$

δX 和 δU 是任意的，泛函极值的必要条件是 $\delta J'=0$，故得

$$\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial X}=0, \quad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial X} \quad (9\text{-}52)$$

$$\frac{\partial H}{\partial U}=0 \quad (9\text{-}53)$$

$$\lambda^T \delta X \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \tag{9-54}$$

因为始端固定，终端自由，∴ $\lambda(t_f)=0$

（9—52）式称为伴随方程，（9—53）式称为控制方程，（9—54）式称为横截条件。此外还应满足状态方程：

$$\dot{X} = f(X, U, t) \tag{9-55}$$

以上四式就是最优控制问题（9—46）式最优解的必要条件，也可以从欧拉方程导出。

由（9—50）式可知　　$F = H - \lambda^T \dot{X}$

$$\frac{\partial F}{\partial X} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0,\ \text{即}\ \frac{\partial H}{\partial X} + \frac{d\lambda}{dt} = 0,\quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}$$

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{U}} = 0,\ \text{即}\ \frac{\partial H}{\partial U} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\lambda}} = 0,\ \text{即}\ \dot{X} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(X, U, t)$$

$$t = t_f,\quad \frac{\partial F}{\partial \dot{X}} = 0,\ \text{即}\ \lambda(t_f) = 0$$

所得最优必要条件与（9—52）—（9—55）式完全一样。由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial U}=0$ 可求得最优控制的解析公式，将状态方程与伴随方程联系起来。

上面得到的 $\lambda(t_f)=0$ 是自由终端问题的终端边界条件，如果是固定终端问题，则终端边界条件为 $X(t_f)=X_f$。

状态方程与伴随方程合称为正则方程组，其标量形式为

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = f_i \tag{9-56}$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{9-57}$$

$i=1, 2,\cdots,n$，共有 $2n$ 个变量 x_i、λ_i，有 $2n$ 个边界条件

$$x_i(t_0)=x_{i0} \text{ 及 } \lambda_i(t_f)=0。$$

在自由终端问题中，正则方程的边界条件是给定始端状态 X_0 和终端伴随向量 $\lambda(t_f)$。联立方程解两个未知函数，一个边界在始端，另一个边界在终端，称为混合边界问题，在微分方程中这类问题称为两点边值问题。如果给定的是一端的条件，则在微分方程中称为一点边值问题。显然，两点边值问题的求解比一点边值问题更困难些。

由$\frac{\partial H}{\partial U}=0$ 可得最优控制 U^* 与 X 及 λ 的函数关系，代入正则方程组消去 U，则可求得唯一解 $X^*(t)$ 及 $\lambda^*(t)$，称为最优轨线和最优伴随向量。

由上述分析推导可以看出，用哈密顿方法求最优控制问题是将求泛函 J' 的极值问题转化为求哈密顿函数 H 的极值问题。

二、线性伺服系统——跟踪问题

现在我们举一个较简单的线性伺服系统的最优设计问题即跟踪问题来说明哈密顿方法在最优控制中的应用。

问题的数学模型为

$$\min J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[(X-X_r)^TQ(X-X_r)+U^TRU]dt \tag{9-58}$$

$$\dot{X}=AX+BU$$

如果是时变系统，则 A，B，Q，R 均为时变的。

$$X(t_0)=X_0$$

X_r 是状态向量的给定值，这个问题要求状态 X 与给定状态 X_r 间的误差为最小，控制能量也为最小，Q 及 R 为加权矩阵。但没有规定终端状态值，因此可以看作是终端自由问题。X_r、X 和 U 都是时间的函数，在数学推导过程中为了书写简化都没有写成时间函数的形式。

引入伴随向量 $\lambda(t)$，构造增广泛函 J'：

$$J' = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}(X - X_r)^T Q (X - X_r) + \frac{1}{2} U^T R U + \lambda^T (AX + BU) - \lambda^T \dot{X} \right\} dt \tag{9-59}$$

哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}(X - X_r)^T Q (X - X_r) + \frac{1}{2} U^T R U + \lambda^T (AX + BU) \tag{9-60}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0, \quad RU + \lambda^T B = 0$$

$$U^*(t) = -R^{-1}\lambda^T(t) B = -R^{-1} B^T \lambda(t) \tag{9-61}$$

正则方程组为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial X} = -\dot{\lambda}, \quad \dot{\lambda} = -Q(X - X_r) - A^T \lambda \\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{X}, \quad \dot{X} = AX + BU = AX - BR^{-1} B^T \lambda(t) \end{aligned}\right\} \tag{9-62}$$

边界条件为 $X(t_0) = X_0$，$\lambda(t_f) = 0$。

为了求得最优控制（9--61）式，必须求解正则方程组(9—62)式，这是两点边值问题。求解方法下面进一步讨论。

如果 $X_r(t) = 0$，表示这个线性系统给定状态为零，使误差为

最小，表示系统偏离平衡状态的误差应为最小，这类问题称为线性调节器问题，我们将在下一章中详细讨论这一问题。

线性伺服系统最优控制框图如图 9—15。

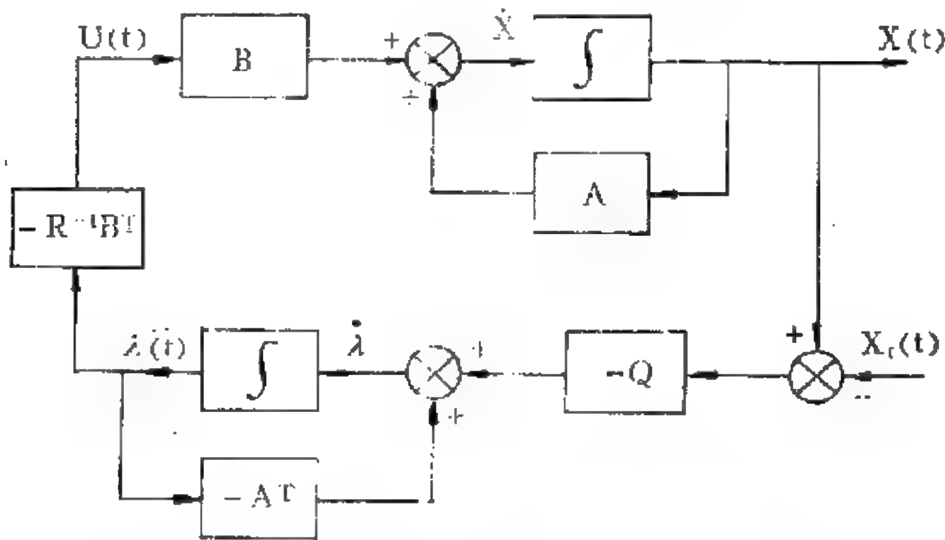


图 9—15 线性伺服系统最优控制框图

上述两点边值问题是要求解（9—62）式所示 $2n$ 个正则方程组，由于在控制时间间隔内，给定的边界条件一部分在始端 $X(t_0)=X_0$，另一部分在终端，即 $\lambda(t_f)=0$。因此不可能对状态方程和伴随方程同时顺时间或逆时间进行积分，因而要用迭代计算方法求解。下面介绍两种迭代方法：

要求解的方程是

$$\dot{X}=AX+BU=AX-BR^{-1}B^T\lambda\text{，已知}X(t_0)=X_0$$

$$\dot{\lambda}=-Q(X-X_r)-A^T\lambda\text{，已知}\ \lambda(t_f)=0$$

控制方程为 $$U=-R^{-1}\lambda^TB$$

1. 边值迭代法

λ_0 是未知的，试猜 $\lambda(t_0)=\lambda_0$，由给定 $X(t_0)=X_0$ 对正则方程组积分，得终端值 $X(t_f)$ 及 $\lambda(t_f)$，与给定 $\lambda(t_f)=0$ 比

较，再对第一次试猜的 $\lambda(t_0)=\lambda_0$ 进行修正。重新积分，直到满足给定的边界条件为止。这种方法的缺点是，伴随方程顺时间求解可能会不稳定，并且计算也较复杂。

2． 控制函数迭代法

先试猜一个控制函数 $U(t)$，顺时间求解状态方程，将解 X 存储在计算机中，然后用已知状态 X 代入伴随方程，逆时间求解 λ，将解 λ 存入计算机内。由第一次迭代得到的 X、λ，代入控制方程，修正 U，再用上法进行第二次迭代，直到 U 收敛到最优值，这种算法是对伴随方程逆向求解，所以算法稳定。

三、哈密顿函数为极值的充分及必要条件

对哈密顿函数可从力学角度做物理解释。设有力学系统如图9—16。

系统的动能为：

$$W=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

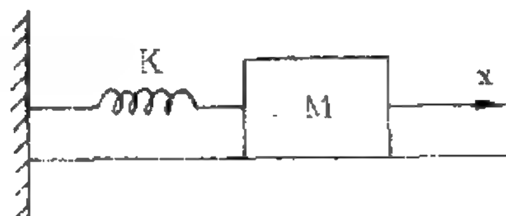


图 9—16 力学系统

弹簧储能为：

$$P=\int_0^x kx\,dx=\frac{1}{2}kx^2$$

令 H 表示系统的总能量：

$$H=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{9-63}$$

动量 $\dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$

从力学系统和控制系统的相似性，可知：

状态变量 X 相当于广义坐标，则 $\dot{X}=f(X,U,t)$ 即为广义速度，

$H=L+\lambda^T f$ 表示广义能量， $\dfrac{\partial H}{\partial \dot{X}}=\lambda$ 表示广义动量。

从控制系统角度看，λ 的物理意义是目标函数对约束条件变化的灵敏度。我们可证明如下：

已知 $F = H - \lambda^T \mathbf{f} = H - \lambda^T \dot{X}$

设已求得最优控制使 $F = F_{\min}$

则 $H = F_{\min} + \lambda^T \mathbf{f}$

$$dH = dF_{\min} + \lambda^T d\mathbf{f} + \mathbf{f}^T d\lambda$$

又 $$dH = \frac{\partial H^T}{\partial X} dX + \frac{\partial H^T}{\partial U} dU + \frac{\partial H^T}{\partial \lambda} d\lambda$$

当 $F = F_{\min}$ 时，$\dfrac{\partial H}{\partial X} = 0$，$\dfrac{\partial H}{\partial U} = 0$

$$\therefore \qquad dF_{\min} + \lambda^T d\mathbf{f} + \mathbf{f}^T d\lambda = \frac{\partial H^T}{\partial \lambda} d\lambda$$

设现在由于状态参数有变化使 $d\mathbf{f} = \varepsilon$

则 $$dF_{\min} = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \mathbf{f} \right)^T d\lambda - \lambda^T \varepsilon = -\lambda^T \varepsilon$$

或 $$\frac{dF_{\min}}{df_i} = \frac{dF_{\min}}{\varepsilon_i} = -\lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n_c \qquad (9\text{-}64)$$

第 i 个伴随函数 λ_i 就是 $F_{\min}$ 对第 i 个状态方程约束变化的负敏感程度，如果这个系数越小，表示系统抗干扰能力越强。

(9—64) 式说明 λ 是目标函数 F 对状态方程这一等式约束变化的灵敏度。

使哈密顿函数为极值的必要和充分条件可推导如下：

必要条件：

$$-\frac{\partial H}{\partial X}=\dot{\lambda} \text{ 或 } -\nabla_X H=\dot{\lambda} \tag{9-65}$$

$$\frac{\partial H}{\partial U}=\frac{\partial L}{\partial U}+\frac{\partial}{\partial U}\lambda^T f=0\text{，或 }\nabla_U H=0 \tag{9-66}$$

式中

$$\nabla_U H=\left[\frac{\partial H}{\partial u_1},\ \frac{\partial H}{\partial u_2},\cdots,\frac{\partial H}{\partial u_m}\right]^T \tag{9-67}$$

$$\nabla_X H=\left[\frac{\partial H}{\partial x_1},\ \frac{\partial H}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right]^T \tag{9-68}$$

充分条件：

除（9—65）、（9—66）式以外，还应包括以下两条件：

若 $\delta^2 J'>0$，得泛函 J' 极小值，

若 $\delta^2 J'<0$，得泛函 J' 极大值。

J' 由（9—49）式决定。

令 $\triangle J'=J'(X+\delta X,\ U+\delta U)-J'(X,\ U)$

按泰勒级数将 $\triangle J'$ 展开得

$$\triangle J'=\delta J'+\delta^2 J'+\cdots \tag{9-69}$$

$$\delta^2 J'=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\delta X,\delta U]\begin{bmatrix}H_{XX} & H_{UX}\\ H_{UX} & H_{UU}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta X\\ \delta U\end{bmatrix}dt \tag{9-70}$$

则 J' 为极小的充分条件为：

矩阵 $\begin{bmatrix}H_{XX} & H_{UX}\\ H_{UX} & H_{UU}\end{bmatrix}$ 为正定

$$H_{XX}=\frac{\partial^2 H}{\partial X^2},\quad H_{UU}=\frac{\partial^2 H}{\partial U^2},\quad H_{UX}=\frac{\partial^2 H}{\partial U\partial X}。$$

四、最优控制问题计算举例

用哈密顿方法求最优控制的步骤如下：

1. 由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial U}=0$，求 $U^*=U(X,\lambda)$。

2. 将 U^* 代入正则方程，解两点边值问题，得 $X^*(t)$，$\lambda^*(t)$。

3. 将 X^*，λ^* 代入 U 得 $U^*(t)=U[X^*(t),\lambda^*(t)]$。

[例 1] 小车问题（图 9—17）。

质量为 M 的小车，在水平轨道上运动，开始时处于停止状态，速度 $V_0=0$。忽略摩擦，要求在 $t=t_f(t_f\to\infty)$ 时小车速度为 V_f，（固定终端）。求控制规律 $F(t)$，$F(t)$ 为外力，使

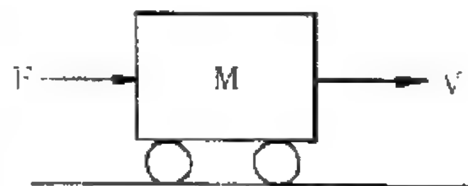


图 9—17 小车问题

$$\min J=\int_0^{t_f}[F^2+\alpha(V_f-V)^2]\,dt$$

α 为加权因子，上式表示令速度误差及控制能量为极小。这是拉格朗日问题。

状态方程 $\dot{V}=\frac{F}{M}$

解：F 是控制变量，V 为状态变量，

$$H=F^2+\alpha(V_f-V)^2+\frac{F}{M}\lambda$$

1. 由控制方程 $\frac{\partial H}{\partial F}=0$，得 $F^*(t)=-\frac{\lambda(t)}{2M}$

2. 解两点边值问题

$$\dot{V}=\frac{F}{M}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial V}=2a(V_f-V)$$

得 $$\frac{d^2\lambda}{dt^2}=-2a\dot{V}=-2a\frac{F}{M}=\frac{a\lambda}{M^2}$$

解出 $$\lambda=c_1e^{pt}+c_2e^{-pt}$$

$$p=\sqrt{\frac{a}{M^2}}$$

由边界条件 $t=0$ $V=0$， $t=t_f$ $V=V_f$，

又 $t=t_f$ 时，$F^*=0$，故 $\lambda(t_f)=0$，求 c_1，c_2。得

$$c_1=0, \quad c_2=-2\sqrt{a}MV_f$$

$$\lambda^*(t)=-2\sqrt{a}MV_fe^{-pt}$$

3． 求最优速度函数

由 $\dot{\lambda}=2a(V_f-V)$ 将 $\lambda^*(t)$ 代入可得

$$V^*=V_f(1-e^{-pt})$$

4． 于是得最优控制规律（加外力作用的规律）

$$F^*(t)=-\frac{\lambda}{2M}=\sqrt{a}V_fe^{-pt}, \quad p=\sqrt{\frac{a}{M^2}}$$

这是按指数曲线下降的规律，用开环程序控制即可保证。如图 9—18。

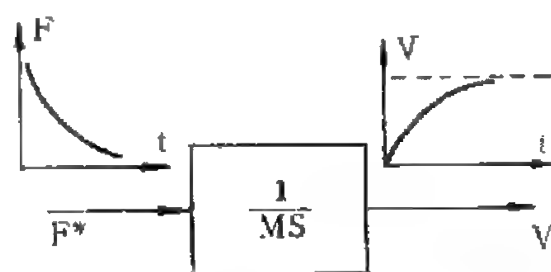


图 9—18 小车问题最优控制解

为了克服干扰影响，可以用闭环负反馈控制，令 $t=0$ 时，小车有一定速度 V。

则 $$c_2 = -2\sqrt{a}\,M(V_f - V)$$

$$\lambda^*(t) = -2\sqrt{a}\,M(V_f - V)e^{-pt}$$

$$F^*(t) = -\frac{\lambda^*(t)}{2M} = (V_f - V)\sqrt{a}\,e^{-pt}$$

$$= K(t)(V_f - V)$$

于是最优控制为状态负反馈，随时测量状态 $V(t)$，以确定应有的控制变量 $F(t)$，最优控制的框图如图 9—19。

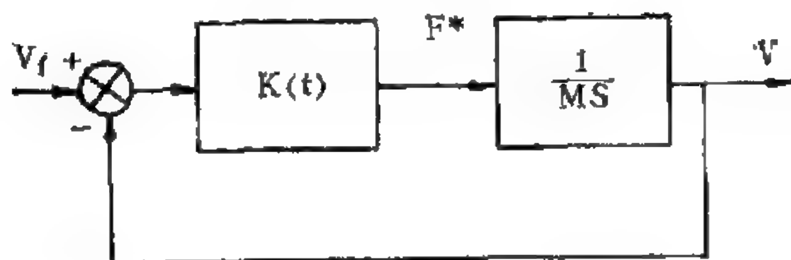


图 9—19 小车问题闭环最优控制

[例 2] 线性系统的最小控制能量问题

已知线性系统由两个积分环节组成（如图 9—20）。

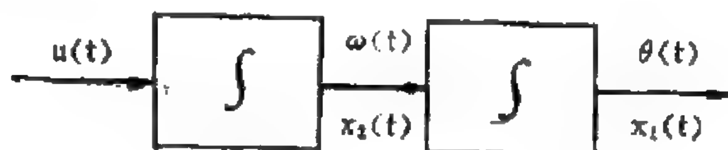


图 9—20 线性系统举例

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t), \qquad \dot{\omega}(t) = u(t)。$$

求 $u(t)$，使控制能量为最小，即

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$$

已知 $t=0$ 时，
$$\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$t=1$ 时，
$$\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

解：为了便于分析计算，将系统写成标准状态方程的形式。

令 $\qquad x_1(t)=\theta(t),\qquad x_2(t)=\omega(t)=\dot{x}_1(t)$

则
$$\dot{X}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$=AX+Bu$$

$$J'=\int_0^1\left[\frac{1}{2}u^2+\lambda^T(AX+Bu-\dot{X})\right]dt$$

$$H(X,\ \lambda,\ u,\ t)=\frac{1}{2}u^2+\lambda^T(AX+Bu)$$

$$=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0,\quad u=-\lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0$$

$$\dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1$$

解得
$$\begin{cases}\lambda_1=c_1\\ \lambda_2=-c_1t+c_2\\ u=c_1t-c_2\end{cases}$$

由状态方程 $\dot{x}_2 = u$

解得 $x_2 = \frac{c_1 t^2}{2} - c_2 t + c_3$

$$x_1 = \frac{1}{6} c_1 t^3 - \frac{1}{2} c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

用边界条件 $t = 0$，$X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$t = 1, \quad X(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

代入求得积分常数 $c_3 = 1$，$c_4 = 1$，$c_1 = 18$，$c_2 = 10$。

于是最优控制为

$u^*(t) = 18t - 10$，如图 9—21。

最优轨线为

$$x_2^* = \omega^*(t) = 9t^2 - 10t + 1$$

$$x_1^* = \theta^*(t) = 3t^3 - 5t^2 + t + 1$$

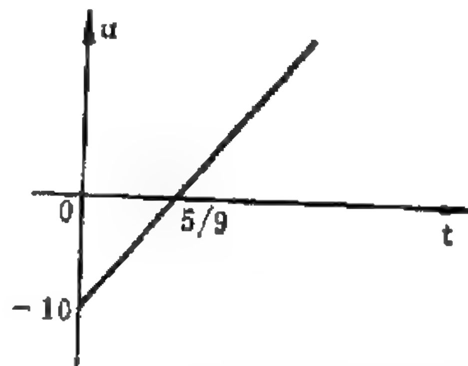


图 9—21　例 2 的最优控制解

[例 3]　问题同例 2，只是终端 $\omega(1)$ 自由，而 $\theta(1) = 0$。

解：正则方程组及控制方程均与上例相同。但边界条件

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1$$

$$x_1(1) = 0, \quad \lambda_2(1) = 0$$

$$c_1 = c_2 = 6, \quad c_3 = c_4 = 1。$$

解得 $x_1^*(t) = t^3 - 3t^2 + t + 1$

$$x_2^*(t) = 3t^2 - 6t + 1$$

$$u^*(t) = 6(t-1)$$

图 9—22 表示最优控制及最优轨线。

由例 2 例 3 可见，两个相同的问题，只是部分终端状态不同，最优解结果完全不同。

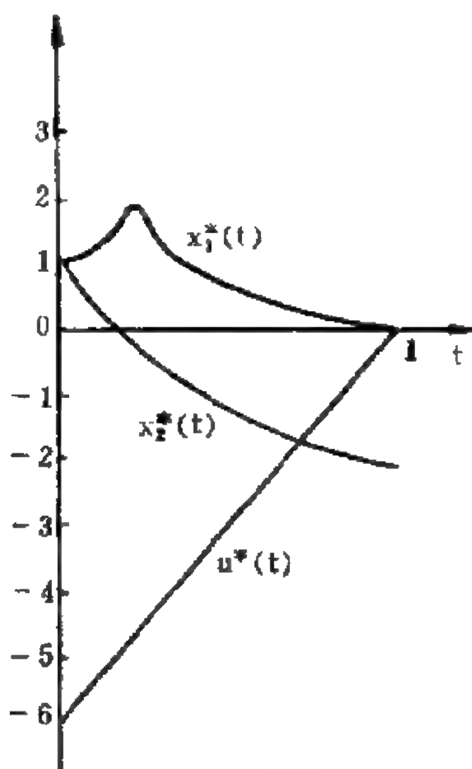


图 9—22 例 3 的最优解

五、用变分法求解波尔查型最优控制问题

前面我们分析讨论了用变分法求解拉格朗日型最优控制问题，在指标泛函中没有对终端提出要求，现在我们讨论更一般的最优控制问题，即波尔查问题。

$$\min\ J(U) = \theta[X(t_f),\ t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(X,\ U,\ t)dt \tag{9—71}$$

$$\dot{X} = \mathbf{f}(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0) = X_0$$

终端边界条件分三种情况讨论：

(1) 终端自由，t_f 给定。

这种情况下增广泛函为：

$$J'(U) = \theta[X(t_f),\ t_f] + \int_{t_0}^{t_f} (H - \lambda^T \dot{X})dt$$

$$= \theta[X(t_f),\ t_f] + \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\lambda}^T X)dt - \lambda^T X\Big|_{t_0}^{t_f} \tag{9-72}$$

$$\delta J' = \left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^T \Bigg|_{t=t_f} \delta X(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T \delta U + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T \delta X + \dot{\lambda}^T \delta X \right] dt - \lambda^T \delta X \Bigg|_{t_0}^{t_f}$$

令 $$\delta J' = 0$$

则得（9—71）式为极小的必要条件：

1. $$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \tag{9-73}$$

2. $$\frac{\partial H}{\partial X} = -\dot{\lambda}$$

3. $$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{X} = f(X, U, t)$$

又由于 $\delta X(t_0) = 0$，

4. $$\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial X}\Bigg|_{t=t_f}$$

（2）终端状态有约束，t_f 给定

终端约束为 $N[X(t_f), t_f] = 0$，设有 r 个，$N = [N_1, N_2, \cdots N_r]^T$。在构造增广泛函时应考虑这一约束，引入拉格朗日乘子向量 μ，$\mu = [\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r]^T$。于是增广泛函为

$$J'(U) = \theta[X(t_f), t_f] + \mu^T N \Bigg|_{t=t_f} + \int_{t_0}^{t_f} (H - \lambda^T \dot{X}) dt \tag{9-74}$$

$$J'(U) = [\theta + \mu^T N - \lambda^T X]_{t=t_f} + \lambda^T X \Bigg|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f} (H + \dot{\lambda}^T X) dt \tag{9-75}$$

对 X 和 U 分别取变分

$$\delta J'(U) = \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)^T + \left(\mu^T \frac{\partial N}{\partial X^T}\right) - \lambda^T\right]\delta X \Big|_{t=t_f}$$

$$+ \lambda^T \delta X \Big|_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T \delta U\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)^T \delta X + \dot{\lambda}^T \delta X\right] dt \qquad (9\text{-}76)$$

上式中 $\delta X(t_0)=0$，令 $\delta J'(U)=0$，得极值必要条件：

$$\left.\begin{aligned}
&1.\quad \frac{\partial H}{\partial U}=0\\
&2.\quad \frac{\partial H}{\partial X}=-\dot{\lambda}\\
&3.\quad \dot{X}=\mathbf{f}(X,\ U,\ t)\\
&4.\quad \lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial X}+\left(\frac{\partial N^T}{\partial X}\right)\mu\right]_{t=t_f} \text{[注]}\\
&5.\quad \text{原终端约束 } N[X(t_f),\ t_f]=0
\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}77)$$

(3) 终端有约束，t_f 自由

约束方程为 $N[X(t_f),\ t_f]=0$。例如最优时间控制问题，要求系统状态在最短时间内从初始值到达原点，而 t_f 未规定。则终端约束方程为

$$N[X(t_f),\ t_f] = X(t_f) = 0。$$

这种情况下，增广泛函和（9—75）式相同。这时不仅有最优控制和最优轨线，还有最优终端时间，取（9—74）式全导数

[注] $\left[\mu^T \dfrac{\partial N}{\partial X^T}\right]^T = \left[\dfrac{\partial N}{\partial X^T}\right]^T \mu = \dfrac{\partial N^T}{\partial X}\mu$

$$\left.\frac{dJ'}{dt}\right|_{t=t_f}=0,$$

得：

$$\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial X}\right)^T\dot{X}+\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mu^T\left(\frac{\partial N}{\partial X^T}\right)\dot{X}\right.$$

$$\left.+\mu^T\frac{\partial N}{\partial t}+H-\lambda^T\dot{X}\right]_{t=t_f}=0 \tag{9-78}$$

已知 $$\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial X}+\left(\frac{\partial N^T}{\partial X}\right)\mu\right]_{t=t_f} \tag{9-79}$$

或 $$\lambda_i(t_f)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{r}\mu_j\frac{\partial N_j}{\partial x_i}\right]_{t=t_f}$$

由（9—78），（9－79）式得

$$\left[H+\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mu^T\frac{\partial N}{\partial t}\right]_{t=t_f}=0 \tag{9-80}$$

（9—80）式和（9—77）式一起构成了这个最优控制问题的最优解必要条件。（9—80）式称为横截条件。下面分析沿最优轨线的哈密顿函数。

$$H=H(X,U,\lambda,t)=L(X,U,t)+\lambda^T\mathbf{f}$$

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^T\dot{U}+\left(\frac{\partial H}{\partial X}+\dot{\lambda}\right)^T\mathbf{f} \tag{9-81}$$

如果是最优控制，则应满足下述关系

$$\frac{\partial H}{\partial U}=0,\quad \frac{\partial H}{\partial X}=-\dot{\lambda}$$

由（9—81）式可得

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t},\quad H=H(X^*,\ U^*,\ \lambda,\ t) \tag{9-82}$$

若 H 不显含 t，则 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，

$$H=H(X^*,\ U^*,\ \lambda,\ t)=\text{常数} \tag{9-83}$$

即如果 $L(X,\ U,\ t)$ 及 $f(X,\ U,\ t)$ 不显含变量 t，对于最优控制 $U^*(t)$，t 在 $[t_0,\ t_f]$ 内，函数 H 是不依赖于时间变量 t 的常数，这是无约束最优控制问题（控制变量不受约束）极小值原理的基本结果。

[例] 最优时间控制问题中

$$N[X(t_f),\ t_f]=X(t_f)=0,\quad J=t_f,\quad t_0=0$$

$$\theta[X(t_f),\ t_f]=t_f,\quad L=0$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{t_f}=1,\quad \left.\frac{\partial N}{\partial t}\right|_{t_f}=0$$

由（9—80）式 $H(t_f)=-1$，为常数值。

如果 θ 及 N 不依赖于时间 t，

则 $$\frac{\partial\theta}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial N}{\partial t}=0$$

由（9—80）式 $H(t_f)=0$，但由（9—83）式 $H(X^*,\ U^*,\ \lambda,\ t)=$常数。

∴ 得 $$H(X^*,\ U^*,\ \lambda,\ t)=0 \tag{9-84}$$

六、计算举例—线性系统最小能量控制

$$\min\ J(u)=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$$

系统由两个积分环节组成

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

$$X(0)=0$$

终端约束 $\quad N=x_1(1)+x_2(1)-1=0$

本例中 $\theta=0$， $\quad J'=\mu N+\frac{1}{2}\int_0^1(H-\lambda^T\dot{X})dt$

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$$

由必要条件得正则方程组及边界条件[公式（9—77)]

$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$ 边界条件 $x_1(0)=0$

$\dot{x}_2(t)=u(t)=-\lambda_2(t)$ $\quad x_2(0)=0$

$\dot{\lambda}_1(t)=0$ $\quad \lambda_1(1)=\mu\frac{\partial N}{\partial x_1}=\mu$

$\dot{\lambda}_2(t)=-\lambda_1(t)$ $\quad \lambda_2(1)=\mu\frac{\partial N}{\partial x_2}=\mu$

解得 $\lambda_1=c_1$ 积分常数 $c_1=\mu$

$\lambda_2=-c_1t+c_2$ $\quad c_2=2\mu$

$x_2=\frac{1}{2}c_1t^2-c_2t+c_3$ $\quad c_3=0$

$x_1=\frac{1}{6}c_1t^3-\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4$ $\quad c_4=0$

由终端约束 $x_1(1)+x_2(1)=1$，求得 $\mu=-\frac{3}{7}$

∴ 最优轨线 $x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2$

$$x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

最优控制 $u^*(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$。

七、边界条件总结

设问题为 $\min\ J(u) = \theta[X(t_f),\ t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(X,\ U,\ t)dt$

$$\dot{X} = f(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0) = X_0$$

终端约束为 $N[X(t_f),\ t_f] = 0$

几种不同情况的边界条件如下表

问　题	举　例	边界条件
1. 终端固定	x_2, X_f, X_0, x_1	$N = X(t_f) - X_f = 0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial\theta}{\partial X}\Big\|_{t_f} + \mu$
2. 终端自由，t_f 给定	x, X_0, t_f, t	$N = 0$ $\lambda(t_f) = \frac{\partial\theta}{\partial X}\Big\|_{t_f}$

问　题	举　例	边界条件
3. 终端部分固定，部分自由		$x_1(t_f)=c$，$x_2(t_f)$ 自由 $\lambda_1(t_f)=\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\Big\|_{t_f}+\mu$ $\lambda_2(t_f)=\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\Big\|_{t_f}$
4. 终端有约束，$N[X(t_f),t_f]=0$ t_f 给定。	$N=x_1(t_f)+x_2(t_f)-1=0$	$N[X(t_f),\ t_f]=0$ $\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial X}+\left(\frac{\partial N^T}{\partial X}\right)\mu\right]_{t_f}$
5. 终端有约束，$N[X(t_f),t_f]=0$ t_f自由。		$N[X(t_f),\ t_f]=0$ $\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial X}+\left(\frac{\partial N^T}{\partial X}\right)\mu\right]_{t_f}$ $\left[H+\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial N^T\mu}{\partial t}\right]_{t_f}=0$

状态向量 X 和伴随向量 λ 的边界值关系中有一个很有趣的现象，值得注意。

由（9—54）式已知边界条件为

$$\lambda^T\delta X\Big|_{t_0}^{t_f}=0$$

1. 当始端固定时，$X(t_0)=X_0$，$\delta X(t_0)=0$.

则 $\lambda^T\delta X\big|_{t_0}=0$，$\lambda(t_0)$ 为任意值。因此 $X(t_0)$ 在 X 空间固定取值时，$\lambda(t_0)$ 可在 λ 空间任意取值，不受限制。当终端固定

时，上述结论也可应用，即 $\lambda(t_f)$ 可在 λ 空间任意取值。

2． 当终端自由时，$X(t_f)$ 可在 X 空间任意取值，则 $\delta X(t_f)\neq 0$，这时分两种情况：

a． 如果 $\theta[X(t_f), t_f]=0$，而且没有终端约束。

则 $\lambda(t_f)=0$，$\lambda(t_f)$ 在 λ 空间不能任意取值。

b． 如果 $\theta\neq 0$，没有终端约束。

则
$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\theta}{\partial X(t_f)}$$

c． 如果 $\theta\neq 0$，有终端约束 $N[X(t_f), t_f]=0$

则
$$\lambda(t_f)=\left[\frac{\partial\theta}{\partial X}+\frac{\partial N^T}{\partial X}\mu\right]_{t=t_f}$$

［例］ 设 $X(t_0)$ 的约束为：

$$x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)=1$$

$X(t_f)$ 的约束为：

$$x_1(t_f)-x_2(t_f)=3,$$

见图 9—23。

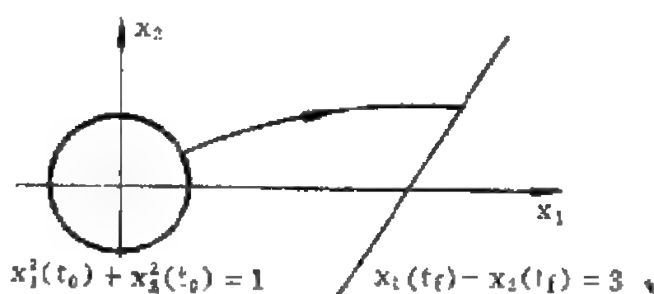


图 9—23 始端和终端都有约束

设 $\theta=0$ 则 $X(t_0)$ 和 $X(t_f)$ 在 X 空间都不是固定取值，$\lambda(t_0)$ 和 $\lambda(t_f)$ 在 λ 空间则要按下式取值（现在 $N_0=x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)-1$，$N_f=x_1(t_f)-x_2(t_f)-3$ 都是标量函数）：

$$\lambda(t_0)=\mu_0\frac{\partial N_0}{\partial X}=\mu_0\begin{bmatrix}2x_1(t_0)\\2x_2(t_0)\end{bmatrix},$$

$$\lambda(t_f)=\mu_f\frac{\partial N_f}{\partial X}=\mu_f\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}。$$

μ_0，μ_f 也是标量。

§ 9-6 连续控制系统最优化问题的数值计算（直接法）

一、参数最优化方法

将控制变量函数参数化，是求最优控制问题近似解的最简单方法，这种方法虽然实际应用较少，但是可以使人们从中受到启发。

［例］ 设最优化问题是

$$\min\ J(u)=10x_f^2+\int_0^{0.5}(10x^2+u^2)dt$$

$10x_f^2$ 是终端指标，$x_f=x(0.5)$

系统是非线性的， $\dot{x}=-0.2x+10\text{tg}h\ u$

$$x(0)=5,\quad t_f=0.5$$

设 $u(t)$ 是 $[0,\ 0.5]$ 区间内有界函数，并可表示成如下形式：

$$u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i g_i(t)$$

$g_i(t)$ 是函数集 $u(t)$ 的第 i 个元，不同 i 的 $g_i(t)$ 是线性无关的。用有穷级数逼近 $u(t)$ 例如取

$$u(t)=a_1+a_2t+a_3t^2$$

调整 a_1，a_2，a_3，使 J 为最小，这种求解动态最优控制问题的方法称为参数化方法。

这时 J 是 a_1、a_2、a_3 三个参数的函数，用计算机进行数值计算，这是三维函数的极小化问题。

用共轭方向法所得计算结果如下表：

迭代次数	a_1	a_2	a_3	J
0	−3	6	0	49.898
1	−3.412	4.975	0.341	41.891
2	−2.835	4.756	−2.754	41.685
3	−2.888	4.756	−3.121	41.633
4	−2.879	4.717	−3.154	41.632
5	−2.730	3.875	−1.970	41.625
6	−2.764	3.091	0.198	41.606
7	−2.596	1.494	3.159	41.596
8	−2.591	1.407	3.322	41.596
9	−2.591	1.406	3.329	41.596

图 9—24 表示用参数化方法所得近似的 $u(t)$，用下面所述的共轭梯度法所得最优解与参数化方法的解很相近。

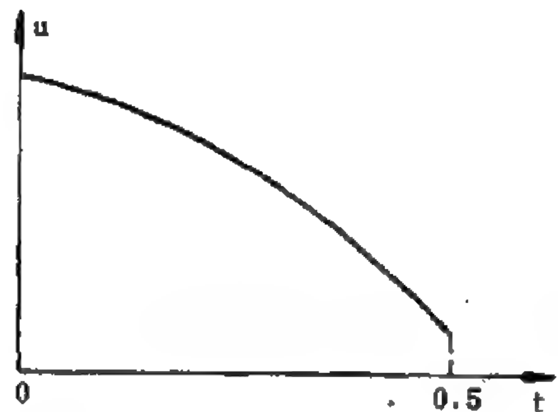


图 9—24 参数最优化方法求解结果

二、梯度法

梯度法是直接求解最优控制问题的一种有效方法。设问题为：

$$\min J(U)=\theta[X(t_f),\ t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L(X,\ U,\ t)dt$$

$$\dot{X}=\mathrm{f}(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

终端自由，t_f 给定。

梯度法求解最优控制的计算步骤如下：

1． 设定初始控制 $U^0(t)$，一般凭经验进行，选取时应注意系统中控制变量的物理意义，选择得合适可以加速迭代过程的收敛性。

2． 以 $X(t_0)$ 为初值，在已知 $U^0(t)$ 时，从 t_0 到 t_f 正向积分状态方程组 $\dot{X}=f(X, U, t)$，得 $X^0(t)$，同时计算 $J[U^0(t)]$，$X^0(t)$ 为第一次迭代计算所得状态轨线。

3． 由已知 $\lambda(t_f)$ 值对伴随方程组 $\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial X}$ 从 t_f 到 t_0 反向积分，得 $\lambda^0(t)$，它是第一次迭代计算所得伴随函数。计算

$$\left.\frac{\partial H[X^0、U^0、\lambda^0、t]}{\partial U}\right|_{U=U^0}$$

4． 令泛函梯度 $\nabla J[U^0(t)]=\left.\frac{\partial H}{\partial U}\right|_{U^0}$，$U^0$ 为第1次迭代计算所取的控制变量，从 $U^0(t)$ 出发，用 $-\nabla J(U^0)$ 作为下一步寻优搜索方向，得：

$$U^1(t)=U^0(t)-\alpha^0\nabla J(U^0)$$

α^0 为最优步长参数，$\alpha^0>0$，或者取固定值，或者由一维搜索法确定。

5． 以 $U^1(t)$ 代替 $U^0(t)$，重复上述做法，迭代公式为

$$\nabla J[U^k(t)]=\frac{\partial H[X^k, U^k, \lambda^k, t]}{\partial U} \tag{9-85}$$

$$U^{k+1}(t)=U^k(t)-\alpha^k\nabla J[U^k(t)] \quad k=0, 1, 2, \cdots \tag{9-86}$$

6． 判断收敛性，设 $\varepsilon>0$ 为给定的允许误差范围，当

$$\left|\frac{J[U^{k+1}(t)]-J[U^k(t)]}{J[U^{k+1}(t)]}\right|<\varepsilon \tag{9-87}$$

时，计算结束。

由于梯度法只考虑了一阶梯度的信息，因此收敛慢，但是这种方法比较简单，也是一种有效的数值计算方法。

［例］ 三阶线性系统

$$\dot{x}_1 = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}u - x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - x_3$$

$$\min\ J(u) = \int_0^3 \left[(2x_2)^{2m} + x_3^2 + 0.01u^2\right]dt$$

初始边界条件 $x_1(0) = -0.6$，$x_2(0) = -0.6$，$x_3(0) = 4$。

解：因为终端自由，故

$$\lambda_i(3) = 0,\quad i = 1,\ 2,\ 3$$

$$H = (2x_2)^{2m} + x_3^2 + 0.01u^2 + \lambda_1\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}u - x_1\right) + \lambda_2(x_1 - x_2) + \lambda_3(x_2 - x_3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,\quad \text{则}\ 0.02u + \frac{2\lambda_1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+u^2} = 0$$

或
$$u^3 + u + \frac{\lambda_1}{0.01\pi} = 0$$

伴随方程组为
$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_2 - \lambda_3 - 2m(2x_2)^{2m-1}$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = \lambda_3 - 2x_3$$

设 $m = 10$，步长固定 $\alpha = 10$。首次近似取 $u^0(t) = 0$，图 9—25

表示用梯度法求解上述问题所得最优控制函数、最优轨线及最优伴随函数。20 次迭代结果见下表。

t	$u(t)$
0	9.26
0.3	2.777
0.6	−1.370
0.9	−1.097
1.2	−0.695
1.5	−0.263
1.8	0.049
2.1	0.121
2.4	0.072
2.7	0.014
3.0	0

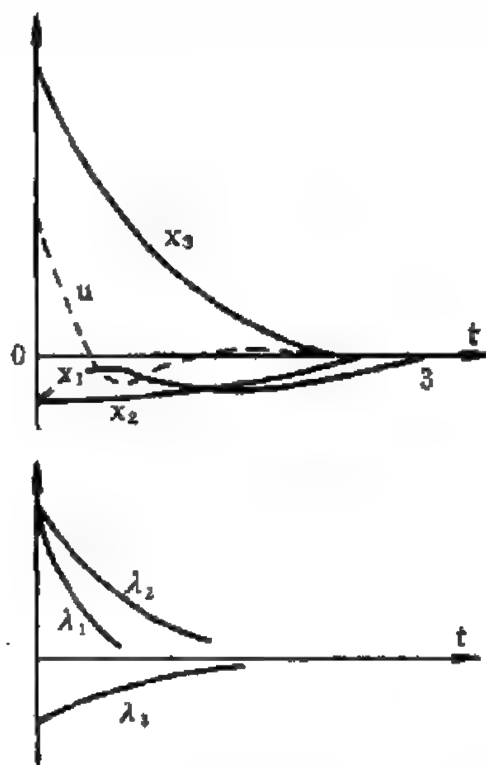


图 9—25 梯度法求三阶线性系统最优控制问题的解

三 共轭梯度法

共轭梯度法最早是用来求解线性代数方程组的一种方法，后来又用来求解无约束函数极值问题。60 年代初，推广到函数空间， 用来求解最优控制问题，共轭梯度法用以求解二次型泛函的最优控制问题较为有效。在收敛速度方面比梯度法快，但是具有梯度法的优点，如：计算程序简单，容易实现，计算可靠性较好。

计算步骤：

1. 给定初始控制函数 $U^0(t)$

2. 以 $X(t_0)$ 为初值，从 t_0 到 t_f 对状态方程积分，计算 $t=t_f$ 时指标泛函 $J(U^k)$，U^k 为第 $k+1$ 次迭代所取的控制函

数。

3. 由 t_f 到 t_0 反向积分伴随方程得 $\lambda^k(t)$，并计算

$$\nabla J(U^k)=\frac{\partial H}{\partial U}\Big|_{U_k}$$

4. 计算共轭系数

$$\beta^k=\frac{\|\nabla J^T[U^k(t)]\nabla J[U^k(t)]\|}{\|\nabla J^T[U^{k-1}(t)]\nabla J[U^{k-1}(t)]\|} \tag{9-88}$$

当 $k=0$ 时 $\beta^0=0$

5. 寻优方向

$$P^k=-\nabla J[U^k(t)]+\beta^k P^{k-1} \tag{9-89}$$

6. $$U^{k+1}(t)=U^k(t)+\alpha^k P^k \tag{9-90}$$

用一维搜索法求最优步长参数 α^k。

7. 判断是否满足是收敛条件（9—87）式，决定是否停机。

例 $$\min J(u)=\int_0^{0.5}(10x^2+u^2)dt+10x^2(0.5)$$

$$\dot{x}=-0.2x+10\mathrm{tg}h\,u$$

$$x(0)=5$$

这个例题已在参数化方法中引用过。

设第一次近似取 $u^0(t)=-0.5$

$$H=10x^2+u^2+\lambda(-0.2x+10\mathrm{tg}h\,u)$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=0.2\lambda-20x$$

$$\lambda(0.5)=\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big|_{t_f=0.5}=\frac{\partial}{\partial x}(10x^2)\Big|_{t_f=0.5}$$
$$=20x(0.5)$$

$$\nabla J(u)=\frac{\partial H}{\partial u}=10\lambda(1-\operatorname{tg}h^2u)+2u$$

$J(u)$ 的迭代计算结果如下表，和最速下降法比较，可见共轭梯度法收敛性好得多。但是对非线性系统，共轭梯度法也收敛得很慢。

迭代次数	J（共轭梯度法）	J（最速下降法）
0	123.4413	123.44
1	41.7625	53.02
2	41.6066	52.48
3	41.5960	51.96
4	41.5954	51.96
5	41.5953	50.98
12	41.5953	48.10
17	41.5953	46.48
30		43.50
40		42.10
50		41.64

四、变尺度法

变尺度法是 60 年代初期提出的求解 n 维向量空间中无约束多变量函数极值问题的一种算法，70 年代初期推广到函数空间求解最优控制问题。

计算步骤如下：

1. 选取初始控制函数 $U^0(t)$。

2. 第 $k+1$ 次迭代计算时，控制函数为 $U^k(t)$。

计算梯度 $\nabla J[U^k] = \left.\frac{\partial H}{\partial U}\right|_{U_k}$

3. 寻优方向 $P^k = -H^k \nabla J[U^k]$, (9-91)

H^k 为第 $k+1$ 步方向矩阵，第一步取 $H_0 = I$。

4. 令 $\triangle U^k(t) = U^{k+1}(t) - U^k(t)$, (9-92)

$\triangle g^k(t) = \nabla J[U^{k+1}] - \nabla J[U^k]$。 (9-93)

校正矩阵 $\triangle H^k = \frac{\triangle U^k[\triangle U^k]^T}{[\triangle U^k]^T \triangle g^k} - \frac{H^k \triangle g^k (\triangle g^k)^T H^k}{[\triangle U^k]^T H^k \triangle g^k}$ (9-94)

5. $H^{k+1} = H^k + \triangle H^k$ (9-95)

6. $U^{k+1}(t) = U^k(t) + \alpha^k P^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ (9-96)

用一维搜索求最优步长参数 α^k。

7. 检验（9—87）式是否满足收敛性要求以决定是否可以停机。

五、二阶变分法

求 n 维向量空间中多元函数极值问题有二阶梯度法（牛顿法）。与之相应，在函数空间中求解最优控制问题有二阶变分法。只要初始控制 $U_0(t)$ 选得较好，迭代程序是收敛的，而且收敛的速度相当快，二阶变分法的缺点是计算工作量大，对 $U^0(t)$ 要求比较苛刻。

二阶变分法的迭代公式可用求哈密顿函数的二阶变分导出，我们不加证明地引用其结果。

$U^{k+1}(t) = U^k(t) + \delta U^k(t)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$ (9-97)

$$\delta U(t) = -\left[\frac{\partial^2 H}{\partial U^2}\right]^{-1} \left[\frac{\partial H}{\partial U} + \frac{\partial^2 H}{\partial U \partial X}\delta X\right.$$

$$+\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial U}\right)^T \delta\lambda \Bigg]$$

$$= -H_{UU}^{-1}[H_U + H_{UX}\delta X + \mathbf{f}_U^T\delta\lambda]^{[注]} \quad (9\text{-}98)$$

计算步骤为：

1. 第 $k+1$ 次迭代的控制函数为 $U^k(t)$，
2. 从 t_0 到 t_f 对状态方程积分求出 $X^k(t)$，
3. 从 t_f 到 t_0 对伴随方程积分求出 $\lambda^k(t)$。
4. 计算 $\delta U^k(t)$。
5. 令 $U^{k+1}(t) = U(t) + \delta U^k(t)$ 直到满足（9—87）式为止。

本章小结

1. 变分法是研究泛函极值的有力工具。泛函极值的解法与多元函数求极值的方法类似。

2. 哈密顿方法求解最优控制的原理是：如果 U^* 为最优控制，则在 $t\in[t_0, t_f]$ 区间内，U^* 也是 $H(X, U, \lambda, t)$ 的极值函数。

3. 引入哈密顿函数 H 的意义是：将多变量动态系统最优化问题简化为多元函数极值问题，从而可求出最优控制的必要条件。

4. $H(X, U, \lambda, t) = L(X, U, t) + \lambda^T\mathbf{f}(X, U, t)$

[注] $\delta\lambda$ 由另一组正则方程解出：

$$\delta\dot{X} = B\delta X - C^T\delta\lambda + V$$

$$\delta\dot{\lambda} = -A\delta X - B^T\delta\lambda + W$$

式中 $B = \mathbf{f}_X - \mathbf{f}_U H_{UU}^{-1}H_{UX}^T$，$C = \mathbf{f}_U H_{UU}^{-1}\mathbf{f}_U^T$，

$A = H_{XX} - H_{XU}H_{UU}^{-1}H_{UX}^T$，$V = -\mathbf{f}_U H_{UU}^{-1}H_U$，

$W = H_{XU}H_{UU}^{-1}H_U$。

若 L 及 f 不显含 t，则对最优控制 $U^*(t)$ 说，$t\in[t_0, t_f]$，$H(X^*, U^*, \lambda, t)$ 是不依赖于 t 的常数值。若 t_f 自由，则 $H(X^*, U^*, \lambda, t)=0$，这是最优控制问题的基本结论。

5. 古典变分法只适用于对控制变量 U 没有约束的情况。问题的复杂性在于求解一组微分方程，属于两点边值问题，要用计算机反复求解。

附录 关于系统可控性和可观测性问题

如果所研究的系统是不可控的，则最优控制问题的解是不存在的，最优控制问题是求一个最优的控制向量，（该向量当然必须是可能存在的），使系统从任意初始状态 $X(t_0)$ 转移到状态空间中指定的某点，并使某个性能指标为极小。

在多变量最优控制系统中可控性和可观测性是最优控制问题解的存在性问题中最重要的两个问题，因为虽然大多数物理系统是可控的和可观测的，但是与系统相应的数学模型却很可能不具有可控和可观测的性质，因此必须明确可控性和可观测性的定义。

如果在一个有限的时间间隔内，可以用一个无约束的控制向量使系统由初始状态 $X(t_0)$ 转移到另一个状态，则称该系统为在时间 t_0 是可控的，如果在一个有限的时间间隔内，可以通过输出观测到系统的状态 $X(t_0)$，则称该系统为在时间 t_0 是可观测的。

关于线性系统的可控性及可观测性的条件可查阅任何一本现代控制理论的参考书，我们只叙述线性最优控制理论中的一个重要定理[25]，实质上它就是线性二次型最优控制问题解的基本结论。

定理

若线性系统 $\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t)$

$$Y(t)=CX(t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

是可控的和可观测的，则使下述性能指标

$$J=\int_0^{\infty}[X^T(t)QX(t)+U^T(t)RU(t)]dt$$

为极小的最优控制规律为全状态负反馈，即

$$U^*(t)=-KX(t)$$

K 为反馈增益阵。

而且上述最优闭环系统是渐近稳定的，有 60° 相位余量，有无穷大增益余量。

根据这一定理，可以利用李亚普诺夫稳定性定理（第二方法）来设计线性最优控制系统的参数，即先用李亚普诺夫函数表示系统的稳定条件，再以这些条件为约束求最优参数，详见 [31]。

习　　题

1． 求使下述泛函为极小的曲线方程 $x(t)$

$$J(x)=\int_0^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+x\dot{x}+\dot{x}+x\right)dt$$

设两端状态均为自由。

2． 求点 $x(0)=1$ 到直线 $t_f=2$ 之间的弧长为极值的曲线方程 $x(t)$，用二阶变分检验充分条件。

3． 求下述最优控制问题的横截条件：

$$\min J=\int_{t_0}^{t_f}F(X,\ \dot{X},\ t)dt$$

$$X(t_0)=X_0，\ X \text{ 为二维变量}$$

t_f 给定，$X(t_f)$ 应满足 $\|X(t_f)\|^2=1$ 的条件。

4． 设问题为：

$$\min \ J = \frac{1}{2}\int_0^2 u^2(t)dt$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = u(t)$$

已知 $\theta(0)=1$，$\dot{\theta}(0)=1$

$\theta(2)=0$，$\dot{\theta}(2)=0$

求最优控制函数及最优轨线。

5. $$\min \ J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0)=0$$

$$\dot{x}_2 = x_3, \quad x_2(0)=0$$

$$\dot{x}_3 = u, \quad x_3(0)=0$$

$$x_1^2(1)+x_2^2(1)=1。$$

求最优控制的必要条件。

6. 设有一 RC 积分电路，已知电路的输入电压 $v_i(t)$ 是宽度为 T 的方脉冲，现在希望在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 区间内输出（电容）电压$v_0(t)$ 的平均值为最大，即

$$\max \ J = \int_0^T \frac{v_0}{T} dt,$$

应满足的约束条件为：在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 区间内电阻上消耗的能量为常数 K，即

$$\int_0^T i^2(t)Rdt = K$$

$i(t)$ 为流过电阻 R 的电流。

已知 $t=0$，$v_0(0)=0$

$t=T$，$v_0(T)=V$. V 为常数。

求最优的 $v_0(t)$ 及 $v_i(t)$，并求 J 的最优值。

第十章 极大值原理及其应用

§ 10-1 极大值原理

上一章，我们叙述了古典变分法——哈密顿方法求解最优控制问题，讨论了横截条件。所有的结论都是在等式约束（例如系统的状态方程）下得到的。对于不等式约束的问题（例如对控制变量有约束，有时称为有约束的最优控制问题），也是先将不等式约束化成等式，再用同样方法求解。但是在多变量情况下，这种处理不等式约束的方法，使问题的求解过程十分复杂。

实际的物理系统，控制变量取值总是有一定的约束范围的，有时状态变量也可能受到一定限制，这些都构成了不等式约束。于是最优控制问题的数学模型应当用下述各式表示：

$$\min\ J=\theta[X(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L[X(t),\ U(t),\ t]dt \qquad (10—1)$$

$$\dot{X}(t)=f[X(t),\ U(t),\ t] \qquad (10—2)$$

$$X(t_0)=X_0 \qquad (10—3)$$

$U(t)\in R_U$，R_U 为m维欧氏空间的子集　　(10—4)

$$N[X(t_f),\ t_f]=0 \qquad (10—5)$$

其中（10—4）式是对控制变量取值范围的约束。最简单情况下可写作：$\alpha_i\leqslant u_i(t)\leqslant\beta_i$.

苏联庞特里亚金等人对这一问题从数学上做了严格的推导论证，得到更一般的求解最优控制问题的理论，称为极大值原理。

极大值原理的证明有许多不同的方法。本节先直接引用这一原理的主要结论。§10—7 中给出用庞特里亚金函数证明极大值原理的一种简单方法。

极大值原理说明，使指标泛函 J 为极小的控制必定使标量函数——哈密顿函数 H 为极大值。极大值原理给出了最优控制的必要条件，而不是充分条件，也即最优控制都满足极大值原理，但并非满足该原理的所有控制都是最优的。但是可以证明，对于线性系统，极大值原理既是泛函 J 取极小值的必要条件，也是充分条件。（证明见 §10—7）。

设 状态方程 $\dot{X}=f(X, U, t)$，$X\in E^n$

指标泛函 $J=\int_{t_0}^{t_f}L(X,U,t)dt$

或 $\dfrac{dJ}{dt}=L(X,U,t)$

状态变量有 n 个，即 x_1，x_2，…，x_n，为了得到指标泛函的一般形式，引入第 $n+1$ 个状态变量 $x_{n+1}(t)$，并令

$$x_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t}L(X,U,t)dt$$

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt}=\frac{dJ}{dt}=L(X,U,t)$$

则状态方程应为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\\ \dot{x}_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(X,U,t)\\ f_2(X,U,t)\\ \vdots\\ f_n(X,U,t)\\ L(X,U,t)\end{pmatrix}=F(X,U,t)$$

于是指标泛函 J 为

$$J=\int_{t_0}^{t_f} L(X, U, t)dt = x_{n+1}(x_f)$$

写成一般形式：

$$J=\sum_{i=1}^{n+1} b_i x_i(t_f) \qquad (10—6)$$

式中 $b_i=0$，$i=1$，2，…，n，$b_{n+1}=1$。

(10—6) 式称为庞特里亚金函数。

现在按照 (10—6) 式构造哈密顿函数，原来的积分项已消失，故哈密顿函数为：

$$H(X, U, \lambda, t,)=\lambda^T(t)F(X, U, t)$$

或 $$H=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots+\lambda_{n+1}L$$

式中 $\lambda(t)$ 为 $n+1$ 维伴随向量。

庞特里亚金曾证明最优控制的必要条件为

$$\lambda_{n+1}(t_f)=-1$$

此外还有两个主要结论是：

1. 控制向量 $U(t)$ 为最优的必要条件是：在$[t_0, t_f]$区间，$H_{max}=$常数。

2. 当终端时间自由，即 t_f 不固定时，在 $t=t_0$ 时刻

$$H_{max}=0$$

第二个结论常可用来检验所求出的最优控制是否满足必要条件。

如果将上述关于极大值原理的叙述改为：使指标泛函 J 为极小的控制必定使标量函数 H 为极小值，则极大值原理变成了极小值原理。事实上，只要在哈密顿函数中取 $\lambda(t)$ 的符号为负，使 $H=\lambda^T F$ 极大和使 $H=-\lambda^T F$ 极小并没有什么本质上的不同，以

下我们统称为极大值原理。

庞特里亚金极大值原理的另一种表述是：

如果最优控制问题的数学模型由（10—1）～（10—5）式表示，则哈密顿函数为

$$H(X, \lambda, U, t) = L(X, U, t) + \lambda^T f(X, U, t) \qquad (10—7)$$

在任何时刻对所有的容许控制 $U(t)$ 说

$$H(X^*, \lambda^*, U^*, t) \leqslant H(X^*, \lambda^*, U, t) \qquad (10—8)$$

或 $H(X^*, \lambda^*, U^*, t)$ 为 $H(X^*, \lambda^*, U, t)$ 的最大下界。

U^* 是所有容许控制中使 H 取最大下界的最优控制。

X^* 和 λ^* 分别表示最优状态向量（轨线）和最优伴随向量。

下述正则方程组也是最优控制的必要条件：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial X} \\ \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(X, U, t) \end{aligned}\right\} \qquad (10—9)$$

求解（10—9）式的边界条件为

$$X(t_0) = X_0 \qquad (10—10)$$

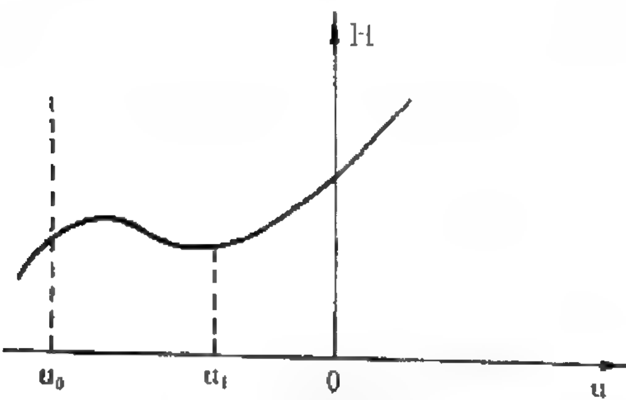
$$N[X(t_f), t_f] = 0 \qquad (10—11)$$

并有（见第九章（9—79）（9—80）式）：

$$\left.\begin{aligned} \lambda(t_f) &= \left[\frac{\partial \theta}{\partial X} + \left(\frac{\partial N}{\partial X}\right)^T \mu\right]_{t=t_f} \\ \left[H + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial N^T}{\partial t} \mu\right]_{t=t_f} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10—12)$$

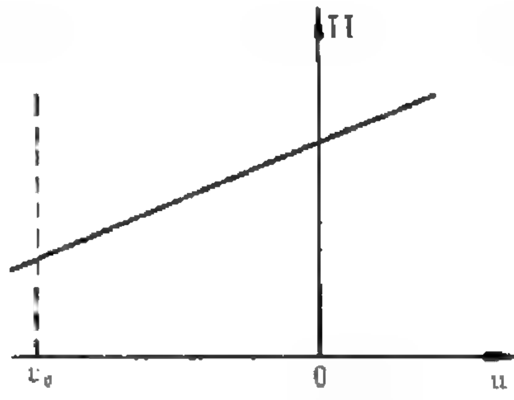
极大值原理是古典变分法解最优控制问题的推广。上一章，我们用古典变分法求解最优控制，得出控制变量不受约束时，最优控

制的必要条件为$\frac{\partial H}{\partial U}=0$，极大值原理用（10—8）式代替了这一条件，从而放宽了应用范围。



H（u）为非线性函数

图 10—1

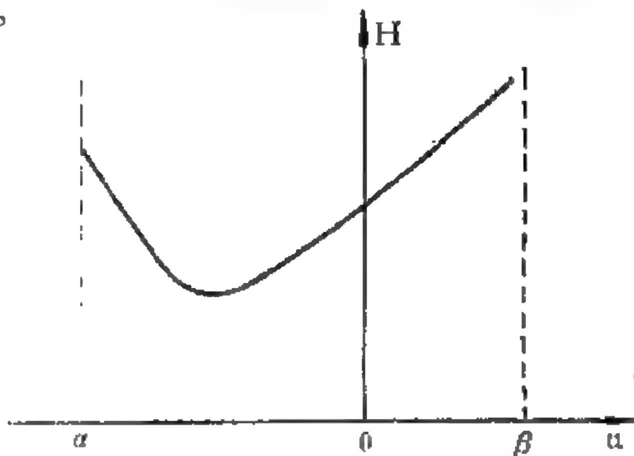


H（u）为线性函数

图 10—2

例如，图 10—1 表示在给定的时刻，函数 H 和 u 的关系，其中 $u \geqslant u_0$，用古典变分法求解这一问题时，令$\frac{\partial H}{\partial u}=0$，就会选择局部极小值 $u=u_1$，但是，根据极大值原理，却应该将 u 选在边界上，也即令 $u=u_0$。如果 $H(u)$为线性函数，如图 10—2，或者在容许控制范围内，$H(u)$ 是单调上升（或单调下降）的，则由极大值原理，最优控制仍应在边界上，$u=u_0$，但是用古典变分法却求不出解来，即$\frac{\partial H}{\partial u}=0$不再适用。

如果在容许控制范围内，H 有极值并且是唯一的，如图 10—3，则用极大值原理和用古典变分法求解所得结果是一致的。



在 $\alpha<u<\beta$ 范围内 H 极值是唯一的情况

图 10—3

［例］ $\min \quad J=\int_0^1 (x+u)dt$

$\dot{x}=x-u$

$x(0)=5$

$\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1$

解：1. $H = x + u + \lambda(x - u) = x(1+\lambda) + u(1-\lambda)$

2. H 是 u 的线性函数，根据极大值原理，求 H 极小相当于求泛函 J 极小，这只要使 $u(1-\lambda)$ 为极小即可。u 的上界为 1，下界为 $\frac{1}{2}$，因此：

当 $\lambda > 1$ 时，应取 $u^*(t) = 1$，

当 $\lambda < 1$ 时，应取 $u^*(t) = \frac{1}{2}$。

3. 求 $\lambda(t)$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(1+\lambda)$$

边界条件 $t_f = 1$，$\lambda(t_f) = 0$.

∵ $\theta = 0$，终端自由

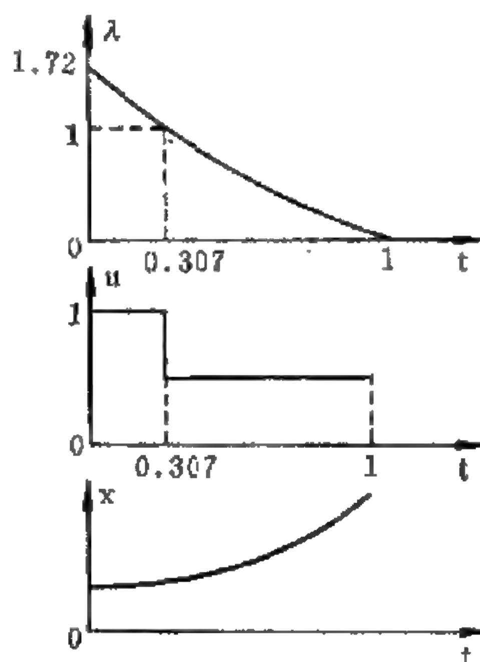
∴ $\lambda = e^{1-t} - 1$

$\lambda = 1$ 时，$t = 1 - \ln 2 \approx 0.307$，

$\lambda > 1$，即 $t < 0.307$，$u^* = 1$，

$\lambda < 1$，即 $t > 0.307$，$u^* = \frac{1}{2}$。

见图 10—4。



例 1 的图解

图 10—4

4. 求 $x^*(t)$

已知 $u^*(t)$，求解状态方程 $\dot{x} = x - u$，即得 $x^*(t)$。

(a) $0 \leqslant t < 0.307$ 时，$u = 1$

$\dot{x} - x = -1$ 令 $x = 1 + Ae^t$，考虑初始条件 $x(0) = 5$，故得：

$$x^*(t) = 4e^t + 1$$

(b) $0.307 < t \leqslant 1$ 时，$u = \frac{1}{2}$

由上式得 $x(0.307) = 6.437$，这是第二段的初始条件。解 $\dot{x} - x = \frac{-1}{2}$，得

$$x^*(t) = 4.369e^t + \frac{1}{2}$$

5. 求 $J^*(u)$

$$J^*(u)=\int_0^{0.307}(x+1)dt+\int_{0.307}^{1}(x+\frac{1}{2})dt$$

$$=\int_0^{0.307}(4e^t+2)dt+\int_{0.307}^{1}(4.369e^t+1)dt$$

$$=8.684$$

一般说，极大值原理给出的是 J 最小的必要条件，以后将证明（见本章 §7）对于线性系统，极大值原理给出的是必要充分条件。因此本例中，$J=8.684$ 就是给定条件下的 J 的极小值。

[例 2] $\min\ J(u)=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+u^2)dt$

$$\dot{x}=-x+u$$

$$x(0)=10$$

分两种情况求最优控制：

a） 对 u 没有约束

b） $|u(t)|\leqslant 0.3$

解 a） 原问题为自由终端状态，$\lambda(1)=0$。

$$H=\frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0,\quad u^*(t)=-\lambda(t)$$

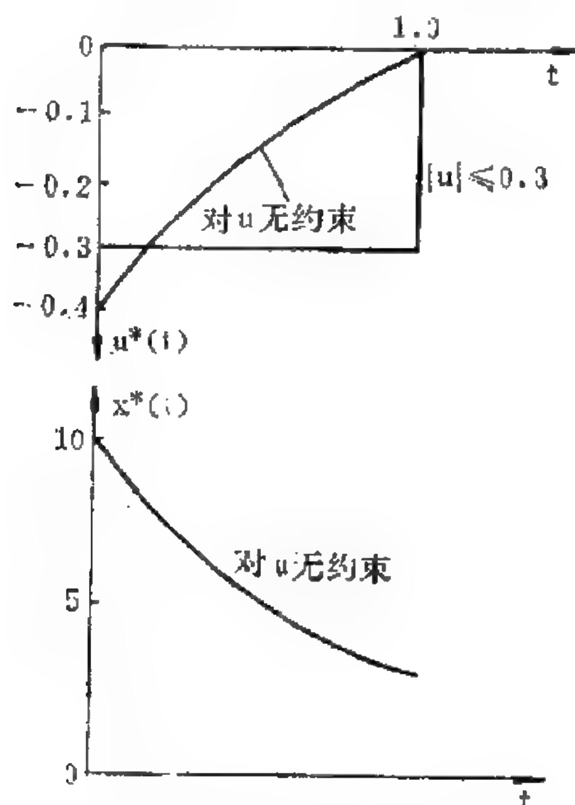
由正则方程 $\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-x+\lambda$

$$\dot{x}=-x+u=-x-\lambda$$

边界条件 $x(0)=10,\ \lambda(1)=0$

解得　$x^*(t)=0.1e^{\sqrt{2}t}+9.9e^{-\sqrt{2}t}$

$$\lambda(t)=-0.1(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}+9.9(\sqrt{2}-1)e^{-\sqrt{2}t}$$



例 2 的图解

图 10—5

b）由极大值原理，$u^*(t)$与 $\lambda(t)$ 符号有关，取 $u^*(t)=-0.3\text{sgn}\,\lambda(t)$，

sgn $\lambda(t)$ 表示 $\lambda(t)$ 的符号，[注]

$$t=1,\ \lambda=0,\ 取\ u^*(1)=0$$

在 [0, 1] 区间，$\lambda(t)>0$，

取 $u^*(t)=-0.3$。

图 10—5 表示求解结果。

[注]　sgn 为 sign 的缩写。

§ 10-2　时间最优控制问题

在叙述了极大值原理以后，我们要应用极大值原理来求解几个典型的最优控制问题。时间最优控制问题或最小时间问题是比较重要的一个问题，即希望在最短时间内，使系统从任意初始状态转移到状态空间原点，在容许控制范围内求最优控制。若系统是线性的，则时间最优控制问题的数学模型为：

$$\min\ J = t_f \tag{10—13}$$

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$X(t_0) = X_0,\quad t_0 = 0,$$

$$X(t_f) = 0 \quad t_f \text{ 自由。}$$

$$|u_j| \leqslant 1,\quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

如果将 $J = t_f$ 看作是积分型指标的特殊情况，即，$L = 1$，则 $J = \int_0^{t_f} L\,dt = \int_0^{t_f} dt = t_f$

$$H = 1 + \lambda^T(AX + BU) = 1 + \lambda^T AX + U^T B^T \lambda$$

$$= 1 + \lambda^T AX + \sum_{j=1}^{m} u_j \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\lambda_i \tag{10—14}$$

式中　$\lambda^T BU = U^T B^T \lambda$

根据极大值原理，要使 J 为极小，则应使 H 为极小，由（10—14）式可见，为使 H 极小，应满足下述条件：

$$u_j^* = -\operatorname{sgn} \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\lambda_i \tag{10—15}$$

或

$$U^* = -\operatorname{sgn}\ B^T\lambda \tag{10—16}$$

式中

$$\operatorname{sgn}\alpha=\begin{cases}+1, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -1, & \alpha<0\end{cases} \tag{10—17}$$

正则方程组为

$$\dot{X}=AX+BU$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial X}=-A^T\lambda \tag{10—18}$$

$$\lambda(t)=e^{-A^Tt}\lambda(t_0)=e^{-A^Tt}\lambda(0)$$

$$\therefore\quad U^*=-\operatorname{sgn}\ B^T\lambda=-\operatorname{sgn}\ [B^Te^{-A^Tt}\lambda(0)] \tag{10—19}$$

由此可见，时间最优控制是开关型控制（Bang-Bang 控制），要求控制变量始终为最大，而符号与 λ 相反，图 10—6 表示伴随变量、控制变量与状变态量间关系的框图，为了实现时间最优控制，需要一个理想继电器作为控制器。

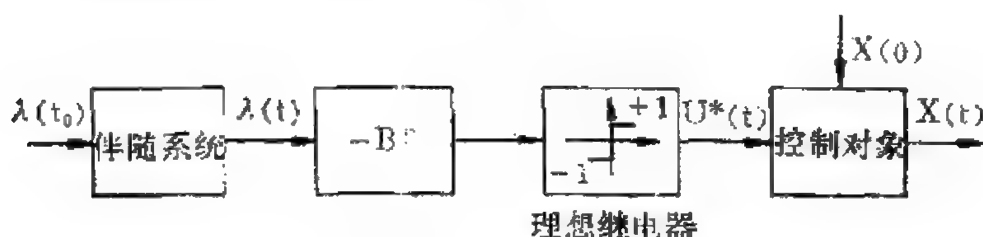


图 10—6　时间最优控制框图

已知 $\lambda(0)$，即可由（10—19）式求出 $U^*(t)$，但是实际上 $\lambda(0)$ 是不容易确定的，因为它还和系统的状态变量有关。用试探方法，先设一个 $\lambda(0)$，求出 $\lambda(t)$，然后检查 $X(t_f)$ 是否为零，如为零，则所求得的 $\lambda(t)$ 即为两点边值问题的解。

[例1]

$$\min\quad J=t_f$$

$$\dot{x}_1=x_2,\qquad x_1(0)=1,\qquad x_2(0)=1,$$

$$\dot{x}_2 = u, \qquad x_1(t_f) = 0, \qquad x_2(t_f) = 0$$

$$|u| \leqslant 1$$

求最优控制。

解：对象是二阶线性系统，由两个积分环节组成，如图 10—7。状态方程写成向量形式

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

H 与 u 的关系可用图 10—8 表示，当 λ_2 一定时这是一条直线，H 为极小的条件是 $u^* = -\operatorname{sgn}\lambda_2$。

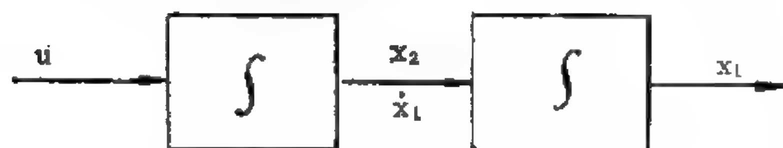


图 10—7 二阶线性系统

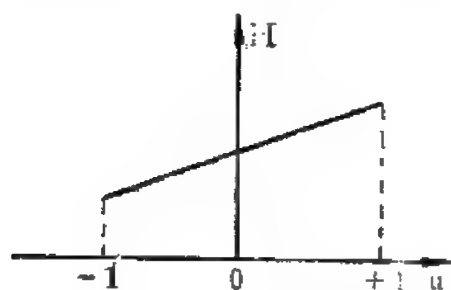


图 10—8 $H(u)$ 为线性

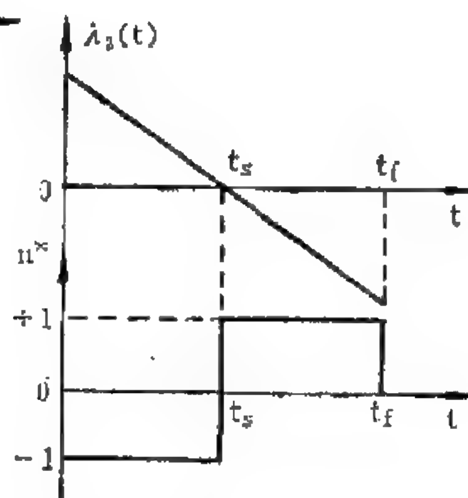


图 10—9 二阶线性系统时间最优控制

正则方程组为

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u^* = -\mathrm{sgn}\lambda_2$$

图 10—9 表示 $\lambda_2(t)$及相应的 $u(t)$，当 $\lambda_2>0$ 时，$u=-1$，当 $\lambda_2<0$ 时，$u=+1$。

λ_1 及 λ_2 的解为 $\lambda_1(t)=c_1$

$$\lambda_2(t)=c_2-c_1t$$

$$u^* = -\mathrm{sgn}(c_2-c_1t) \tag{10—20}$$

c_1 和 c_2 不是任意的，取 c_1，c_2 值应使 $X(t_f)=0$。

图 10—9 中 t_s 称为开关切换时间，$t_s=\dfrac{c_2}{c_1}$，为了求解 t_s，必须找出状态在 x_1x_2 相平面上的转移轨迹，如图 10—10。解状态方程：$\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=u$。

设 $u=1$，则 $\quad x_2=t+a_2$

$$x_1=\frac{t^2}{2}+a_2t+a_1$$

$$=\frac{1}{2}(t+a_2)^2+\left(a_1-\frac{a_2^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x_2^2+K_2,\quad K_2=a_1-\frac{a_2^2}{2} \tag{10—21}$$

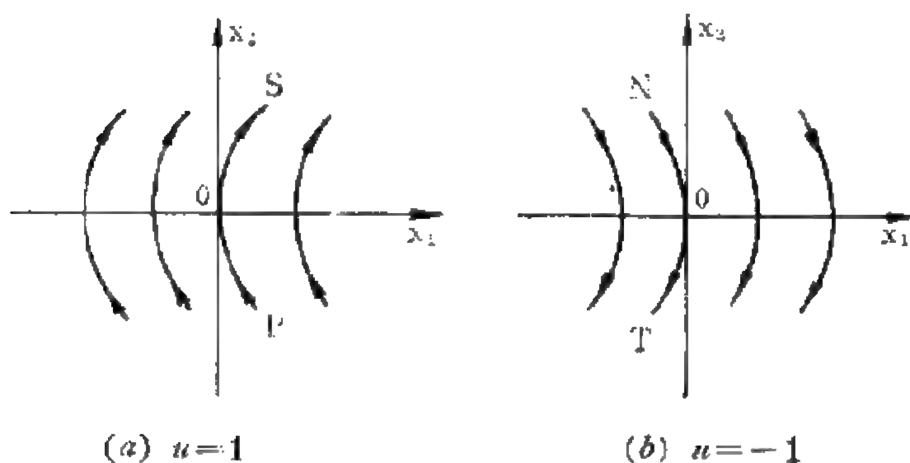


图 10—10 相平面图

这是抛物线族，如图 10—10(a)，当 $K_2=0$ 时，抛物线为 POS，如果初始状态在 PO 段上任一点，则从初始状态出发，沿 PO 轨线，一步可转移到状态空间原点。

设 $u=-1$，则 $\quad x_2=-t+b_2$

$$x_1=-\frac{t^2}{2}+b_2t+b_1$$

$$=-\frac{1}{2}x_2^2+K_1 \tag{10—22}$$

(10—22) 式状态转移轨迹也是一族抛物线，如图 10—10(b) 所示，当 $K_1=0$ 时，抛物线为 NOT，设初始状态在 NO 段上，则从初始状态出发，沿 NO 轨线，一步可转移到状态空间原点。

现在题设初始状态 $X(0)=[1,1]^T$，它落在 (10—22) 式所表示的抛物线族中的一条，即 AQB（如图 10—11），这时在 $u=-1$ 的控制作用下，由 $X(0)=[1,\ 1]^T$ 沿 AQB 转移到 B 点，B 点位于 (10—21) 式所表示的抛物线 PO 上，这时应取 $u=+1$，因此 B 点为开关切换点。由 B 点到状态空间原点，沿 PO 曲线一步即可到达，因此这个问题的求解结果是：先以$u=-1$控制到达 PO 曲线上的 B 点，再以 $u=+1$ 控制，开关切换一次，（注意这是二阶系统）。从初始状态到状态空间原点的最优轨线为 $AQBO$。可以证明，到达 B 点的时间为 $t_s=1+\sqrt{\frac{3}{2}}$，到达 O 点的时间为 $t_f=1+2\sqrt{\frac{3}{2}}$，

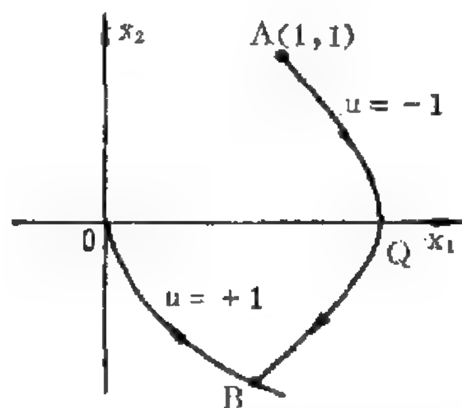


图 10—11 二阶线性系统时间最优控制的相轨迹

这是最短时间。[注]

例如一个带负载的电动机，忽略摩擦和阻尼，则其传递函数为 $\frac{1}{JS^2}$，可看作是具有两个积分环节的系统。

[注] 证明如下：

AQB 段，$u=-1$

$$x_2=-t+b_2$$

$$x_1=-\frac{t^2}{2}+b_2t+b_1$$

给定 $t=0$，$x_1=x_2=1$，得 $b_1=b_2=1$

到达 B 点 $t=t_s$， $x_2(t_s)=-t_s+1$

$$x_1(t_s)=-\frac{t_s^2}{2}+t_s+1$$

BO 段，$u=+1$

$$x_2=t+a_2$$

$$x_1=\frac{t^2}{2}+a_2t+a_1$$

给定 $t=t_f$，$x_1=x_2=0$，得 $a_2=-t_f$，$a_1=\frac{t_f^2}{2}$

因此 $x_2=t-t_f$， $x_2(t_s)=t_s-t_f$

$$x_1=\frac{t^2}{2}-t_ft+\frac{t_f^2}{2}, \qquad x_1(t_s)=\frac{t_s^2}{2}-t_ft_s+\frac{t_f^2}{2}$$

在 B 点应有 $t_s-t_f=-t_s+1$，即 $t_f=2t_s-1$

$$\frac{t_s^2}{2}-t_ft_s+\frac{t_f^2}{2}=-\frac{t_s^2}{2}+t_s+1，即\ t_s^2-(t_f+1)t_s=1-\frac{t_f^2}{2}$$

解联立方程得

$$t_s^2-2t_s-\frac{1}{2}=0 \quad 或 \quad t_s=1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}，舍弃\ 1-\sqrt{\frac{3}{2}}，$$

得 $$t_f=2t_s-1=1+2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

图 10—12 为最优控制的框图，控制器应当具有理想继电器特性，计算机根据状态 x（即为负载角位置）的变化进行计算作出决策，使控制器的输出 $u=+1$ 或 -1，当 $u=-1$ 时，电动机提供负的最大力矩，使负载减速，状态从 x_0 转移到 B 点（如图 10—13），计算机根据这一状态变化，做出新的决策，使控制器输出为 $u=+1$，于是电动机提供正的最大力矩，使负载加速到状态空间原点。

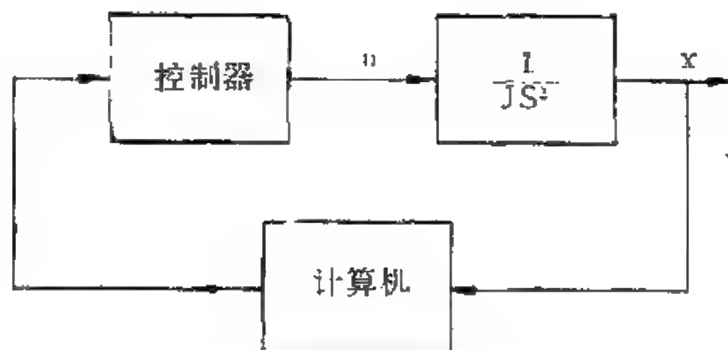


图 10—12 电动机的控制框图

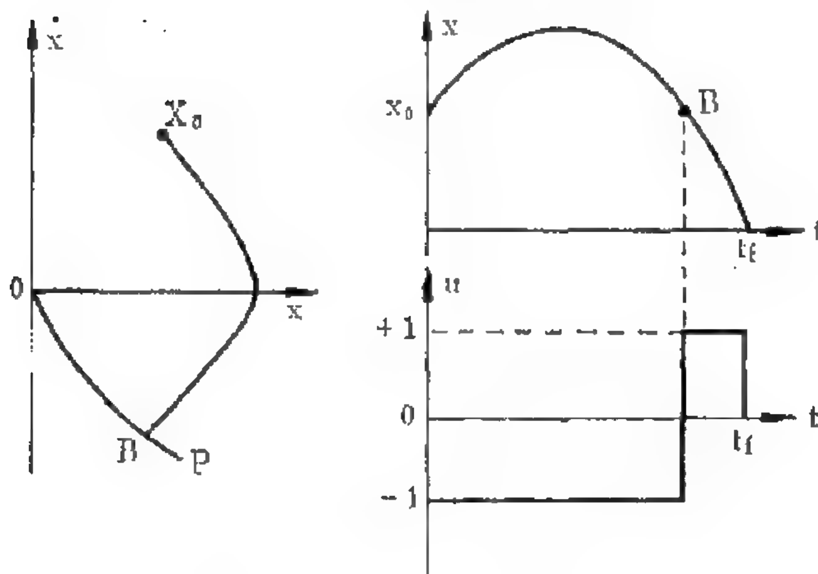


图 10—13 时间最优控制

对于二阶系统的快速控制，开关切换次数最多为 1 次，如果初始状态位于 PO 曲线上，则开关不必切换（切换次数为零），即可

转移到原点。同理，对于 n 阶系统的快速控制，开关切换次数最多为 $n-1$ 次。不言而喻，系统必须是能控的。

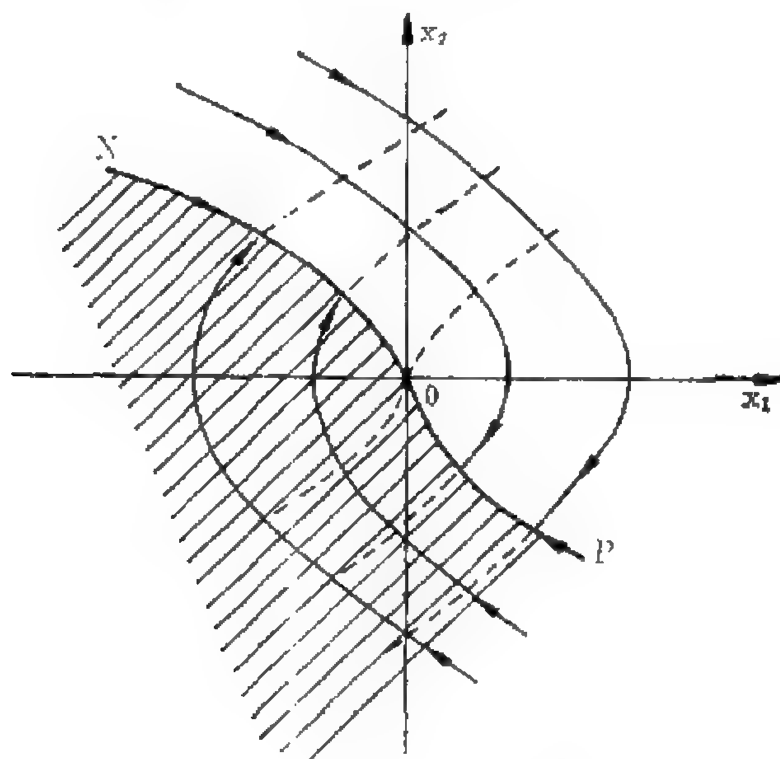


图 10—14 二阶线性系统快速控制相平面图

图 10—14 表示二阶系统快速控制状态轨线。NOP 曲线为切换曲线。当初始状态 $X(0)$ 位于 NOP 曲线的下方（阴影线区），$u=+1$，直到系统状态到达曲线 NO，u 切换为 -1。反之，如果初始状态 $X(0)$ 位于曲线 NOP 的上方，则 $u=-1$，直到系统状态到达曲线 PO，u 切换为 $+1$。

NOP 曲线用数学公式表示为

$$x_1=-\frac{1}{2}|x_2|x_2 \tag{10—23}$$

控制规律为

$$u^*=-\mathrm{sgn}[x_1(t)+\tfrac{1}{2}|x_2(t)|x_2(t)] \tag{10—24}$$

图 10—15 表示二阶系统的最优时间控制框图。

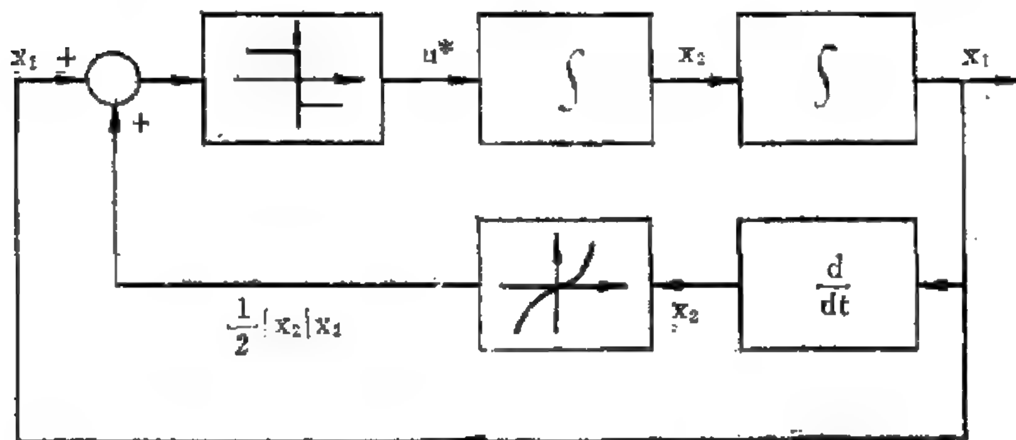


图 10—15 二阶线性系统最优时间控制框图

[例 2]

$$\min \quad J = t_f$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = u$$

$$X(0) = [x_1(0),\ x_2(0),\ x_3(0)]^T$$

$$X(t_f) = [0,\ 0,\ 0]^T$$

$$|u(t)| \leqslant 1$$

这是一个三阶系统。如果取 $L=1$，即看作是积分型指标的特殊情况，则

$$H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u$$

$$u^* = -\mathrm{sgn}\lambda_3$$

如果将这个问题看作是终端型指标的特殊情况，即取 $L=0$，$\theta[x(t_f),\ t_f] = t_f$

$$H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u$$

$$u^* = -\mathrm{sgn}\ \lambda_3$$

显见这两种假设，其结果是相符的。

当状态方程和被积函数 $L(x,\ U,\ t)$ 不显含 t 时，最优控制的

基本结论为

$$H(X^*, U^*, \lambda, t) = \text{常数}$$

而且当 $t = t_f$ 时，应满足下式

$$H + \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mu^T \frac{\partial N}{\partial t} = 0$$

如果令 $L = 1$，$\theta = 0$，$N = 0$，

则 $t = t_f$ 时 $H(X^*, U^*, \lambda, t) = 0$

或 $1 + \lambda_1 x_2^* + \lambda_2 x_3^* + \lambda_3 u^* = 0$

如果令 $\theta = t_f$，$L = 0$，$N = 0$

则 $t = t_f$ 时 $H = -1$，或 $H(X^*, U^*, \lambda, t) = -1$

即 $\lambda_1 x_2^* + \lambda_2 x_3^* + \lambda_3 u^* = -1$

所得基本公式与第一种情况相同

对于三阶系统的快速控制，也应是开关控制，切换次数最多为 $3 - 1 = 2$ 次。

§ 10-3 最小燃料消耗问题

最小燃料消耗和最小时间控制都是航天技术中经常遇到的问题。只有在给定时间内求燃料消耗最小才有意义。一般我们假设燃料消耗速度与控制变量大小成正比。例如火箭的燃料消耗速度是与推力大小成正比的。

假设现在的问题是求某个控制系统的燃料最省，控制系统的能量是由发动机提供的，因此控制系统消耗燃料最小，可以使航天设备所带燃料减少，是有重要意义的，我们仍设系统是线性的，由两个积分环节组成，则燃料最省问题的数学模型为：

$$\min \quad J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$|u(t)| \leqslant 1$$

边界条件 $x_1(t_0) = 1$，$x_2(t_0) = 1$

$x_1(t_f) = 0$，$x_2(t_f) = 0$。

t_f 给定。

解：$H = |u(t)| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u(t)$

为了使 H 极小，应使 $|u(t)| + \lambda_2 u(t)$ 为极小。因此最优控制规律与 $\lambda_2(t)$ 的大小及符号有关：

$$\lambda_2(t) < -1, \quad u^*(t) = 1,$$

$$-1 < \lambda_2(t) < 1, \quad u^*(t) = 0,$$

$$1 < \lambda_2(t), \quad u^*(t) = -1.$$

图 10—16 画出了 $\lambda_2 = 2$、$\frac{1}{2}$ 及 -2 三种情况下的 $|u(t)| + \lambda_2 u(t)$ 与 $u(t)$ 的关系，这三种情况的最优控制变量分别为 -1，0，1。

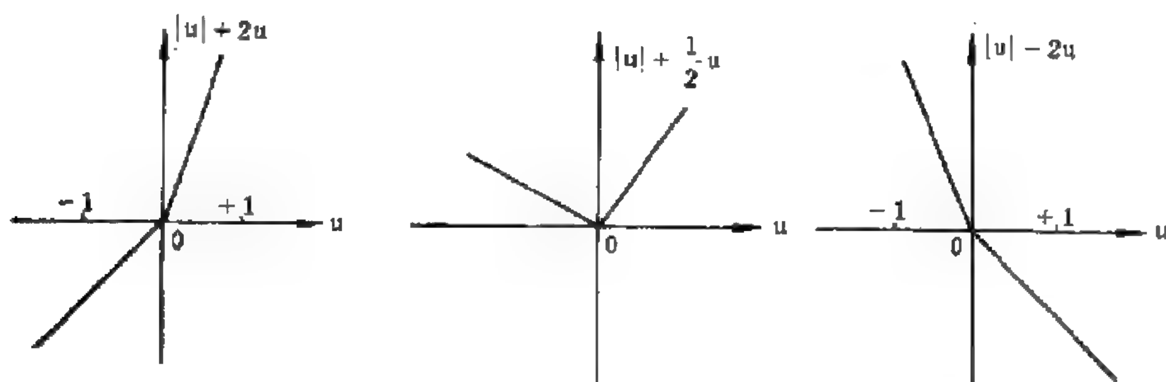


图 10—16 $\lambda_2 = 2$，$\frac{1}{2}$，-2 时 $|u(t)| + \lambda_2 u(t)$ 随 $u(t)$ 变化关系

由 $$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X}，\text{得}$$

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

求解伴随方程得

$$\lambda_1(t)=c_1$$

$$\lambda_2(t)=-c_1t+c_2$$

$$t=\frac{c_2}{c_1}\ ,\quad \lambda_2(t)=0$$

c_1 及 c_2 由边界条件给定。

图 10—17 画出 $\lambda_2(t)$曲线以及相应的最优控制 $u^*(t)$.

$0\leqslant t<t_a$ 时，$\lambda_2>1$，$u^*(t)=-1$

$t_a<t<t_b$ 时 $|\lambda_2|<1$，$u^*(t)=0$

$t_b<t\leqslant t_f$ 时 $\lambda_2<-1$，$u^*(t)=1$

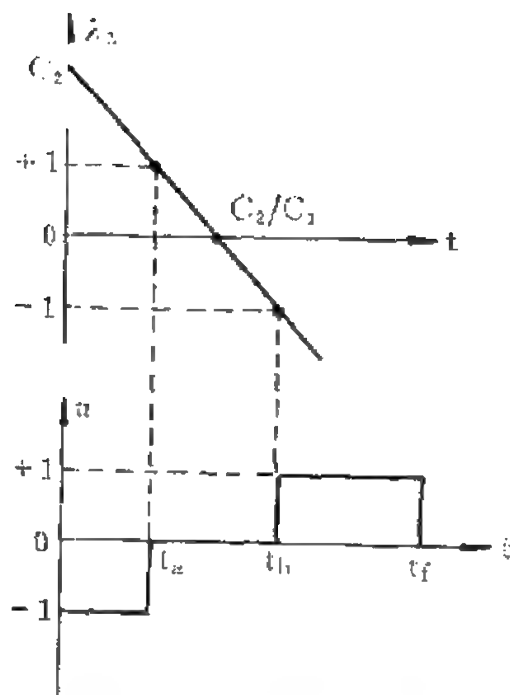


图 10—17 燃最小消耗问题的解

最小燃料消耗控制也是一种开关型控制，但是和最优时间控制不同的是，控制器应当是一个具有死区的理想继电器。继电器在 t_a 及 t_b 时刻进行切换，使控制变量由 $u=-1$ 切换到 0，保持一段时间，再由 0 切换到 $u=+1$。切换时间 t_a 和 t_b 可由状态方程 $\dot{x}=x_2$，$\dot{x}_2=u$ 解出。

当 $u=+1$ 时，$\quad x_2=t+a_2$

$$x_1=\frac{t^2}{2}+a_2t+a_1$$

在相平面（x_1 x_2）上，这是抛物线的一段.

$u=0$ 时，$\quad x_2=b_2$

$$x_1=b_2t$$

在相平面上这是一条水平线。

$u=-1$ 时，$\quad x_2=-t+d_2$

$$x_1 = -\frac{t^2}{2} + d_2 t + d_1$$

在相平面上这是另一条抛物线。

图 10—18 及 10—19 画出了不同初始状态的状态转移轨线。

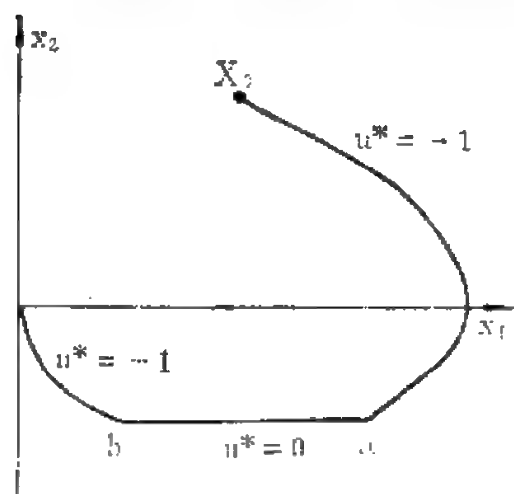


图 10—18　$X_0=(1,\ 1)^T$ 最优状态轨线

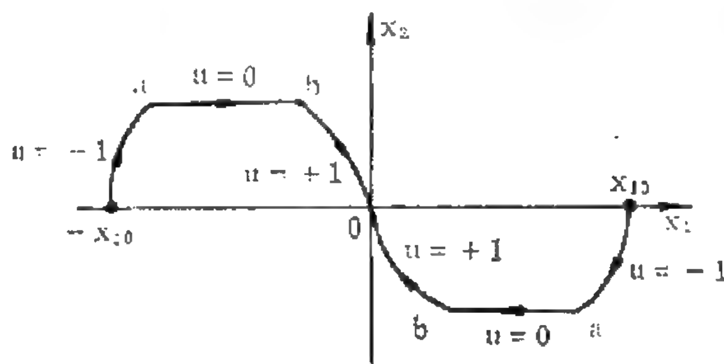


图 10—19　$X_0=(\pm x_{10},0)^T$ 最优状态轨线

图中 a 及 b 表示切换点，在 $t=t_a$ 时应满足下述条件：

$$b_2 = t_a + a_2$$

$$b_2 t_a = \frac{t_a^2}{2} + a_2 t_a + a_1$$

在 $t=t_b$ 时应满足下述条件：

$$b_2 = -t_b + d_2$$

$$b_2 t_b = -\frac{t_b^2}{2} + d_2 t_b + d_1$$

解上述方程组可得 t_a 及 t_b。

由图 10—18 及 10—19 可见，为了在有限时间内，控制系统燃料消耗为最小，应先以最大控制使状态迅速从 X_0 转移到 a 点，然后使控制为零（即不消耗燃料），以恒速水平移动到达 b 点，最

后再以反向的最大控制，使系统迅速减速，系统状态由 b 点转移到原点，即规定的终端状态。

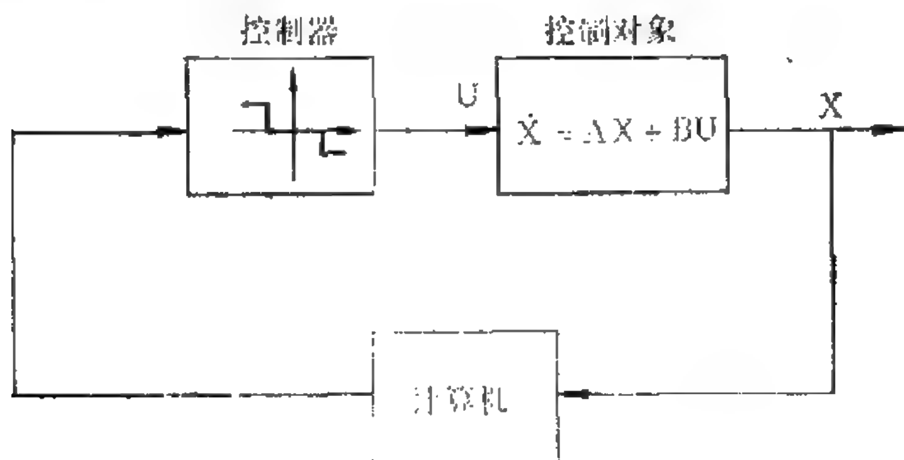


图 10—20 燃料消耗为最小的控制框图

图 10—20 表示最小燃料消耗问题的系统控制框图，计算机不断计算系统的状态轨迹，作出决策，于是继电器工作状态相应地有所改变，使作用于系统的控制变量为 +1、0 或 −1。

§ 10-4 最小能量控制

最小能量控制问题要求控制系统的能量消耗为最小，这与上一节最小燃料消耗问题是类似的，也只有在有限时间内才有意义，设系统是线性的，控制功率与控制变量的平方成比例，则问题的数学模型为：

$$\min \quad J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{k=1}^{r}u_k^2(t)\,dt$$

或

$$\min \quad J=\int_{t_0}^{t_f}U^TU\,dt$$

$$\dot{X}=AX(t)+BU(t)$$

$$X(t_0)=X_0,\quad t_0=0,\quad t_f \text{ 有限}$$

$$|u_k(t)| \leqslant 1, \quad k=1,2,\cdots,m。$$

解：
$$H=\sum_{k=1}^{m} u_k^2(t)-\lambda^T AX(t)+\lambda^T BU(t)$$

$$=\sum_{k=1}^{m} u_k^2(t)+X^T A^T \lambda+U^T B^T \lambda \qquad (10—25)$$

为了方便，引入开关函数 $S(t)$，定义

$$S(t)=B^T\lambda(t),\ S(t)=[s_1(t),s_2(t),\cdots s_m(t)]^T \qquad (10—26)$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial X}=-A^T\lambda$$

$$\lambda(t)=e^{-A^T t}\lambda(0)$$

则 $S(t)=B^T e^{-A^T t}\lambda(0)$，将（10—26）式代人哈密顿函数

$$H=\sum_{k=1}^{m} u_k^2(t)+X^T A^T \lambda+U^T S$$

$$=\sum_{k=1}^{m}[u_k^2(t)+u_k(t)s_k(t)]+X^T A^T \lambda$$

若要使 H 为极小，则应使 $u_k^2(t)+u_k(t)s_k(t)$ 为极小，这是 $u_k(t)$ 的二次函数，令

$$\frac{\partial}{\partial u_k(t)}[u_k^2(t)+u_k(t)s_k(t)]=0$$

得
$$u_k^*(t)=-\frac{1}{2}s_k(t)$$

即最优控制与开关函数 $s_k(t)$ 成正比。因为 $u(t)$ 是有约束的，因此上述线性关系只在 $|s_k(t)|\leqslant 2$ 范围内成立。当 $|s_k(t)|\geqslant 2$ 时， $u_k^*(t)=-\mathrm{sgn}[s_k(t)]$

图 10—21 表示 H 与 u 的函数关系，显见 H 极小值在 $u=-\frac{1}{2}s_k(t)$ 时出现，图 10—22 表示最优控制与开关函数的曲线

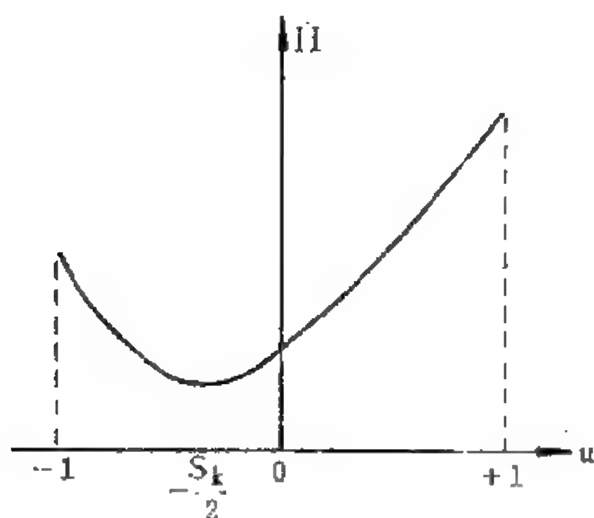


图 10—21 最小能量控制问题的$H(u)$

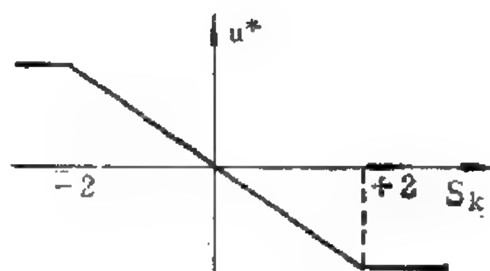


图 10—22 最优控制与开关函数关系

关系，这是最优控制规律。用限幅放大器做为控制器可以实现这一控制规律：

$$u_k(t) = -\frac{1}{2}s_k(t),\quad |s_k(t)| \leqslant 2 \tag{10—27}$$

$$u_k(t) = -\mathrm{sgn}[s_k(t)],\quad |s_k(t)| \geqslant 2 \tag{10—28}$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

图 10—23 表示系统的控制框图。

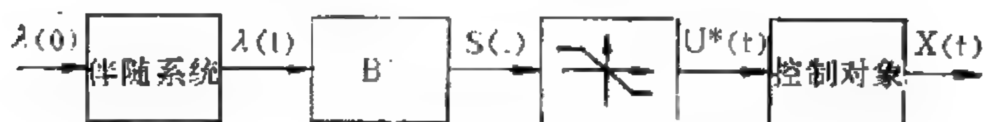


图 10—23 最小能量控制框图

［例］ 设系统由两个积分环节组成

$$\dot{x}_1 = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2 = u(t)$$

则开关函数 $S(t)=B^T\lambda=[0\ \ 1]\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{bmatrix}=\lambda_2(t)$

该控制系统能量为最小的条件由（10—27)(10—28）式可得：

$|\lambda_2(t)|\leqslant 2$ 时，　$u^*(t)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t)$

$|\lambda_2(t)|>2$ 时，　$u^*(t)=-\mathrm{sgn}[\lambda_2(t)]$

图 10—24 表示控制框图，计算机不断计算系统状态及伴随变量，以决定限幅放大器应工作在那一段，从而保证系统消耗控制能量为极小。

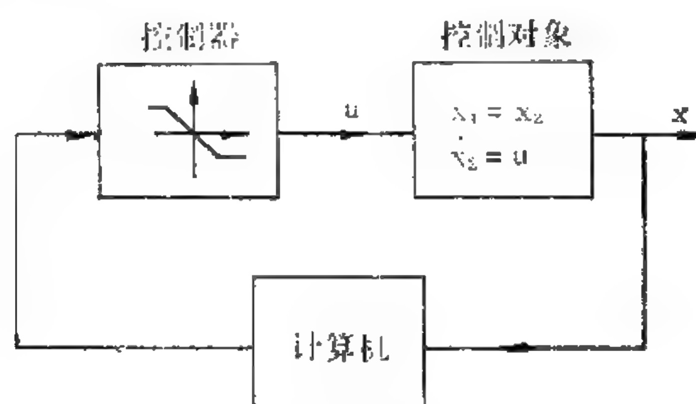


图 10—24　二阶线性系统最小能量控制框图

最后，我们比较一下三个最优控制问题应有的控制器的结构形式，系统由两个惯性环节组成。

控制要求	指标泛函	控制器型式	最优控制规律
最小时间控制	$\int_0^{t_f} dt$	理想继电器	$u^*=-\mathrm{sgn}\,\lambda_2$
有限时间内 最小燃料消耗	$\int_0^{t_f}\lvert u(t)\rvert dt$	含死区的 理想继电器	$u^*=-\mathrm{sgn}\lambda_2\quad \lvert\lambda_2\rvert\geqslant 1$ $u^*=0\quad \lvert\lambda_2\rvert<1$
有限时间内 最小能量控制	$\int_0^{t_f} u^2 dt$	限幅线性 放 大 器	$u^*=-\frac{1}{2}\lambda_2\quad \lvert\lambda_2\rvert\leqslant 2$ $u^*=-\mathrm{sgn}\lambda_2\quad \lvert\lambda_2\rvert>2$

§ 10-5　线性调节器问题

如果系统是线性的，而指标泛函是状态变量（或/和）控制变量的二次型函数，则这样的最优控制问题称为线性二次控制问题，简称线性二次型。这种最优控制问题的解最简单，而且应用十分广泛，是现代控制理论中最重要的成果之一。

线性调节器问题是一种常见的线性二次型问题，如果系统状态由于任何原因偏离了平衡状态，则在调节器作用下，最终仍能回到平衡状态。我们希望在调节过程中，偏离平衡状态的误差平方积分为最小。

下面我们先分析讨论二次型指标泛函，然后研究最优线性调节器问题的解。

一、二次型指标泛函。

设 X 表示误差向量，要求误差平方积分为最小时，可写成

$$\min J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}X^TQX\,dt \tag{10—29}$$

式中 Q 为加权矩阵，工程上应用较多的是对角阵：

$$Q=\begin{pmatrix} q_1 & & & 0\\ & q_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_n\end{pmatrix}$$

则上式可写成如下形式

$$\min J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(q_1x_1^2+q_2x_2^2+\cdots+q_nx_n^2)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\sum_{i=1}^{n}q_ix_i^2\,dt$$

q_i 越大，则由上式可知，对相应的误差分量 x_i 要求越高。

则按照上述指标泛函设计的系统，其结果一定是 x_i 较小。所以 q_i 是权衡各个误差分量重要性的一个因素。越是重要的误差分量，我们希望它越小，相应地，q_i 就要取得越大。

Q 可以是定常的，也可以是时变的。Q 的各元素值随设计者的工程经验和主观愿望可以是任意的。例如飞机着陆问题中，该飞机在 t_0 时的离地高度为 h_0，要求在终端时刻 t_f 时，离地高度 $h(t_f)=0$，我们希望

$$\int_{t_0}^{t_f}[h(t)-h'(t)]q[h(t)-h'(t)]dt \text{ 为最小。}$$

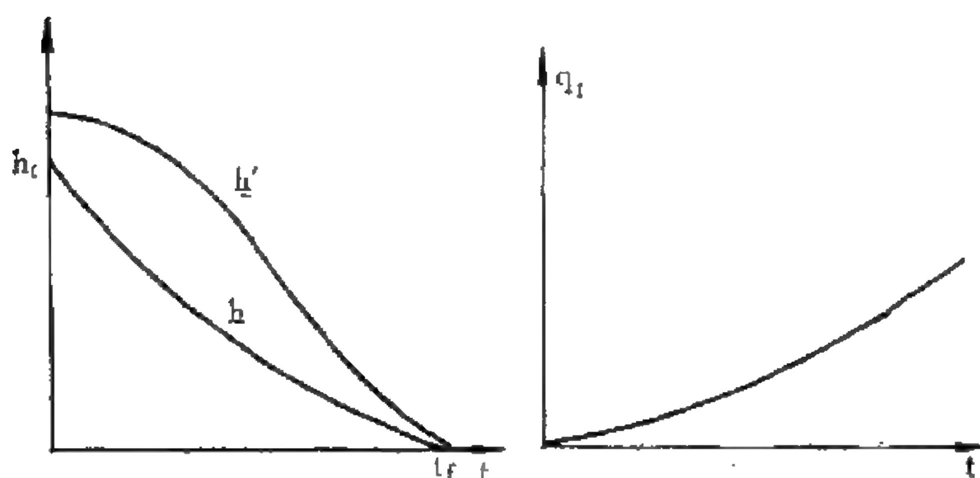


图 10—25　连续变化的权函数

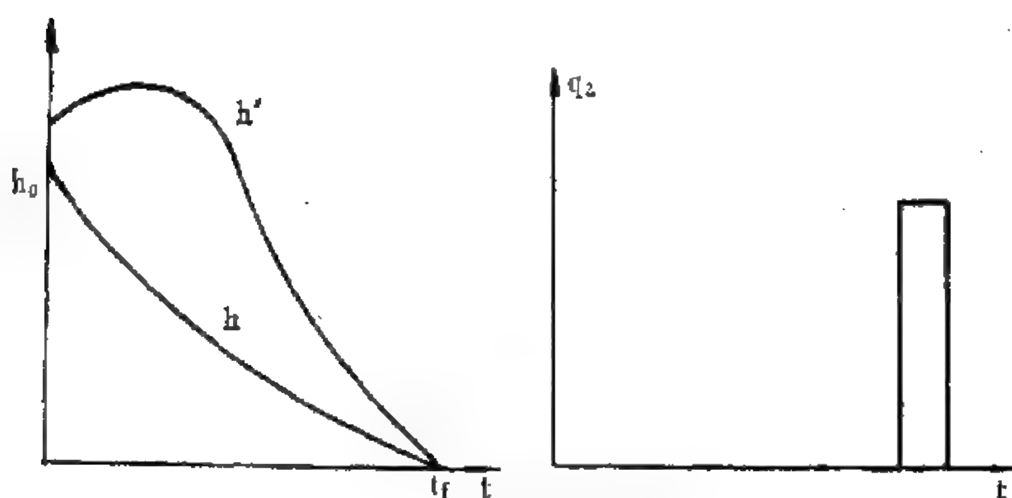


图 10—26　权函数为矩形脉冲

其中 $h(t)$ 为要求的轨线，$h'(t)$ 为实际的轨线。

图 10—25 及 10—26 表示选择两种不同的时变权函数 $q(t)$ 和它们所产生的结果。

图 10—25 中，所选的权函数 $q_1(t)$ 随着时间 t 连续变化并逐渐增大，在控制的早期就对误差加权，可以使早期误差适当减小。

图 10—26 中，所选的权函数 $q_2(t)$ 为一矩形脉冲，只在接近着陆时刻加权，这样可能会使早期误差增大。因此两种不同的权函数，效果是不相同的。

上述指标泛函(10-29 式)，只考虑误差，没有考虑控制能量的消耗，因此某些情况下有可能出现这样的结果：系统的误差指标为极小，而控制能量太大以致无法实现。下面的例子很清楚地说明了这一点。

［例］ 设线性调节器问题为

$$\min \quad \int_0^{\infty} x_1^2 dt$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$

图 10— 27 表示系统框图。

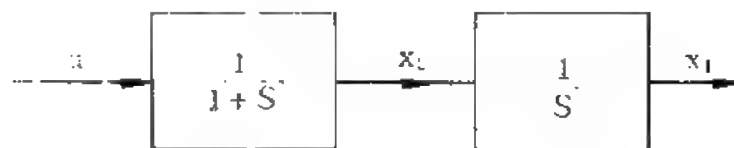


图 10—27 线性调节器问题的控制对象框图

这一问题对 u 没有任何约束，指标中对控制能量也没有提出任何要求。

求解这一问题得到下述结果：

$$H = x_1^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_2 + u)$$

设 $\lambda_2 \neq 0$，则 H 为极小的条件如下：

$$\lambda_2 > 0 \text{ 时，} \quad u = -\infty$$

$$\lambda_2 < 0 \text{ 时，} \quad u = \infty$$

为了保持 x_2 为有限值，u 应为 δ 函数（冲激函数）。

出现这一结果的原因是，对控制能量或控制变量没有任何限制。为了使问题便于求解，就要对控制变量加以约束，例如

取 $|u| \leqslant 1$，则 $\lambda_2 > 0$ 时，$u = -1$；$\lambda_2 < 0$ 时，$u = +1$。$u^* = -\text{sgn}\lambda_2$。

或者在泛函指标中加入 u^2 项，即不仅要求误差为极小，而且要求控制能量为极小，这就限制了 u 不可能为∞.

于是，（10—29）式应改为如下形式：

$$\min \quad J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (X^T Q X + U^T R U) dt \qquad (10\text{—}30)$$

式中 R 是控制权矩阵，Q 是误差权矩阵。

上例中指标泛函应改为：

$$\min \quad J = \int_0^\infty (x_1^2 + ru^2) dt$$

则
$$H = x_1^2 + ru^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_2 + u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \qquad u^* = -\frac{\lambda_2}{2r}$$

可见，对控制能量提出要求，就限制了 u 不可能为 ∞.

控制权矩阵可以是对角阵，这种情况下

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty U^T R U \, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty (r_1 u_1^2 + r_2 u_2^2 + \cdots + r_m u_m^2) dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{j=1}^{m} r_j u_j^2 dt$$

r_j 越大，则表示相应的控制变量 u_i 必须支付的控制能量越小。

（10—30）式中，如果 Q 的范数越大，而 R 的范数越小，则设计出来的系统误差较小，而控制能量消耗将较大。权矩阵某元素取的越大，说明对相应变量的要求越苛刻。

权矩阵可以是时变的。例如，一个控制系统在控制过程的早期阶段误差可能较大，因此这阶段可以将 Q 的元素选得小些，R 的元素选得大些，以节约控制能量。到控制过程的后期阶段，对误差要求较高，这时应使 Q 增大而 R 减小，用较大的控制能量使误差较小。以下为了说明问题的本质，我们只讨论定常权矩阵。

如果控制区间为$[t_0, t_f]$，并要考虑终端指标，则线性二次型问题的数学模型应为

$$\min \ J=\frac{1}{2}X^T(t_f)SX(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(X^TQX+U^TRU)dt \quad (10\text{-}31)$$

$$\dot{X}=AX+BU$$

$$X(t_0)=X_0.$$

S 为 $n\times n$ 阵，半正定实阵，称为终端权矩阵，Q 为 $n\times n$ 阵，半正定或正定实阵，R 为 $m\times m$ 阵，正定实阵。

（10—31）式中终端指标 $\theta[X(t_f),t_f]=\frac{1}{2}X^T(t_f)SX(t_f)$

边界条件为：

$$X(t_0)=X_0$$

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial\theta(t_f)}{\partial X}=SX(t_f).$$

二、最优线性调节器

（10—31）式所列出的数学模型就是求线性调节器的最优控制问题。对控制变量没有任何约束。

哈密顿函数为

$$H(X,\lambda,U,t)=\frac{1}{2}(X^TQX+U^TRU)-\lambda^TAX+\lambda^TBU \tag{10—32}$$

最优控制应满足下述方程：

$$\frac{\partial H}{\partial U}=RU+B^T\lambda=0$$

$$U^*=-R^{-1}B^T\lambda$$

因为已假设 R 为正定，所以 R^{-1} 存在。

λ 是下述正则方程组的解

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial X}=-QX-A^T\lambda \tag{10—34}$$

$$\dot{X}=AX+BU=AX-BR^{-1}B^T\lambda \tag{10—35}$$

边界条件为

$$X(t_0)=X_0$$

$$\lambda(t_f)=SX(t_f) \tag{10—36}$$

求解（10—34）、（10—35）式一阶线性微分方程组可得 $X(t)$ 及 $\lambda(t)$，这是混合边值问题。选择 $\lambda(t_0)$ 时应使 $\lambda(t_f)$满足(10--36）式。设 $X(t)$ 与 $\lambda(t)$ 间有线性关系，令

$$\lambda(t)=P(t)X(t) \tag{10—37}$$

$P(t)$ 为 $n\times n$ 实对称正定阵，待定。

代入（10—33）式可得

$$U^*(t)=-R^{-1}B^TP(t)X(t)=-K(t)X(t) \tag{10—38}$$

$$K(t)=R^{-1}B^TP(t) \tag{10—39}$$

$K(t)$ 称为最优反馈增益阵。（10—38）式说明，对于线性二次型问题，最优控制是根据全部状态变量X的最佳线性负反馈。这是线性二次型问题的一个重要结论。图 10—28 表示最优控制的框图。

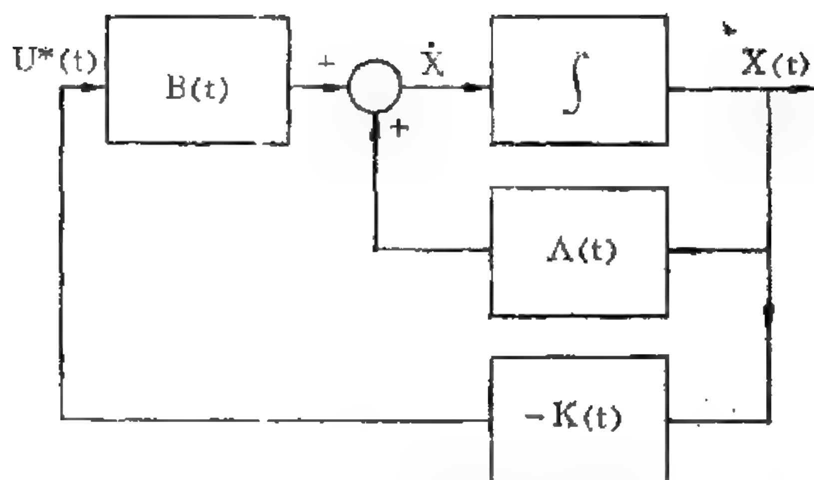


图 10—28 线性二次型问题最优控制框图

将（10—37）式代入正则方程组，消去 λ，这是一种消元法，得

$$\dot{\lambda} = -[Q + A^T P(t)]X$$

$$\dot{X} = [A - BR^{-1}B^T P(t)]X$$

由（10—37）式 $\lambda(t) = P(t)X(t)$

得 $\dot{\lambda} = \dot{P}(t)X + P(t)\dot{X}$，

$$\dot{P}(t)X + P(t)[A - BR^{-1}B^T P(t)]X = -[Q + A^T P(t)]X,$$

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q \quad (10—40)$$

边界条件 $P(t_f) = S$。

（10—40）式称为矩阵 Riccati 微分方程。[注]

求解这一非线性微分方程，得到 $P(t)$ 代入（10—38）式即可求出 $U^*(t)$。由于 $P(t)$ 是对称阵。因此解（10—40）式实际上是解 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个非线性微分方程。

[注]Riccati方程的原来形式为 $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$，式中 $p(x) \neq 0$，$r(x) \neq 0$。这是非线性微分方程。

由上可见，设计最优调节器问题归结为求解矩阵 Riccati 方程，边界条件为 $P(t_f)=S$，当没有规定终端控制指标时，$S=0$，则 $P(t_f)=0$。这是一点边值问题，对（10—40）式逆时间积分就可求出 $P(t)$。

我们注意到，即使系统为定常的，并且 Q 及 R 均为定常阵，$P(t)$ 也是时变的。

求解（10—40）式，可以用数字积分方法或矩阵迭代方法。例如，令：

$$\frac{dP(t)}{dt}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{P(t+\triangle t)-P(t)}{\triangle t}$$

则 $P(t+\triangle t)=P(t)+\dfrac{dP(t)}{dt}\cdot\triangle t$

这样就得到矩阵差分方程，近似于 Riccati 微分方程，然后逆推迭代求解。图 10—29 表示 $P(t)$ 各元素变化曲线（$P(t_f)=0$，$n=2$）。

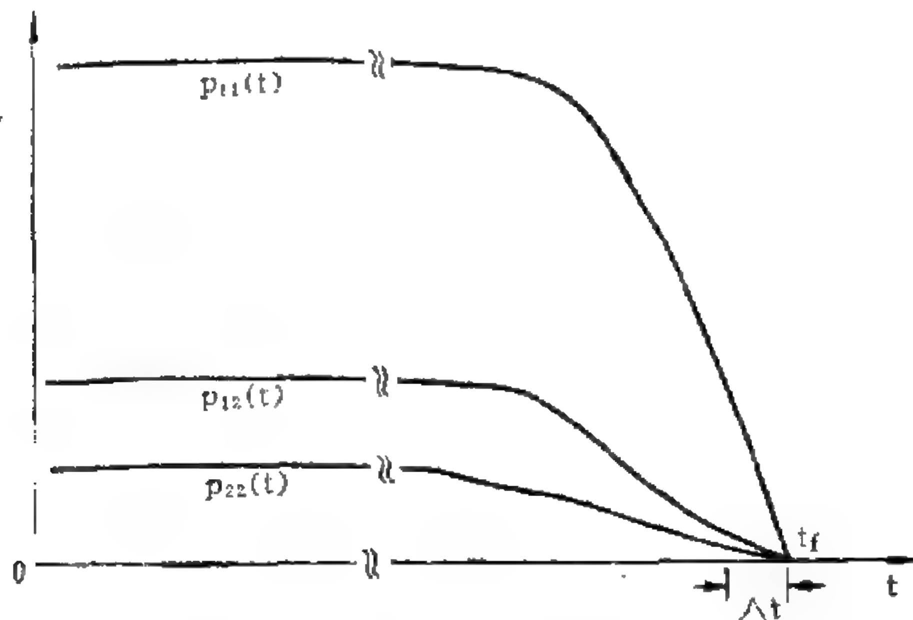


图 10—29 逆推迭代求解矩阵 Riccati方程

三、稳态线性调节器问题

（10—31）式中，如果 $t_0=0$，$t_f=\infty$，则得

$$\min \quad J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(X^TQX+U^TRU)dt$$

由图 10—29 可见，$p(t)$ 在相当长一段时间内保持为常数，因此当 $t_f\to\infty$ 时，可近似认为

$$P(t)=P(0)=P$$

这是定常阵。则（10—40）式变为

$$PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0 \qquad (10—41)$$

（10—41）式是矩阵 Riccati 非线性代数方程。求解该式得P，于是最优控制为

$$U^*(t)=-R^{-1}B^TPX(t)=-KX(t) \qquad (10—42)$$

式中 K 为定常反馈增益阵。

因此求稳态线性调节器最优控制的步骤为：

1. 选择 Q 及 R 阵，一般根据工程经验选取。
2. 由 A、B、Q、R 求解矩阵 Riccati 方程，得 P.
3. 求反馈增益阵 $K=R^{-1}B^TP$
4. 最优控制的措施为符合下式的全状态线性负反馈

$$U^*(t)=-KX(t)$$

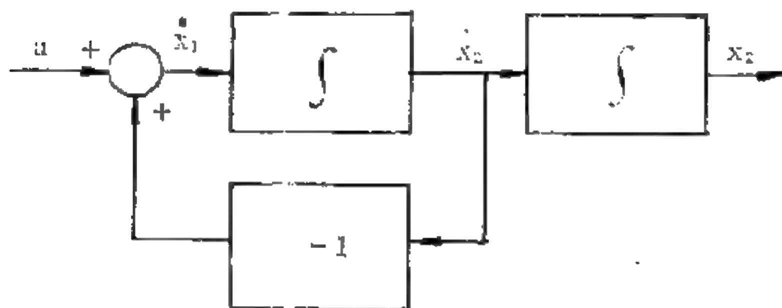


图 10—30 控制系统框图

[例] $$\min \ J=\int_0^{\infty}(x_2^2+0.1u^2)dt$$

$$\dot{x}_1=-x_1+u$$

$$\dot{x}_1=x_1$$

求最优控制。系统框图如图 10—30 所示。

解：题中给定

$$Q=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad R=0.1$$

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

由矩阵 $Riccati$ 代数方程

$$P\Lambda+\Lambda^TP-PBR^{-1}B^TP+Q\doteq 0$$

$$P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$$

得
$$\begin{bmatrix}-p_{11}+p_{12} & 0\\ -p_{12}+p_{22} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-p_{11}+p_{12} & -p_{12}+p_{22}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$-10\begin{bmatrix}p_{11}^2 & p_{11}p_{12}\\ p_{11}p_{12} & p_{12}^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0$$

得到三个方程

$$5p_{11}^2+p_{11}-p_{12}=0$$

$$10p_{12}^2=1$$

$$(1+10p_{11})p_{12}-p_{22}=0$$

解得 $p_{11}=0.1706$，$p_{12}=0.3162$，$p_{22}=0.8556$

$$K=R^{-1}B^TP=10[\ 1\quad 0\ ]\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=10[\,p_{11}\ \ p_{12}]$$

$$K = [1.706,\ 3.162]$$

$$U^*(t) = -KX(t) = -1.706x_1 - 3.162x_2$$

图 10—31 表示 $P(t)$ 阵各元素的稳态解，是对 Riccati 方程逆时间积分而得，$P(t_f)=0$。图 10—32 为最优控制框图。

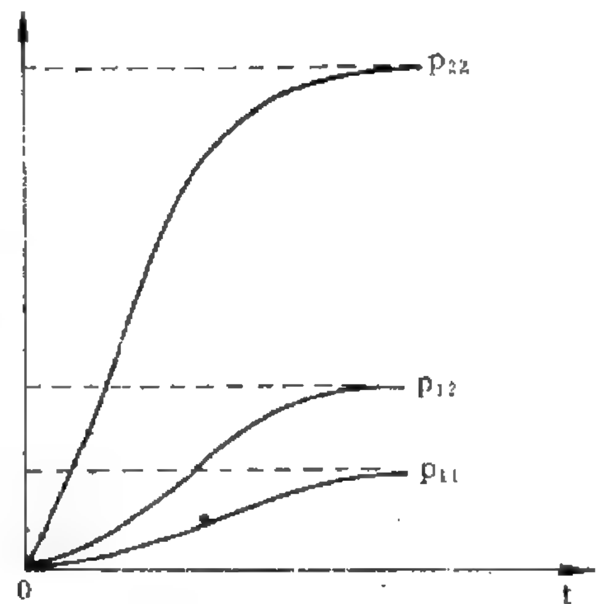


图 10—31 $P(t)$阵元素的解

四、最优线性调节器的几个重要性质。

1. 稳态线性调节器

$$J^* = \min J = \frac{1}{2}X^T(0)PX(0)$$

［证］ 已知 $U^* = -KX$

$$= -R^{-1}B^TPX$$

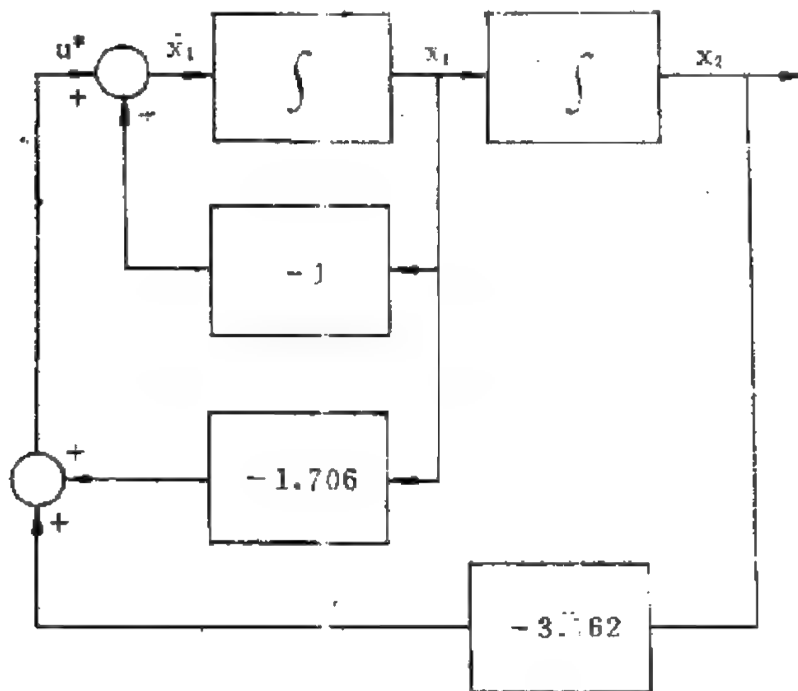


图 10—32 例题的最优控制框图

$$\dot{X} = AX + BU = (A - BK)X$$

$$\frac{d}{dt}(X^TPX) = \dot{X}^TPX + X^TP\dot{X}, \quad \dot{P} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(X^TPX) = X^T[(A - BK)^TP + P(A - BK)]X$$

$$= X^T[A^TP - K^TB^TP + PA - PBK]X$$

将 $K = R^{-1}B^TP$ 代入，并由（10—41）式可得

$$\frac{d}{dt}(X^TPX) = X^T[-PBR^{-1}B^TP - Q]X$$

$$= -X^T(K^TRK + Q)X$$

$$\int_0^{\infty} d(X^TPX) = -\int_0^{\infty} X^T(K^TRK + Q)Xdt$$

又已知 $J^* = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (X^TQX + U^{*T}RU^*)Xdt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (X^TQX + X^TK^TRKX)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} X^T(K^TRK + Q)Xdt$$

代入上式得

$$J^* = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} d(X^TPX) = \frac{1}{2}X^TPX\Big|_{\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}X^T(0)PX(0) - \frac{1}{2}X^T(\infty)PX(\infty)$$

稳态调节器 $X(\infty) = 0$，故得

$$J^* = \frac{1}{2} X^T(0) P X(0) \tag{10—41}$$

如果 t_f 不为∞，则由（10—41）式推广可得

$$J^* = \frac{1}{2} X^T(0) P(t_0, t_f) X(0) \tag{10—42}$$

$P(t_0, t_f)$ 为 $t=t_0$ 时的 $P(t)$，$P(t)$ 为矩阵微分 Riccati 方程的解。

2． 线性调节器问题能满足最优的充分条件。

已知泛函 J 为极小的充分条件为，

$\delta J = 0$，$\delta^2 J > 0$，即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial U} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial U} & \frac{\partial^2 H}{\partial U^2} \end{pmatrix} > 0$$

$$H = \frac{1}{2}(X^T Q X + U^T R U) + \lambda^T (AX + BU)$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = QX + A^T \lambda$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = RU + B^T \lambda$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X^2} = Q, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = R,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial X \partial U} = 0$$

因此 J 为极小的充分条件除了 $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ 以外还有 $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0$。已知 R 为正定，Q 至少为半正定，因此上述充分条件得到满

足。即泛函 J 在极值曲线 $U^*(t)$ 上取极小值。

$U^* = -R^{-1}B^TP(t)X(t)$是线性调节器最优的充分必要条件。

3. 线性调节器问题中最优闭环系统是渐近稳定的。

这个性质说明 $\dot{X} = AX + BU = (A - BK)X$ 的系统矩阵 $A - BK$ 是稳定的，特征值 λ 具有负实部，特征值由下式确定

$$|\lambda I - (A - BK)| = 0 \tag{10—43}$$

[证] 已知 $\frac{d}{dt}(X^TPX) = -X^T(K^TRK + Q)X$

K^TRK 为正定，Q 至少为半正定，X^TPX 为正定，因此 $\frac{d}{dt}(X^TPX) < 0$.

根据李亚普诺夫稳定理论，如能找到一个系统能量函数 V 为正定，而且 $\dot{V} < 0$，如图 10—33 所示，则系统是渐近稳定的。V 称为李亚普诺夫函数。

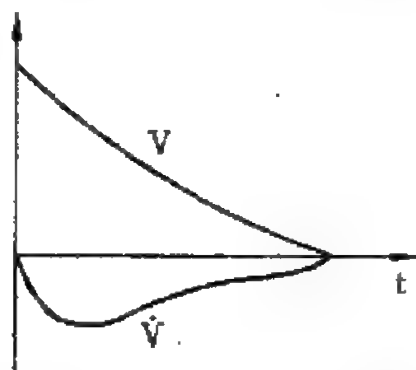


图 10—33 李亚普诺夫函数

最优调节器问题中 X^TPX 就是具有李亚普诺夫性质的能量函数，因此按最优控制规律（即全状态线性负反馈）工作的线性调节器闭环系统是渐近稳定的。

此外，还有其它几个性质，我们引述如下，证明从略。

4. 最优闭环系统有无穷大增益余量，有 60° 相位余量。

5. 最优闭环传递函数对参数变化的灵敏度不大于开环传递函数的灵敏度。

五、线性调节器问题举例

[例 1] $\min J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2)dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (X^T Q X + u^2) dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Q 为正定，则 $a - b^2 > 0$

又 $[B \vdots AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 非奇异，满秩，因此该系统是可控的。

最优控制 $$U^* = -R^{-1}B^T PX = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= -p_{12}x_1 - p_{22}x_2$$

由 $$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

得 $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{12}p_{22} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & a \end{bmatrix} = 0$$

$p_{12}^2 = 1$ $\qquad\qquad p_{12} = \pm 1$

$p_{11} - p_{12}p_{22} + b = 0$ $\qquad\qquad p_{11} = \sqrt{a \pm 2} - b$

$2p_{12} - p_{22}^2 + a = 0$ $\qquad\qquad p_{22} = \pm\sqrt{a \pm 2}$

因为 Q 正定，P 正定，∴ 要求 $p_{11} > 0$，p_{22} 应 > 0，

取 $p_{22} = \sqrt{a+2}$，$p_{12} = 1$，$p_{11} = \sqrt{a+2} - b$

$$u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{a+2}\,x_2(t)$$

最优控制框图如图 10—34。

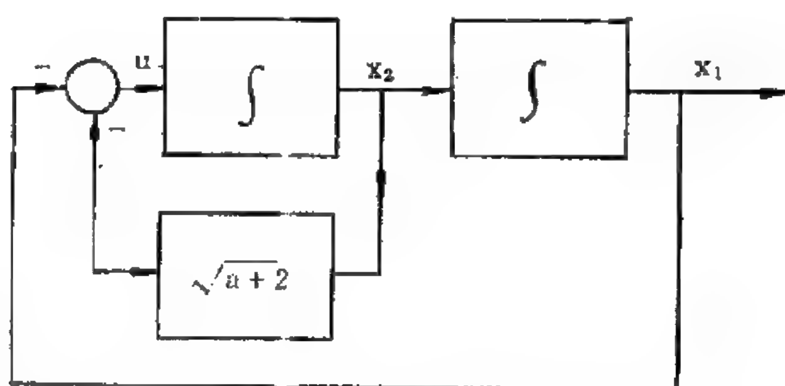


图 10—34 线性调节器问题例 1 的最优控制框图

[例 2] $\min J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(qx^2+ru^2)dt$

$q>0 \qquad r>0$

$\dot{x}=ax+u$

$x(0)=x_0$

最优控制 $u^*(t)=-\frac{1}{r}px(t)$

p 是标量 Riccati 代数方程的解。

$$2ap-\frac{1}{r}p^2+q=0$$

$$p=ar+\sqrt{a^2r^2+rq}$$

$$u^*(t)=-\left(a+\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}\right)x(t)$$

代入状态方程 $\dot{x}=ax+u=-\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}x(t)$

解得最优轨线 $x^*(t)=x_0e^{-\sqrt{a^2+q/r}\,t}$

$$J^*(u)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[q+r\left(a+\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}\right)^2\right]x^2dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[q+r\left(a+\sqrt{a^2+\frac{q}{r}}\right)^2\right]\int_0^\infty x_0^2e^{-2\sqrt{a^2+q/r}\,t}dt$$

$$=\frac{1}{2}x_0^2[ar+\sqrt{a^2r^2+qr}]$$

与用公式（10—41）计算所得结果相同。

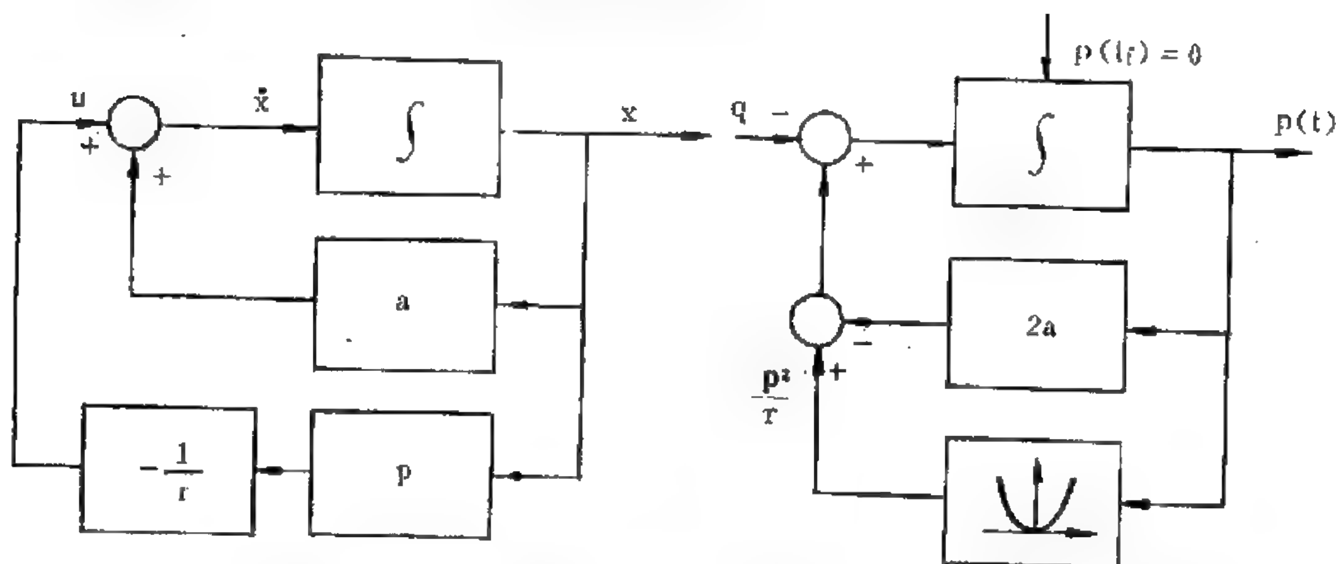


图 10—35　例 2 的最优控制框图　　　图 10—36　求解 $p(t)$的框图

图 10—35 表示最优控制框图。

如果 $t_f\neq\infty$，则要解下述 Riccati 微分方程：

$$\frac{dp}{dt}=\frac{p^2}{r}-2ap-q$$

$t=t_f$ 时，$p(t_f)=0$.

$$\int_{p(t)}^0 dp=\int_t^{t_f}\left(\frac{p^2}{r}-2ap-q\right)dt$$

或
$$-p(t)=\int_t^{t_f}\left(\frac{p^2}{r}-2ap-q\right)dt$$

$$u^*(t) = -\frac{1}{r}p(t)x(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + u = \left[a - \frac{1}{r}p(t)\right]x(t)$$

$$x^*(t) = x_0 e^{A}$$

$$A = \int_0^t \left[a - \frac{1}{r}p(t)\right]dt$$

图 10—36 表示求解 $p(t)$ 的框图，图 10—37 表示 $x(t)$及$p(t)$的最优曲线。

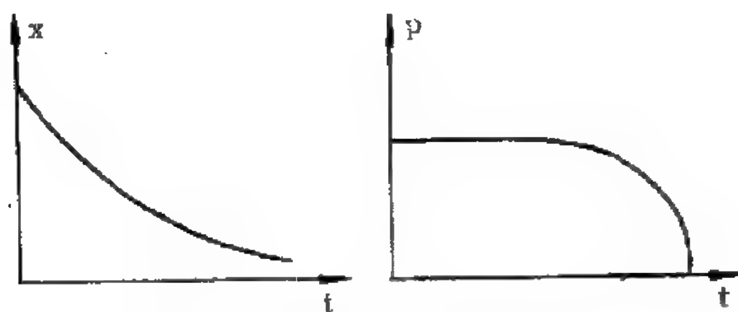


图 10—37 $x^*(t)$ 及 $p(t)$

[例 3] $\min J = \frac{1}{2}[10x^2(t_f)] + \frac{1}{2}\int_0^{10}(2x^2 + u^2)dt$

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x + u$$

$$A = -\frac{1}{2},\quad B = 1,\quad S = 10,\quad Q = 2,\quad R = 1$$

t_f 有限，∴ p 为时变的

$$\frac{dp}{dt} = p^2 + p - 2$$

$$p(t_f) = S = 10$$

解方程 $$\frac{d(p+\frac{1}{2})}{(p+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}=dt$$

$$p(t)=-\frac{1}{2}+1.5\text{ctgh}(-1.5t+c)$$

积分常数 c 由 $p(10)=10$ 确定，$c=15.14$

$$u^*(t)=-R^{-1}B^TP(t)X(t)=\left[\frac{1}{2}-1.5\text{ctgh}(-1.5t+15.14)\right]x(t)$$

将 $u^*(t)$代入 $\dot{x}=-\frac{1}{2}x+u$ 可得最优轨线 $x^*(t)$。

六、线性调节器问题的基本结论

1. 稳态线性调节器最优控制的措施为满足下式的全状态线性负反馈 $U^*=-R^{-1}B^TPX(t)=-KX(t)$，$0<t<\infty$。$K$为反馈增益阵，定常。$P$ 为矩阵 Riccati 代数方程

$$A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP+Q=0$$

的解，为对称、正定、定常阵。

2. 最优线性调节器是稳定的，指标泛函极小值为 $J^*(X_0)=\frac{1}{2}X_0^TPX_0$

3. P 确定以后，最优控制规律就确定了。如果系统的暂态响应不能令人满意，可修改权矩阵 Q、R。

4. 线性调节器理论提出了一种便于在计算机上设计控制系统的方法，最优设计归结为求解 Riccati 方程。

5. 如果 t_f 不为∞，则 $P(t)$ 是矩阵 Riccati 微分方程

$$-\dot{P}(t)=P(t)A+A^TP(t)-P(t)BR^{-1}B^TP(t)+Q$$

逆时间积分的解，它是对称的时变矩阵。

反馈增益阵 $K(t)=R^{-1}B^TP(t)$ 也是时变的。

§ 10-6 线性伺服系统

上一节所得线性调节器问题的基本结论可以推广到线性伺服系统问题。线性伺服系统问题要求系统输出 $Y(t)$ 跟踪某个给定的输出 $Y_r(t)$。

令 $\triangle Y(t)=Y_r(t)-Y(t)$，则数学模型为

$$\min J=\frac{1}{2}\triangle Y^T(t_f)\,S\triangle Y(t_f)+$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\triangle Y^T(t)Q(t)\triangle Y(t)+U^T(t)R(t)U(t)]dt \quad (10\text{—}44)$$

$$\dot{X}(t)=A(t)X(t)+B(t)U(t)+W(t) \quad (10\text{—}45)$$

式中 $W(t)$ 为确定性输入噪声向量。

$$X(t_0)=X_0$$
$$Y(t)=C(t)X(t) \quad (10\text{—}46)$$

哈密顿函数 $H(X、U、\lambda、t)=\frac{1}{2}\triangle Y^T(t)Q(t)\triangle Y(t)+$

$$+\frac{1}{2}U^T(t)R(t)U(t)+\lambda^T(t)[A(t)X(t)+B(t)U(t)$$
$$+W(t)] \quad (10\text{—}47)$$

由极大值原理 $\frac{\partial H}{\partial U}=0$

$$U^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)\lambda(t) \quad (10\text{—}48)$$

$$-\dot{\lambda}=\frac{\partial H}{\partial X}=C^T(t)Q(t)[C(t)X(t)-Y_r(t)]+A^T(t)\lambda(t)$$

$$\lambda(t_f)=C^T(t_f)S[C(t_f)X(t_f)-Y_r(t_f)] \qquad (10-49)$$

设
$$\lambda(t)=P(t)X(t)-\beta(t) \qquad (10-50)$$

代入正则方程得：

$$\dot{P}=-P(t)A(t)-A^T(t)P(t)+P(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$
$$-C^T(t)Q(t)C(t)$$
$$P(t_f)=C^T(t_f)SC(t_f) \qquad (10-51)$$

$$\dot{\beta}=-[A(t)-B(t)R^{-1}(t)B^T(t)P(t)]^T\beta+P(t)W(t)-$$
$$-C^T(t)Q(t)Y_r(t)$$
$$\beta(t_f)=C^T(t_f)SY_r(t_f) \qquad (10-52)$$

由上可见，线性伺服系统最优控制问题包括两部分：线性调节器部分及前置滤波器部分。

最优控制规律是线性的：

$$U^*(t)=-R^{-1}(t)B^T(t)[P(t)X(t)-\beta(t)]$$

上式在计算时是很困难的，因为式中包括 $\beta(t)$。为了求得 $\beta(t)$ 必须对（10—52）式从 t_f 到 t_0 逆向求解，因此需要知道 $[t_0, t_f]$ 区间一切时刻的 $Y_r(t)$ 及 $W(t)$。

［例］ $\min J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[(x_1-y_r)^2+u^2]dt$

$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=u$$
$$x_1(0)=x_{10},\quad x_2(0)=x_{20}$$

Riccati 方程为：

$$\dot{p}_{11}=p_{12}^2-1,\quad p_{11}(t_f)=0,$$

$$\dot{p}_{12} = -p_{11} + p_{12}p_{22}, \quad p_{12}(t_f) = 0,$$

$$\dot{p}_{22} = -2p_{12} + p_{22}^2, \quad p_{22}(t_f) = 0.$$

$t_f \to \infty$时，$p_{11} = p_{22} = \sqrt{2}$，$p_{12} = 1$

于是 $u = -R^{-1}B^T[PX - \beta] = -x_1 - \sqrt{2}\,x_2 + \beta_2$

$$\beta = [\beta_1, \ \beta_2]^T$$

求解（10—52）式可得 β，本例中

$$\dot{\beta}_1 = \beta_1 - y_r \qquad \beta_1(t_f) = 0$$

$$\dot{\beta}_2 = -\beta_1 + \sqrt{2}\,\beta_2 \qquad \beta_2(t_f) = 0$$

如果 $y_r = \alpha$（常数），则当 $t_f \to \infty$ 时得（这时$\dot{\beta} = 0$）

$$\beta_2 = 0.707\beta_1$$

$$\beta_1 = y_r = \alpha$$

如果 $y_r = 1 - e^{-t}$（时变），则当 $t_f \to \infty$ 时得

$$\beta_2(t) = 1 + \frac{1}{2+\sqrt{2}}e^{-t} \doteq 1 + 0.3e^{-t}, \quad t \geqslant 0$$

这个最优解可用图 10—38 所示结构框图来实现。前置滤波器是比例微分型

$$1.3\frac{d}{dt}(1 - e^{-t}) + 1 - e^{-t} = 1 + 0.3e^{-t} = \beta_2(t)$$

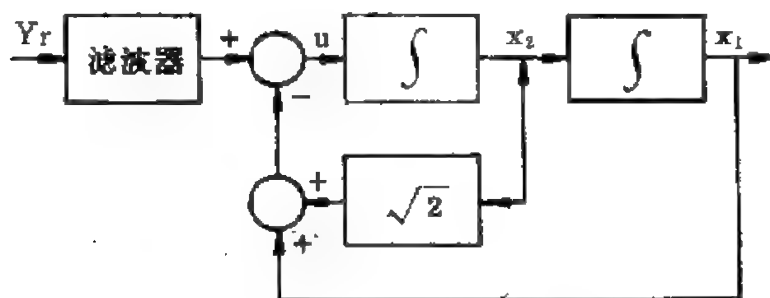


图 10—38 线性伺服系统

若 $W(t)=0$，$Y_r(t)=0$，则伺服系统问题变成输出调节器问题。前一节讨论的是状态调节器问题。两者略有不同。

§ 10-7 极大值原理的证明

本节为了用一种简单方法证明极大值原理，将给出极大值原理的一般表述形式。

设状态变量为 n 维，引进第 $n+1$ 个状态变量 $x_{n+1}(t)$，可将三种最优控制问题，即积分型指标、终端型指标及时间最优控制问题用统一的形式表述。

1. 积分型指标

$$J=\int_0^{t_f} L(X、U、t)dt$$

$$\dot{X}=f(X、U、t) \quad X\in E^n$$

引入 $x_{n+1}(t)$，令 $\qquad x_{n+1}(t)=\int_0^t L(X、U、t)dt \qquad (10—53)$

$$x_{n+1}(0)=0$$

则 $\qquad \dot{x}_{n+1}(t)=L(X、U、t)$

$$J=\int_0^{t_f}\dot{x}_{n+1}(t)dt=x_{n+1}(t_f) \qquad (10—54)$$

于是使积分型指标为极小的问题变成求 $x_{n+1}(t_f)$ 为极小的问题。

2. 时间最优控制（参见 §10—2）

$$J=\int_0^{t_f}dt=t_f$$

令 $\qquad x_{n+1}(t)=\int_0^t dt=t \qquad (10—55)$

$$\dot{x}_{n+1}=1, \quad x_{n+1}(0)=0$$

于是 $$J=x_{n+1}(t_f) \tag{10—56}$$

求时间最短的问题变成使 $x_{n+1}(t_f)$ 为极小的问题。

3． 终端型指标

$$J=\theta[X(t_f)]$$

令 $$x_{n+1}(t)=\theta[X(t)]=\theta[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]$$

$$\dot{x}_{n+1}(t)=\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\dot{x}_2+\cdots+\frac{\partial\theta}{\partial x_n}\dot{x}_n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\dot{x}_j$$

$$x_{n+1}(0)=\theta[X(0)]=\theta[x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)]$$

$$J=x_{n+1}(t_f) \tag{10—57}$$

终端控制问题变成在终端时刻求 x_{n+1} 为最优的问题。

用上述增加新的状态变量 x_{n+1} 的方法，使系统状态变量由 n 维变成 $n+1$ 维，有 $n+1$ 个初值。因此各种最优控制问题可以看作是更一般的求下述泛函极值问题的特殊情况

$$P=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i(t_f)=B^TX(t_f) \tag{10—58}$$

P 称为庞特里亚金函数。B 为列向量，与取哪个坐标变量的极值有关。使庞特里亚金函数为极值的控制策略就是最优控制。可以从几何上简单地解释如下：选择控制向量 U，使状态向量 $X(t_f)$ 沿 $-B$ 方向移动最远，则庞特里亚金函数 P 为极小。

系统状态方程为 $\dot{X}=f(X、U、t)$，设终端自由。从物理上分析，如果使系统中能量为极大，则可能使状态向量移动最远（沿 $-B$ 方向），即可能使庞特里亚金函数 P 为极小。亦即，如果有

一个能量函数，使该能量函数为极大，则（10—58）式为极小。令哈密顿函数表示为这种能量函数，定义为动量与速度的内积：

$$H(X、U、\lambda、t)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(X、U、t) \qquad (10—59)$$

$f_j=\dot{x}_j$

λ_j 为广义动量。

极大（小）值原理可阐述如下：若控制向量 U 为最优，即它能使庞特里亚金函数 P 极小（大），则（10—59）式定义的哈密顿函数 $H(X、U、\lambda、t)$ 对控制向量 U 说是极大（小）。

［证］ 由状态变量和控制变量的变分 δX 和 δU 可得庞特里亚金函数的变分 δP。

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta\dot{x}_i+\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i\delta x_i$$

对上式积分，得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_f}=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[f_i(X+\delta X,U+\delta U,t)$$

$$-f_i(X,U,t)]dt+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\dot{\lambda}_i\delta x_i dt$$

边界条件为

$$x_i(t_0)=0$$

$$\lambda_i(t_f)=-b_i\text{[注]} \qquad (10—60)$$

可得 $$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta x_i\Big|_{t_0}^{t_f}=-\sum_{i=1}^{n}b_i\delta x_i(t_f)=-\delta P \qquad (10—61)$$

［注］ 由（10—59）式定义的哈密顿函数，应有 $L(X,\ U,\ t)=0$，（与10—7式比较）因此，终端自由时边界条件 $\lambda_i(t_f)=-b_i$ 而不是 0.

代入上式得：

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [f_i(X+\delta X, U+\delta U, t) - f_i(X, U, t)] dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \dot{\lambda}_i \delta x_i dt \qquad (10\text{—}62)$$

将 $f_i(X, U+\delta U, t)$ 对 X 展成泰勒级数取二次近似：

$$f_i(X+\delta X, U+\delta U, t) = f_i(X, U+\delta U, t) +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(X, U+\delta U, t)}{\partial x_j} \delta x_j +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(X+\theta\delta X, U+\delta U, t)}{\partial x_j \partial x_k} \delta x_j \delta x_k \qquad (10\text{—}63)$$

又 $\quad \dot{\lambda}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$，$i=1, 2, \cdots, n \quad (10\text{—}64)$

将（10—63）、（10—64）代入（10—62）式得

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [f_i(X, U+\delta U, t) - f_i(X, U, t)] dt - q$$

$$(10\text{—}65)$$

式中 $\quad q = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left\{ \dfrac{\partial [f_i(X, U+\delta U, t) - f_i(X, U, t)]}{\partial x_j} \right\} \delta x_j dt$

$$+\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 f_i(X+\theta\delta X, U+\delta U, t)}{\partial x_j \partial x_k} \delta x_j \delta x_k dt$$

$$(10\text{—}66)$$

（10—65）式也可写成

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_f} [H(X, U+\delta U, \lambda, t) - H(X, U, \lambda, t)] dt - q \quad (10\text{—}67)$$

极大值原理给出使 P 为极小的必要条件是使 H 为极大。因此，需要证明的是：如果至少能找到一个控制向量 U，使 H 不是

极大，则 P 为极小的条件不能保证。

设在区间（t_a、t_b）内，H 为极大的条件没有能满足，（t_a，t_b）$\in(t_0,t_f)$，则控制向量 U 取任意小的变分 δU，有：

$$H(X,U+\delta U,\lambda,t)-H(X,U,\lambda,t)>\alpha \qquad (10—68)$$

式中 α 为正常数，$t\in(t_0,\ t_f)$。

我们选择一个控制向量，使之具有如下性质：在（t_a，t_b）范围内，U 变为 $U+\delta U$，而在其余区间，U 不变。则（10—67）式为：

$$\delta P=-\int_{t_a}^{t_b}[H(X,U+\delta U,\lambda,t)-H(X,U,\lambda,t)]dt-q$$

$$=-\int_{t_a}^{t_b}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial u_s}\delta u_s dt-q \qquad (10—69)$$

因为 δU 和 δX 都很小，（10—66）式中右边第二项是高阶无穷小，于是（10—66）式可简化为：

$$q\doteq\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\left\{\frac{\partial[f_i(X,U+\delta U,t)-f_i(X,U,t)]}{\partial x_j}\right\}\delta x_j dt$$

(10—70)

将 f_i 对 U 展成泰勒级数，取一次近似：

$$f_i(X,U+\delta U,t)=f_i(X,U,t)+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f_i(X,U,t)}{\partial u_s}\delta u_s$$

代入（10—70）式得

$$q=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 f_i(X,U,t)}{\partial x_j\partial u_s}\delta x_j\delta u_s dt$$

由 H 的定义及所选控制向量的性质，上式可写成：

$$q=\int_{t_a}^{t_b}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial u_s}\delta x_j\delta u_s dt \qquad (10—71)$$

将（10—71）代入（10—69）式得

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_f} \sum_{s=1}^{m}\left(\frac{\partial H}{\partial u_s}\delta u_s + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial u_s}\delta x_j \delta u_s\right)dt \qquad (10\text{—}72)$$

由（10—68）式可知，上式积分号下第一项总为正，而第二项比第一项小得多，故得

$$\delta P < 0$$

这个结果说明，对于所选的一个特殊控制向量 U，取 U 的任意变分 δU，P 不是极小。也即，如果 H 为极大的条件不能满足，则 P 为极小的条件不能保证，这就证明了极大值原理。

如果系统的状态方程为：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + \varphi(U)$$

则极大值原理提供了最优控制的必要充分条件。

[证]　由（10—59）式，$H = \lambda^T[AX + \varphi(U)]$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_j \partial u_s} = 0$$

（10—67）式中 $q = 0$

$$\delta P = -\int_{t_0}^{t_f}[H(X, U+\delta U, \lambda, t) - H(X, U, \lambda, t)]dt$$

也即，如果 H 为极大的条件成立，上式积分号下非正，δP 非负。满足 P 为极小的条件，于是充分条件得证。

[例]　用庞特里亚金函数求解下述最优控制问题。

$$\min\ J(u) = \int_{t_0}^{t_f} x^2 dt$$

$\dot{x} = -ax + bu$，a 及 b 为正常数

$x(t_0) = x_0$

$|u| \leqslant U_m$

解：令 $x_1=x$，引入新坐标 x_2

$$x_2=\int_{t_0}^{t_f} x_1^2 dt$$

得增广系统的微分方程为：

$$\dot{x}_1=-ax+bu$$

$$\dot{x}_2=x_1^2$$

庞特里亚金函数

$$P=b_1x_1+b_2x_2=x_2,\quad b_2=1$$

于是原问题变为使 x_2 为极小。

$$H=\lambda_1\dot{x}_1+\lambda_2\dot{x}_2=\lambda_1(-ax_1+bu)+\lambda_2x_1^2$$

应用极大值原理，使 H 为极大，则应令

$$u^*=U_m\mathrm{sgn}\,\lambda_1$$

式中 sgn 为符号，定义 $\mathrm{sgn}\quad \alpha=1,\ \alpha>0$

$$0,\ \alpha=0$$

$$-1,\ \alpha<0$$

正则方程组为

$$\dot{x}_1=-ax_1+bu$$

$$\dot{x}_2=x_1^2$$

$$\dot{\lambda}_1=a\lambda_1-2x_1\lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2=0$$

边界条件　　$x_1(t_0)=x_0\qquad x_2(t_0)=0$

$\lambda_1(t_f)=0\qquad \lambda_2(t_f)=-1$

要求解的两点边值问题是

$$\dot{x}_1=-ax_1+bU_m\,\mathrm{sgn}\,\lambda_1$$

$$\dot{\lambda}_1=a\lambda_1-2x_1\lambda_2=a\lambda_1+2x_1$$

用试探法，先猜一个 $\lambda_1(t_0)$，求 x_1 及 λ_1，直到另一个边界条件 $\lambda_1(t_f)=0$ 满足为止。λ_1 确定以后，u^* 就可求出。图 10—39 表

示所求最优控制系统的框图。

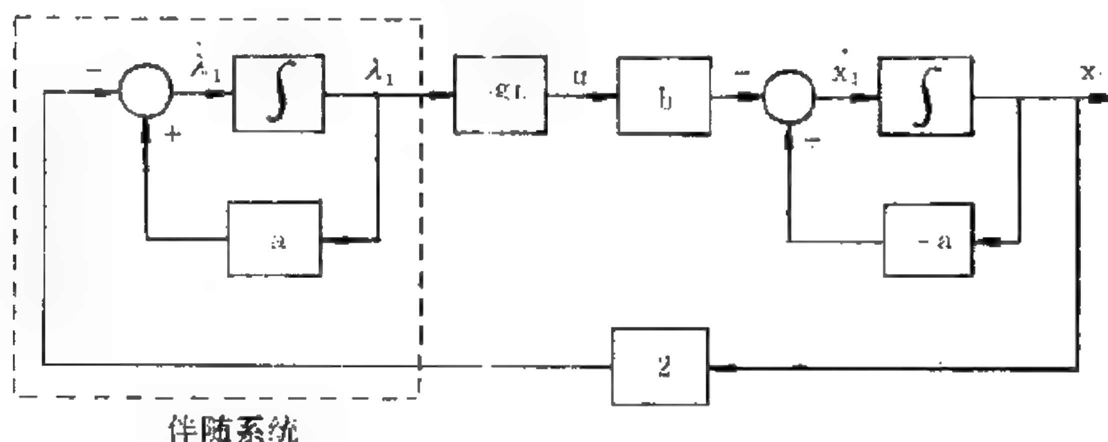


图 10—39 [illegible]控制框图

习　　题

1. 二阶系统，$\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 - bx_1 + u，\text{已知 } a^2 < 4b.$$

$$|u| \leqslant U_m$$

从 $X_0 = [x_{10}\ \ x_{20}]^T$ 转移到 $X(t_f) = [0,0]^T$，求最优控制规律使 t_f 为最小，并画出控制系统及伴随系统框图。

2. 二阶系统　　$\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = -ax_1 + u$$

选取最优控制使状态由 $[x_{10},\ x_{20}]^T$ 转移到 $X(t_f) = (0,\ 0)^T$，时间为最短，已知 $|u| \leqslant 1$。

3. 已知 $\dot{x} = u$，$x(t_0) = x_0$，求最优控制使

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (x^2 + u^2)dt \text{ 为极小。}$$

4. $\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)u(t)$

$$x(t_0) = x_0,$$

$$|u| < U_m$$

求最优控制使 $J=x_r-x(t_f)$ 为极小，x_r 为给定状态值。

5. 一阶系统 $\dot{x}=ku$

$$x(0)=x_0$$

求最优控制使 $J=\int_{t_0}^{t_f}[a(x_r-x)^2+bu^2]dt$ 为最小，x_r 为给定要求。

6. 证明下述最优控制问题是要在 (t_0, t_f) 内保持继电器控制 $|u_j|=U_{mj}$。

$$\min J=\int_{t_0}^{t_f}F[X(t)-X_r(t)]dt$$

$$\dot{X}=A(t)X(t)+B(t)U(t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

$$|u_j(t)|\leqslant U_{mj}$$

X_r 为希望的状态值。

7. 用极大值原理求解第一章例1（图1—7）中理想 LC 振荡器在最短时间内停振问题。

第十一章 离散系统的最优控制

§11-1 概 述

前两章，我们分析讨论了连续时间系统的最优控制问题。从本章起，我们将分析讨论离散时间系统的最优控制问题。连续系统和离散系统有不同的数学模型，前者是用微分方程来描述的，而后者则是用差分方程来描述。研究离散系统的最优控制有两种方法，一种是离散变分法和离散极大值原理，这与前两章介绍的内容和结果相类似。另一种是动态规划方法，我们将在下一章介绍。动态规划方法也可用于分析讨论连续系统的最优控制问题，称为连续动态规划，与极大值原理求解结果一致。

离散时间系统可以分为两类。一类是系统的输出只在一定的离散瞬间才得到（或测量到），如数字滤波器等。这类系统本来就属于离散时间系统，可以用标量或向量差分方程来描述系统。另一类离散系统中，控制对象是连续的，但系统中的控制器是数字计算机或其它数字设备，是离散的元件，因而将连续系统离散化了。例如从无线电上收到的通信信号、伺服机的角速度等物理量是连续变化的。但是用计算机或其它数字设备来控制时，连续变化的物理量就成为时间上是离散的物理变量了。

我们已知，一个定常的线性连续系统可用向量微分方程表示如下：

$$\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \tag{11—1}$$

设 $X(t_0)$ 为已知，则上述方程的离散表达式为

$$X[k(+1)T]=e^{AT}X(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A[(k+1)T-\tau]}BU(\tau)d\tau$$

T 为采样周期，设在 $kT\leqslant t\leqslant(k+1)T$ 范围内，$U(\tau)=U(kT)=$ 常数，并将 $X(kT)$ 简写为 $X(k)$，$U(kT)$ 简写为 $U(k)$ 则得

$$X(k+1)=e^{AT}X(k)+\int_{kT}^{(k+1)T}e^{A[(k+1)T-\tau]}BU(k)d\tau \qquad (11—2)$$

或
$$X(k+1)=GX(k)+HU(k) \qquad (11—3)$$

式中 $G=e^{AT}$

$$H=\int_{kT}^{(k+1)T}e^{[A(k+1)T-\tau]}Bd\tau$$

（11—3）式说明，已知现在的状态向量 $X(k)$ 及控制向量 $U(k)$，则由（11—3）式可决定未来（下一步）的状态向量 $X(k+1)$，而与过去无关。这是以向量形式表示的线性差分方程，称为向量离散状态方程。以后我们将（11—3）式写成下述形式

$$X(k+1)=AX(k)+BU(k)$$

如果系统是时变的，则离散系统的状态方程也是时变的，其形式如下：

$$X(k+1)=A(k)X(k)+B(k)U(k) \qquad (11—4)$$

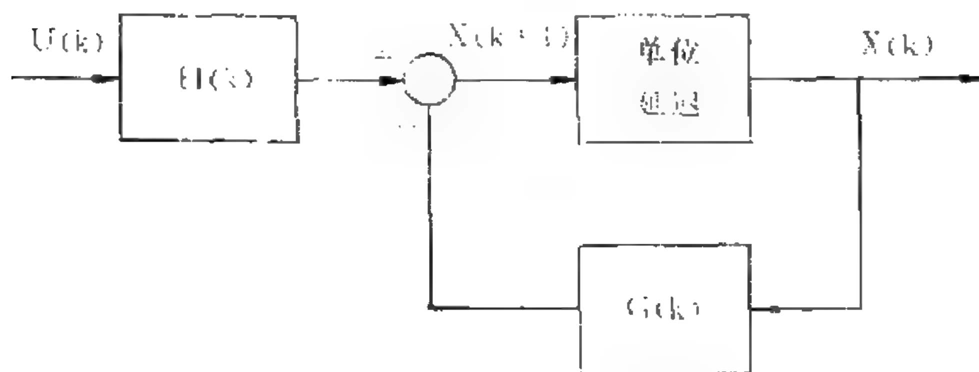


图 11—1 采样离散系统框图

图 11—1 表示线性离散系统的框图。

对于非线性系统可用下述状态方程表示：

连续系统 $\dot{X} = f_c[X(t), U(t), t]$

离散系统 $X(k+1) = f_d[X(k), U(k), k]$ (11—5)

由上可见，差分方程是描述离散时间系统的数学基础，在微分方程的数值求解方法中也常有应用。下一节我们先扼要介绍简单的差分方程及其解法。

§ 11-2 差 分 方 程

设图 11—2 所示的状态变量 $x(t)$ 满足下述微分方程：

$$c_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c_1\frac{dx(t)}{dt} + c_0x(t) = 0$$

在离散时刻 kT（T 为采样周期）[注]，用差商

$\frac{\triangle x(k)}{\triangle t} = \frac{\triangle x(k)}{T}$ 代替 $\frac{dx(t)}{dt}$，则上式变为

$$c_2\frac{\triangle^2 x(k)}{T^2} + c_1\frac{\triangle x(k)}{T} + c_0x(k) = 0$$

或 $b_2\triangle^2 x(k) + b_1\triangle x(k) + b_0x(k) = 0$ (11—6)

式中 $\triangle x(k) = x(k+1) - x(k)$ (11—7)

$\triangle x(k)$ 称为 $x(k)$ 的一阶差分，见图 11—3。

$x(k)$ 的二阶差分 $\triangle^2 x(k)$ 为：

$$\triangle^2 x(k) = \triangle x(k+1) - \triangle x(k)$$

$$= x(k+2) - 2x(k+1) + x(k) \quad (11—8)$$

[注] 设 T 为固定的。

将（11—7）、（11—8）代入（11—6）式，则差分方程可用另一种形式表示之：

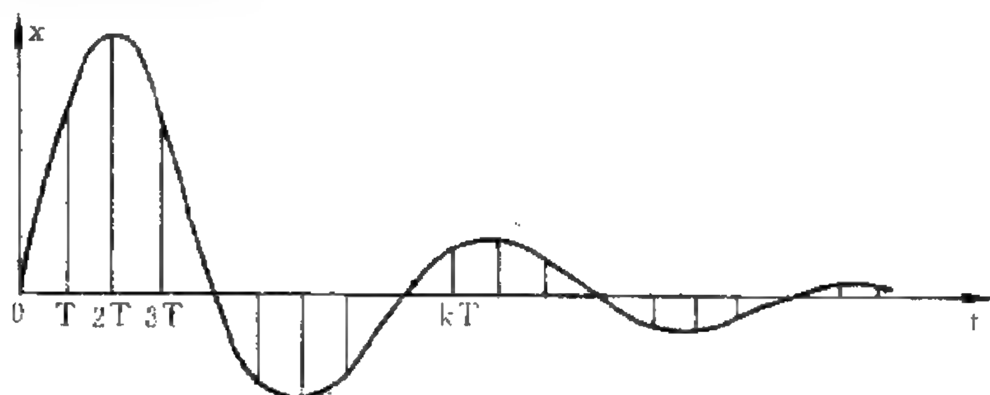


图 11—2 变量 $x(t)$ 离散时间取值

$$a_2x(k+2)+a_1x(k+1)+a_0x(k)=0 \qquad (11—9)$$

系数 b_0、b_1、b_2、与 a_0、a_1、a_2 关系为

$$b_2=a_2,\quad b_1=a_1+2a_2,\quad b_0=a_0+a_1+a_2$$

$x(k)$ 的 n 阶差分为：

$$\triangle^n x(k)=\triangle[\triangle^{n-1}x(k)]$$

令 $\quad Ex(k)=x(k+1)$

$$\triangle x(k)=x(k+1)-x(k)$$

$$=(E-1)x(k) \qquad (11—10)$$

符号 $\quad E=1+\triangle$

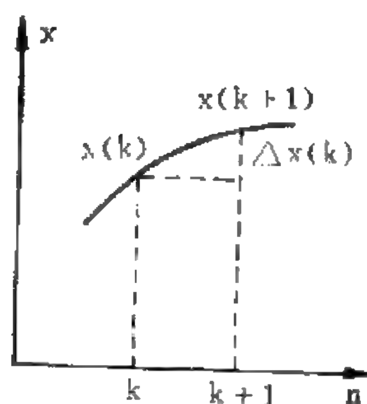


图 11—3 一阶差分

于是二阶差分可写成如下形式：

$$\triangle^2x(k)=(E^2-2E+1)x(k)=(E-1)^2x(k) \qquad (11—11)$$

$$E^2x(k)=x(k+2)$$

同理，
$$E^nx(k)=x(k+n) \qquad (11—12)$$

$$\triangle^nx(k)=(E-1)^nx(k) \qquad (11—13)$$

[例]
$$x(k)=k^3$$

$$\triangle x(k)=(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

$$\triangle^2 x(k) = \triangle x(k+1) - \triangle x(k)$$

$$= 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1 - (3k^2 + 3k + 1) = 6k + 6$$

$$\triangle^3 x(k) = \triangle^2 x(k+1) - \triangle^2 x(k) = 6(k-1) + 6 - (6k+6) = 6$$

$$\triangle^4 x(k) = \triangle^3 x(k+1) - \triangle^3 x(k) = 6 - 6 = 0$$

n 阶线性非齐次差分方程可表示如下：

$$a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \cdots + a_0 x(k) = u(k) \qquad (11—14)$$

当 $u(k)=0$ 时上式变为齐次差分方程，也可写成如下形式：

$$b_n \triangle^n x(k) + b_{n-1} \triangle^{n-1} x(k) + \cdots + b_0 x(k) = 0 \qquad (11—15)$$

[例]　$\triangle^3 x(k) + 4\triangle^2 x(k) + 5\triangle x(k) + 2x(k) = 0$

将（11—13）式代入得

$$(E-1)^3 x(k) + 4(E-1)^2 x(k) + 5(E-1) x(k) + 2x(k) = 0$$

化简得　　$x(k+1) + x(k) = 0$

可见这是一阶齐次差分方程，差分方程的阶次不由差分的阶次决定。

齐次线性差分方程的求解方法可用类似于齐次微分方程中特征方程及特征根的求解方法。

[例]　$$x(k+2) + b_1 x(k+1) + b_0 x(k) = 0 \qquad (11—16)$$

设解为　e^{sk}，即　$x(k) = e^{sk}$

$$e^{s(k+2)} + b_1 e^{s(k+1)} + b_0 e^{sk} = 0$$

令　$\lambda = e^s$，则上式可写成特征方程如下：

$$\lambda^2 + b_1 \lambda + b_0 = 0$$

求上式解，得特征根：$\lambda_1 = e^{s1}$，$\lambda_2 = e^{s2}$

原差分方程解为：

$$x(k)=c_1\lambda_1^k+c_2\lambda_2^k=c_1e^{s_1k}+c_2e^{s_2k} \qquad (11\text{—}17)$$

如果特征方程的解为一对重根 λ_1，则差分方程的解为：

$$x(k)=(c_1+c_2k)\lambda_1^k \qquad (11\text{—}18)$$

对于 n 阶线性齐次差分方程

$$p_nx(k+n)+\cdots+p_0x(k)=\sum_{j=0}^{n}p_jx(k+j)=0 \qquad (11\text{—}19)$$

设 p_j 不随 k 而变，且 $p_0\neq0$，$p_n\neq0$，则特征方程为

$$p_n\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+p_0\lambda=0$$

解出特征根，就可求解差分方程（11—19）。

[例 1]　$x(k+2)-3x(k+1)-4x(k)=0$

特征方程　$\lambda^2-3\lambda-4=0$

特征根为　$\lambda_1=4$，$\lambda_2=-1$

解为　$x(k)=c_14^k+c_2(-1)^k$

[例 2]　$x(k+2)+4x(k+1)+4=0$

特征方程　$\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$

有一对重根　$\lambda=-2$，-2

差分方程解为　$x(k)=c_1(-2)^k+c_2k(-2)^k$

[例 3]　$x(k+2)+n^2x(k)=0$

特征方程　$\lambda^2+n^2=0$

特征根为　$\lambda_{1,2}=\pm nj=ne^{\pm\frac{\pi}{2}j}$，　$j=\sqrt{-1}$

于是，差分方程解为 λ_1^k、λ_2^k 的线性组合。

$$\lambda_1^k=(ne^{\frac{\pi}{2}j})^k$$

$$\lambda_2^k=(ne^{-\frac{\pi}{2}j})^k$$

$$e^{j\frac{\pi k}{2}}=\cos\frac{\pi k}{2}+j\sin\frac{\pi k}{2}$$

因此可以求得差分方程的解为

$$x(k)=n^k\left[c_1\cos\frac{\pi k}{2}+c_2\sin\frac{\pi k}{2}\right]$$

非齐次线性差分方程可以用迭代法求解，也可以用 Z 变换法求解。

1. 迭代法

设有差分方程为

$$x(k+1)=ax(k)+bu(k) \tag{11—20}$$

初始值为 $x(0)=x_0$

$k=0,\quad x(1)=ax_0+bu(0)$

$k=1,\quad x(2)=ax(1)+bu(1)$

$\qquad\qquad =a^2x_0+abu(0)+bu(1)$

$k=2,\quad x(3)=ax(2)+bu(2)$

$\qquad\qquad =a^3x_0+a^2bu(0)+abu(1)+bu(2)$

……………

因此，
$$x(k)=a^kx_0+\sum_{n=0}^{k-1}a^{k-n-1}bu(n) \tag{11—21}$$

(11—21) 式中 a^kx_0 为初始状态产生的解，当输入 $u_k=0(k=0,1,\cdots,k-1)$ 时，$x(k)=a^kx_0$，故这一项也可称为零输入解。这是解的自由分量。当初始状态 $x_0=0$ 时，$x(k)=\sum_{n=0}^{k-1}a^{k-n-1}bu(n)$，是输入

$u(k)$ 产生的解，称为零状态解。这是解的强制分量。

上述迭代法也适用于向量差分方程的求解。

2. Z 变换法

Z 变换变量定义为 $$Z = e^{Ts} \qquad (11\text{—}22)$$

式中 S 为拉氏变换变量，T 为采样周期。

设有离散函数 $x(k)$，

则 $x(k)$ 的拉氏变换（称为离散拉氏变换）即为 $x(k)$的 Z 变换。记作

$$X(Z) = z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) Z^{-k} \qquad (11\text{—}23)$$

$X(Z)$ 的 Z 反变换记作

$x(k) = z^{-1}[X(Z)]$。z 及 z^{-1} 分别为 Z 变换及 Z 反变换符号。

用 Z 变换方法可将差分方程变换为变量 Z 的代数方程，这时，初始条件自动包含在内，解这个代数方程，得到 $X(Z)$，再作 Z 反变换，即得离散时域解 $x(k)$。

一般函数的 Z 变换和 Z 反变换可查阅 Z 变换表。几个常用函数的 Z 变换见下表：

冲激函数滞后一个采样周期	Z^{-1}
冲激函数	1
单位阶跃函数	$\frac{Z}{Z-1}$
a^k	$\frac{Z}{Z-a}$
a^{k-1}	$\frac{1}{Z-a}$

差分的 Z 变换公式可如下推得：

$$z[x(k+1)] = ZX(Z) - Zx(0)$$

$$z[x(k+2)] = Z^2X(Z) - Z^2x(0) - Zx(1)$$

………

$$z[x(k+n)] = Z^nX(Z) - Z^nx(0) - Z^{n-1}x(1) - \cdots - Zx(n-1)$$

则
$$z[\triangle x(k)] = z[x(k+1)] - z[x(k)]$$
$$= Z[X(Z) - x(0)] - X(Z)$$
$$= (Z-1)X(Z) - Zx(0)$$

$$z[\triangle^2 x(k)] = z[\triangle x(k+1)] - z[\triangle x(k)]$$
$$= (Z-1)^2X(Z) - Z(Z-1)x(0) - Z\triangle x(0)$$

$$\triangle x(0) = x(1) - x(0)$$

………

$$z[\triangle^n x(k)] = (Z-1)^n X(Z) - Z\sum_{r=0}^{n-1}(Z-1)^{n-1-r}\triangle^r x(0)$$

$r=0$ 时，$\triangle^r x(0) = x(0)$

用 Z 变换法求解差分方程举例。

[例 1]
$$x(k+1) = ax(k) + bu(k)$$

设 $u(k) = u\cdot 1(k)$，$1(k)$ 为单位阶跃函数。

$x(0) = x_0$

则对上述差分方程两边取 Z 变换（参阅变换表）：

$$ZX(Z) - Zx(0) = aX(Z) + bu\frac{Z}{Z-1}$$

$$\frac{Z-a}{Z}X(Z) = x_0 + bu\frac{1}{Z-1}$$

$$X(Z) = \frac{Z}{Z-a}x_0 + \frac{bu}{Z-a}\cdot\frac{Z}{Z-1}$$

求 Z 反变换得：

$$x(k)=a^k x_0+bu\frac{1-a^k}{1-a}$$

$$=a^k x_0+\sum_{n=0}^{k-1} ba^{k-n-1}u(n)$$

与（11—21）式一致，上式中 $u(n)$ 为常数。

[例 2] $x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0$

已知 $x(0)=0,\ x(1)=1$

对差分方程取 Z 变换得

$$Z^2X(Z)-Z^2x(0)-Zx(1)+3ZX(Z)-3Zx(0)+2X(Z)=0$$

或 $$Z^2X(Z)-Z+3ZX(Z)+2X(Z)=0$$

$$X(Z)=\frac{Z}{Z^2+3Z+2}=\frac{Z}{Z+1}-\frac{Z}{Z+2}$$

取 Z 反变换得差分方程解为：

$$x(k)=(-1)^k-(-2)^k$$

由状态方程画出的结构框图称为状态图，例如

$$x(k+1)=ax(k)+bu(k),\quad x(0)=0,$$

其状态图如图 11—4。图中 Z^{-1} 表示延迟一个采样周期。

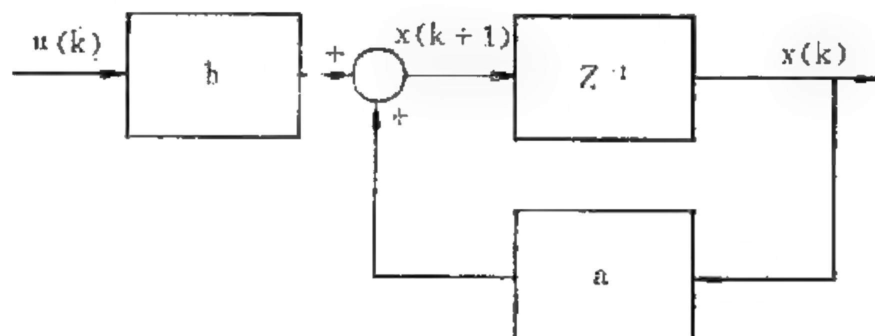


图 11—4 $x(k+1)=ax(k)+bu(k)$ 的状态图

对上述差分方程两边取 Z 变换得

$$ZX(Z)=aX(Z)+bU(Z)$$

或
$$U(Z)\frac{b}{Z-a}=X(Z)$$

与上式对应的方框图如图 11－5。

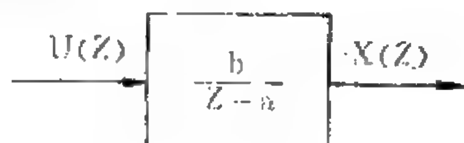


图 11—5 $x(k+1)=ax(k)+bu(k)$ 的 Z 变换框图

因此，由方块图很容易得到相应的状态图，由状态图也可画出相应的方块图。

下面我们以离散电路为例，说明建立差分方程及求解离散电路的方法。

［例 1］ 周期性开关电路（图 11—6）

在图 11—6 所示的周期性开关电路中，开关 K 在 $nT\leqslant t\leqslant(n+r)T$ 期间合在位置 1，使电容 C 通过 R_1 由电源电压 U 充电，如图 11—7a。在 $(n+r)T\leqslant t\leqslant(n+1)T$ 期间，开关 K 合于位置 2，电容对 R_2 放电，如图 11—7b。

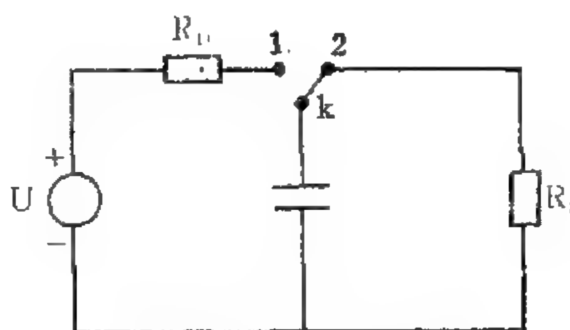
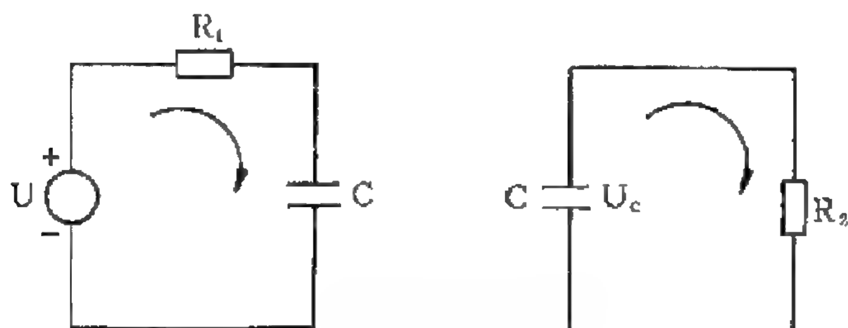


图 11—6 RC 电路周期性充放电

电路方程为 $nT\leqslant t\leqslant(n+r)T$，　$R_1C\dfrac{du_c}{dt}+u_c=U$

$$(n+r)T\leqslant t\leqslant(n+1)T,\qquad R_2C\frac{du_c}{dt}+u_c=0$$

$$0<r<1。$$



(a) $nT \leqslant t \leqslant (n+r)T$　　　(b) $(n+r)T \leqslant t \leqslant (n+1)T$

图 11—7　充电及放电阶段的电路模型

令　$t = kT$，则 $k = t/T$，

又令　$\alpha = \dfrac{R_1C}{T}$，　$\beta = \dfrac{R_2C}{T}$，

电路方程可写成

$$n \leqslant k \leqslant n+r, \qquad \alpha\frac{du_c}{dk} + u_c = U$$

$$n+r \leqslant k \leqslant n+1, \qquad \beta\frac{du_c}{dk} + u_c = 0$$

解之得：

$$n \leqslant k \leqslant n+r \qquad u_c(k) = U + Ae^{-\alpha(k-n)}$$

$$n+r \leqslant k \leqslant n+1 \qquad u_c(k) = Be^{-\beta(k-n-r)}$$

求积分常数 A，B：

$k = n+r$ 时，　$u_c(k) = u_c(n+r)$

$k = n$ 时，　$u_c(k) = u_c(n)$

求得　$A = u_c(n) - U$

而　$u_c(n+r) = U + Ae^{-\alpha r}$

$B = u_c(n+r) = U + Ae^{-\alpha r}$，故得

$n \leqslant k \leqslant n+r,\qquad u_c(k)=U+[u_c(n)-U]e^{-\alpha(k-n)}$

$n+r \leqslant k \leqslant n+1,\quad u_c(k)=\{U+[u_c(n)-U]e^{-\alpha r}\}e^{-\beta(k-n-r)}$

令 $k=n+1$，可得电容电压的差分方程

$$u_c(n+1)-e^{-\alpha r-\beta(1-r)}u_c(n)=U(1-e^{-\alpha r})e^{-\beta(1-r)}$$

为了简写，上式中令 $\theta=\alpha r+\beta(1-r)$，$c=U(1-e^{-\alpha r})e^{-\beta(1-r)}$，

则得 $\qquad u_c(n+1)-e^{-\theta}u_c(n)=c$

取等式两边 Z 变换，设 $u_c(0)=0$

$$ZU_c(Z)-e^{-\theta}U_c(Z)=\frac{cZ}{Z-1}$$

$$U_c(Z)=\frac{cZ}{(Z-e^{-\theta})(Z-1)}$$

求 Z 反变换，得

$$u_c(n)=\frac{c}{1-e^{-\theta}}(1-e^{-\theta n})$$

于是任意时刻电容电压的变化规律为

$n \leqslant k \leqslant n+r,\qquad u_c(k)=U+\left(c\dfrac{1-e^{-\theta n}}{1-e^{-\theta}}-U\right)e^{-\alpha(k-n)}$,

$n+r \leqslant k \leqslant n+1,\qquad u_c(k)=U+\left(c\dfrac{1-e^{-\theta n}}{1-e^{-\theta}}-U\right)e^{-\beta(k-n-r)}$。

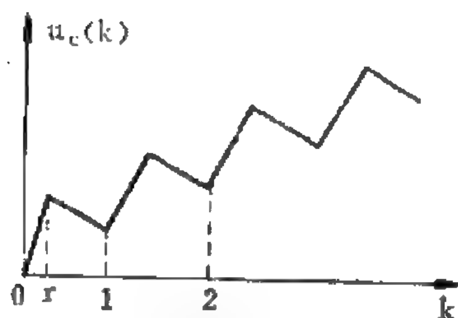


图 11—8 电容电压 $u_c(k)$

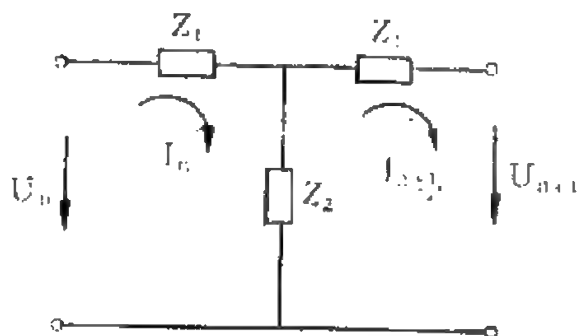


图 11—9 链式电路中第 n 单元

图 11—8 表示电容电压 $u_c(k)$ 随 k 的变化曲线。

[例 2] 链式电路

用数学方法分析链式电路（如滤波器、分压器、长线等效电路等）的物理过程时，常会碰到差分方程。图 11—9 表示组成链式电路的第 n 个单元电路，它是 T 型两端口网络。

设链式电路输入为正弦电压（频率为 w），在研究稳态工作情况时，用复数值表示第 n 个单元的电压和电流：

$$U_n = U(n)、I_n = I(n) \quad 均为相量$$

每个单元的阻抗 $Z_1 = Z_1(jw)$，$Z_2 = Z_2(jw)$

由电路基本定理得

$$(Z_1 + Z_2)I(n) - Z_2 I(n+1) - U(n) = 0$$

$$Z_2 I(n) - (Z_1 + Z_2) I(n+1) - U(n+1) = 0$$

这是两元一阶齐次差分方程，消去一个变量，可得二阶齐次差分方程

$$Z_2 I(n+2) - 2(Z_1 + Z_2) I(n+1) + Z_2 I(n) = 0$$

或 $$I(n+2) - 2(1 + \frac{Z_1}{Z_2}) I(n+1) + I(n) = 0$$

同理可得：

$$U(n+2) - 2(1 + \frac{Z_1}{Z_2}) U(n+1) + U(n) = 0$$

现在对两元差分方程组进行 Z 变换

$$z[I(n+1)] = ZI(Z) - ZI(0)$$

$$z[U(n+1)] = ZU(Z) - ZU(0)$$

$I(0)$ 及 $U(0)$ 为边界值，即取 $n=0$ 时的 $I(n)$ 及 $U(n)$ 。于是得到两元代数方程组：

$$(Z_1 + Z_2) I(Z) - Z_2 Z[I(Z) - I(0)] - U(Z) = 0$$

$$Z_2 I(Z) - (Z_1 + Z_2) Z[I(Z) - I(0)] - Z[U(Z) - U(0)] = 0$$

Z 代表 Z 变换的变量，Z_1、Z_2 代表阻抗，不要混淆。求解上述方程组，并令

$$\mathrm{ch}\,x = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$\mathrm{sh}\,x = \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)^2 - 1}\ ,\ x \text{ 为常数。}$$

$\mathrm{ch}\,x$ 及 $\mathrm{sh}\,x$ 为双曲线余弦函数及双曲线正弦函数。
可得解为

$$I(Z) = \frac{Z(Z - \mathrm{ch}\,x)I(0) - Z\dfrac{U(0)}{Z_2}}{Z^2 - 2Z\mathrm{ch}x + 1}$$

$$U(Z) = \frac{Z(Z - \mathrm{ch}x)U(0) - Z\mathrm{sh}^2 x Z_2 I(0)}{Z^2 - 2Z\mathrm{ch}x + 1}$$

已知 $$\mathrm{sh}xn = \frac{1}{2}(e^{xn} - e^{-xn})$$

$$z(\mathrm{sh}\,xn) = \frac{Z\mathrm{sh}x}{Z^2 - 2Z\mathrm{ch}x + 1}$$

$$\mathrm{ch}xn = \frac{1}{2}(e^{xn} + e^{-xn})$$

$$z(\mathrm{ch}xn) = \frac{Z(Z - \mathrm{ch}x)}{Z^2 - 2Z\mathrm{ch}x + 1}$$

利用上式可得 Z 反变换结果：

$$I(n) = I(0)\mathrm{ch}xn - \frac{U(0)}{Z_2\mathrm{sh}x}\mathrm{sh}xn$$

$$= I(0)\mathrm{ch}xn - U(0)Y\mathrm{sh}xn$$

$$U(n)=U(0)\operatorname{ch}xn-I(0)Z_2\operatorname{sh}x\operatorname{sh}xn$$

$$=U(0)\operatorname{ch}xn-I(0)\frac{1}{Y}\operatorname{sh}xn$$

式中 $$Y=\frac{1}{Z_2\operatorname{sh}x}=\frac{1}{Z_2\sqrt{\left(1+\frac{Z_1}{Z_2}\right)^2-1}}。$$

解 $I(n)$ 及 $U(n)$ 与边界条件 $I(0)$ 及 $U(0)$ 有关，取决于链式电路的初端与终端状态。

现在我们分析一个特殊情况，即链式电路共分 N 级（$n=0,1,\cdots,N-1$）。电路由正弦电压供电，其有效值为 $U(0)=U_0$，输出端短路，即 $U(N)=0$，因此，当 $n=N$ 时，

$$0=U_0\operatorname{ch}xN-I(0)\frac{1}{Y}\operatorname{sh}xN$$

$$I(0)=U_0Y\frac{\operatorname{ch}xN}{\operatorname{sh}xN}=U_0Y\operatorname{cth}xN$$

故得第 n 级的电流和电压为

$$I(n)=U_0Y[\operatorname{cth}xN\operatorname{ch}xn-\operatorname{sh}xn]$$

$$=U_0Y\frac{\operatorname{ch}x(N-n)}{\operatorname{sh}xN}$$

$$U(n)=U_0[\operatorname{ch}xn-\operatorname{cth}xN\operatorname{sh}xn]$$

$$=U_0\frac{\operatorname{sh}x(N-n)}{\operatorname{sh}xN}$$

另一种特殊情况是链式电路的末端开路，即当 $n=N$ 时，$I(N)=0$. 于是可得：

$$I(0)=U_0Y\operatorname{th}xN$$

$$I(n) = U_0Y(\text{th}\,xN\,\text{ch}\,xn - \text{sh}\,xn)$$

$$= U_0Y\frac{\text{sh}\,x(N-n)}{\text{ch}\,xN}$$

$$U(n) = U_0(\text{ch}\,xn - \text{th}\,xN\,\text{sh}\,xn)$$

$$= U_0\frac{\text{ch}\,x(N-n)}{\text{ch}\,xN}$$

§ 11-3　离散的欧拉方程

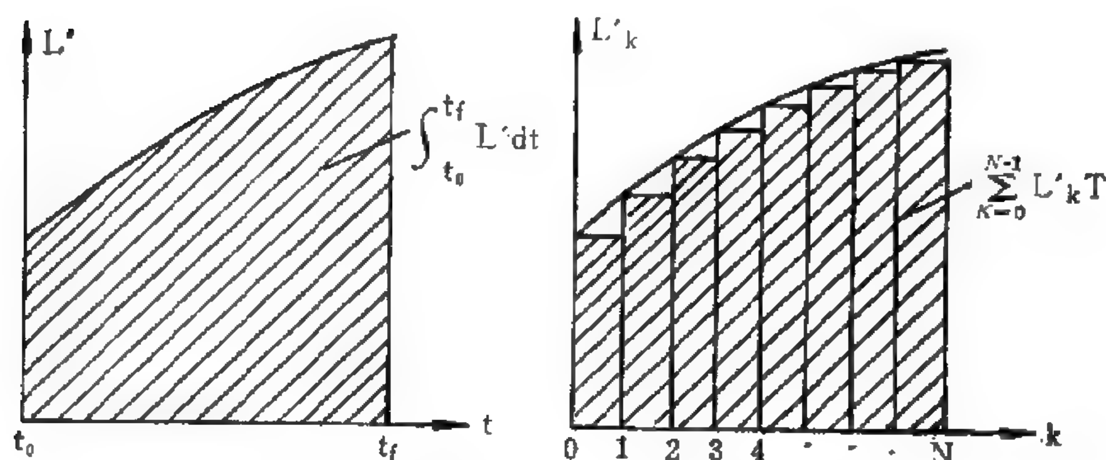
设连续系统的指标泛函为

$$J = \int_0^{t_f} L'[X(t),\ U(t),\ t]dt \qquad (11-24)$$

状态方程：$\dot{X} = \mathbf{f}[X(t),\ U(t),\ t]$

将系统离散化以后，（设 T 为采样周期，$t_f = NT$），

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} L'[X(k),\ U(k),\ k]T \qquad (11-25)$$



（a）连续时间　　（b）离散时间

图 11—10　指标泛函的示意图

$$X(k+1)=f[X(k),\ U(k),\ k]$$ [注]

图 11—10 表示（11—24）和（11—25）式两种指标泛函的差别。令 $L=L'T$，$X_k=X(k)$，$X_{k+1}=X(k+1)$，则（11—25）式可表示为

$$J=\sum_{k=0}^{N-1} L(X_k,\ U_k,\ k) \tag{11—26}$$

状态方程为 $$X_{k+1}=f(X_k,\ U_k,\ k) \tag{11—27}$$

将（11—27）式代入(11—26)式，消去 U_k，则指标泛函也可写成

$$J=\sum_{k=0}^{N-1} L(X_k,\ X_{k+1},\ k)=\sum_{k=0}^{N-1} L_k \tag{11—28}$$

在（11—28）式中分别对 X_k 及 X_{k+1} 取变分

并令 $\delta X_k=\delta X(k)$，$\delta X_{k+1}=\delta X(k+1)$，则 J 的变分 δJ 为

$$\delta J=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\delta X_k^T\frac{\partial L_k}{\partial X_k}+\delta X_{k+1}^T\frac{\partial L_k}{\partial X_{k+1}}\right] \tag{11—29}$$

若求 J 的最小值，则 $\delta J=0$。

令 $$\sum_{k=0}^{N-1}\delta X_{k+1}^T\frac{\partial L_k}{\partial X_{k+1}}=\sum_{k=1}^{N}\delta X_k^T\frac{\partial L_{k-1}}{\partial X_k}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\delta X_k^T\frac{\partial L_{k-1}}{\partial X_k}+\delta X_k^T\frac{\partial L_{k-1}}{\partial X_k}\Bigg|_{k=0}^{k=N} \tag{11—30}$$

将（11—30）式代入（11—29）式，并令为零可得

$$\sum_{k=0}^{N-1}\delta X_k^T\left[\frac{\partial L(X_k,X_{k+1},k)}{\partial X_k}+\frac{\partial L(X_{k-1},X_k,k-1)}{\partial X_k}\right]+$$

$$\left[\delta X_k^T\frac{\partial L(X_{k-1},X_k,k-1)}{\partial X_k}\right]_{k=0}^{k=N}=0 \tag{11—31}$$

[注] 为了简化书写，离散化以后的状态方程中仍取函数符号为 f。

δX_k 是任意取变分，$\delta X_k \neq 0$，所以为保证（11—31）式为零，应有：

$$\frac{\partial L(X_k, X_{k+1}, k)}{\partial X_k} + \frac{\partial L(X_{k-1}, X_k, k-1)}{\partial X_k} = 0 \qquad (11\text{—}32)$$

$$\left[\delta X_k^T \frac{\partial L(X_{k-1}, X_k, k-1)}{\partial X_k}\right]_{k=0}^{k=N} = 0 \qquad (11\text{—}33)$$

（11—32)(11—33）两式为（11—28）式 J 等于极小值的必要条件。（11—32）式为离散欧拉方程。（11—33）式为横截条件的离散形式。连续系统中有关横截条件的讨论可以应用于离散情况。求等式约束下离散系统的极值问题也可以应用拉格朗日方法。

[例]
$$\min\ J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{9} u^2(k)$$

$$x(k+1) = x(k) + au(k)$$

$$x(0) = 1,\ x(10) = 0$$

解：用拉格朗日方法构造增广泛函

$$J' = \sum_{k=0}^{9}\left\{\frac{1}{2}u^2(k) + \lambda(k+1)\left[-x(k+1) + x(k) + au(k)\right]\right\}$$

注意在上式中，我们取拉格朗日函数为 $\lambda(k+1)$，而不是 $\lambda(k)$。

定义 $\quad L_k = \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda(k+1)\left[-x(k+1) + x(k) + au(k)\right]$

应用欧拉方程

$$\frac{\partial L_k}{\partial X_k} + \frac{\partial L_{k-1}}{\partial X_k} = 0$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial U_k} + \frac{\partial L_{k-1}}{\partial U_k} = 0$$

可求得 $\frac{\partial L_k}{\partial x_k}=\lambda(k+1)$, $\frac{\partial L_k}{\partial u_k}=u(k)+a\lambda(k+1)$,

$$\frac{\partial L_{k-1}}{\partial x_k}=-\lambda(k),\qquad \frac{\partial L_{k-1}}{\partial u_k}=0$$

代入欧拉方程，得

$$\lambda(k)-\lambda(k+1)=0$$

$$u(k)+a\lambda(k+1)=0$$

解：得

$$\lambda(k)=c\ (\text{常数})$$

$$u(k)=-ac$$

代入状态方程 $x(k+1)=x(k)+au(k)=x(k)-a^2c$

用迭代法解上述差分方程：

$$x(1)=x(0)-a^2c$$

$$x(2)=x(1)-a^2c=x(0)-2a^2c$$

$$x(3)=x(2)-a^2c=x(0)-3a^2c$$

$$\vdots$$

$$x(k)=x(0)-ka^2c$$

由边界条件 $x(0)=1$，$x(10)=0$，

$$x(10)=0=1-10a^2c$$

$$c=\frac{1}{10a^2}$$

故得该离散系统的最优控制为：

$$u^*(k)=-\frac{1}{10a}$$

最优轨线为：

$$x^*(k)=x(0)-ka^2c=1-\frac{k}{10}$$

§ 11-4 离散极大值原理

应用离散欧拉方程求解有等式约束和不等式约束的离散极值问题是十分麻烦的，这种情况和连续系统的最优控制问题类似，我们可以引入离散哈密顿函数应用离散极大值原理来求解离散极值的必要条件和离散系统的最优控制。

离散系统的最优控制问题的数学模型为：

$$\min\ J=\theta[X_N,N]+\sum_{k=0}^{N-1}L(X_k,U_k,k) \tag{11—34}$$

$$X_N=X(N)$$

$$X_{k+1}=\mathbf{f}(X_k,U_k,k),\qquad k=0,1,\cdots,N-1。$$

不等式约束 $U_k\in R_U$，R_U 为允许控制域。

求最优控制序列 U_k，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$。

应用离散极大值原理可求解上述问题，构造离散的哈密顿函数：

$$H(X_k,U_k,\lambda_{k+1},k)=L(X_k,\ U_k,\ k)+\lambda^T{}_{k+1}\mathbf{f}(X_k,U_k,k) \tag{11—35}$$

设 $U_k^*(k=0,1,\cdots,N-1)$ 为最优控制序列，$X_k^*(k=0,\ 1,\ \cdots,\ N)$ 为 U^* 产生的最优状态响应序列，由状态方程决定。

离散极大值原理可叙述如下：

对于上述系统，存在伴随向量 λ_k^* 满足下述关系：

$$\lambda_k^*=\frac{\partial H(X_k^*,U_k^*,\lambda^*{}_{k+1},k)}{\partial X_k^*} \tag{11—36}$$

并有 $k=0$ 时，
$$\lambda^*(0)-\left.\frac{\partial\theta}{\partial X^*}\right|_{k=0}=0$$

$k=N$ 时
$$\lambda^*(N)-\left.\frac{\partial\theta}{\partial X^*}\right|_{k=N}=0$$

对所有 $k=0$，1，…，$N-1$，均有：

$$H(X_k^*,U_k^*,\lambda^*_{k+1},k)=\min\ H(X_k^*,U_k,\lambda^*_{k+1},k) \quad (11—37)$$

即求（11—34）式指标泛函为极小与求（11—35）式哈密顿函数为极小是等价的，U_k^* 是在所有允许控制域 U_k 中能使 H 为极小的最优控制。

如果没有允许控制域的约束，即 U_k 可在整个欧氏空间中取值，则（11—37）式可写作：

$$\frac{\partial H(X_k^*,\lambda^*_{k+1},U_k^*,k)}{\partial U_k}=0 \quad (11—38)$$

$k=0$，1，…，$N-1$

这是最优控制的必要条件。

（11—38）式可证明如下：

应用伴随向量 λ_{k+1} 和哈密顿函数 H_k，$H_k=H(X_k,U_k,\lambda_{k+1},k)$，见（11—35）式，构造增广泛函

$$J'=\theta[X_N,N]+\sum_{k=0}^{N-1}[H_k-\lambda^T_{k+1}X_{k+1}] \quad (11—39)$$

求（11—34）式指标泛函为极小等价于求（11—39）式 J' 为极小。对 X_k 及 U_k 分别独立取变分：

$$\delta J'=\left(\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right)^T\delta X_k\Big|_{k=N}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial H_k{}^T}{\partial U_k}\delta U_k+$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial H_k{}^T}{\partial X_k}\delta X_k-\delta\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^T_{k+1}X_{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^T_{k+1}X_{k+1}=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k{}^TX_k=\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k{}^TX_k+\lambda_k{}^TX_k\Big|_{k=0}^{k=N}$$

$$\therefore \quad -\delta \sum_{k=0}^{N-1} \lambda^T{}_{k+1} X_{k+1} = -\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k{}^T \delta X_k - \lambda_k{}^T \delta X_k \Big|_{k=N} +$$

$$\lambda_k{}^T \delta X_k \Big|_{k=0}$$

为使 J' 为极小，$\delta J'=0$，而 δX_k、δU_k 是独立取的变分，故应有

$$\frac{\partial H_k}{\partial U_k}=0$$

$$\lambda_k=\frac{\partial H_k}{\partial X_k}$$

$k=N$ 时，　　$\lambda_k=\frac{\partial \theta}{\partial X_k}\Big|_{k=N}$

$k=0$ 时，　　$\lambda_k=0$

如果指标泛函（11—34）式中第一项不是 $\theta[X_N,N]$，而是 $\theta(X_k,k)\Big|_{k=0}^{k=N}$，则可证明 $k=0$ 时也有如下关系成立：

$$k=0, \qquad \lambda_k=\frac{\partial \theta}{\partial X_k}\Big|_{k=0}$$

这就证明了（11—36）式及（11—38）式。

我们看到，在构造哈密顿函数（11—35）式时，引用了 λ_{k+1}，因而得到最优控制的必要条件之一，$\lambda_k=\frac{\partial H_k}{\partial X_k}$，即（11—36）式。这就解释了为什么在离散系统最优控制问题中引入的伴随向量是 $\lambda(k+1)$ 而不是 $\lambda(k)$。

由 $\frac{\partial H_k}{\partial U_k}=0$，可得 U_k 与 λ_{k+1} 的关系式，代入状态方程得

$$X_{k+1}=f(X_k,\lambda_{k+1},k) \qquad (11\text{—}40)$$

由 $\frac{\partial H_k}{\partial X_k}=\lambda_k$，可得 λ_{k+1} 与 λ_k、X_k 的关系式：

$$\lambda_{k+1} = g(X_k, \lambda_k, k) \tag{11—41}$$

(11—40)、(11—41)两式是两点边值问题的差分方程，即离散的正则方程组。用反复逼近方法在数字机上求解这组非线性差分方程，可得 X_k 及 λ_k。

在求解连续系统最优控制问题时，只要选择好准确的离散模型，也可以用离散极大值原理来求解。

§ 11-5 离散线性调节器问题

设指标泛函是二次型，系统是线性离散的，则这个最优控制问题是离散的线性二次型问题。其数学模型可表示如下：

$$\min \; J = \frac{1}{2} X_N{}^T S X_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (X_k{}^T Q X_k + U_k{}^T R U_k) \tag{11—42}$$

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

$$X(0) = X_0$$

求最优控制序列 $U^*(k)$。

(11—42) 式中权矩阵 S 和 Q 是半正定的，R 是正定的，S 为定常的，Q 和 R 也可以是时变的。

对于时变系统说，状态方程中 A 和 B 是时变的。

求解这一问题，首先构造哈密顿函数：

$$H_k = H(X_k, U_k, \lambda_{k+1}, k) = \frac{1}{2} X_k{}^T Q X_k + \frac{1}{2} U_k{}^T R U_k + \lambda_{k+1}(AX_k + BU_k) \tag{11—43}$$

由 (11—36) 式 $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial X_k}$，则有

$$\lambda_k = QX_k + A^T \lambda_{k+1} \tag{11—44}$$

终端边界条件 $\left[\lambda_k-\frac{\partial\theta}{\partial X_k}\right]_{k=N}=0$，而 $\theta=\frac{1}{2}X_N{}^TSX_N$

故得边界条件为

$$\lambda(N)=SX(N) \qquad (11—45)$$

这个最优控制问题没有对控制变量提出约束限制，因此可用（11—38）式 $\frac{\partial H_k}{\partial U_k}=0$，得

$$RU_k+B^T\lambda_{k+1}=0 \qquad (11—46)$$

$U_k^*=-R^{-1}B^T\lambda_{k+1}$，因为 R 是正定的，故其逆存在，代入状态方程，得：

$$X_{k+1}=AX_k-BR^{-1}B^T\lambda_{k+1} \qquad (11—47)$$

$$\lambda_k=QX_k+A^T\lambda_{k+1} \qquad (11—48)$$

$$X(0)=X_0$$

$$\lambda(N)=SX(N)$$

这组线性差分方程是离散正则方程组，是两点边值问题，求解这组方程可得最优控制。

设方程解的形式为

$$\lambda_k=P_kX_k \qquad (11—49)$$

P_k 为待求的对称正定矩阵，$P_k=P(k)$，

将（11—49）代入（11—47）、（11—48）两式，消去 λ_k 可得

$$X_{k+1}=AX_k-BR^{-1}B^TP_{k+1}X_{k+1} \qquad (11—50)$$

$$P_kX_k=QX_k+A^TP_{k+1}X_{k+1} \qquad (11—51)$$

解（11—50）式可得

$$X_{k+1}=[I+BR^{-1}B^TP_{k+1}]^{-1}AX_k \qquad (11—52)$$

代入（11—51）式可得

$$P_k X_k = QX_k + A_k^T P_{k+1}[I + BR^{-1}B^T P_{k+1}]^{-1}AX_k \quad (11—53)$$

$$P_k = Q + A^T P_{k+1}[I + BR^{-1}B^T P_{k+1}]^{-1}A$$

$$= Q + A^T[P_{k+1}^{-1} + BR^{-1}B^T]^{-1}A \quad (11—54)$$

终端条件由（11—49）及（11—45）可得

$$P_N = S \quad 或 \quad P(N) = S \quad (11—55)$$

（11—54）式为矩阵 Riccati 差分方程，即 Riccati 方程的离散形式。从 $k=N$ 到 $k=0$ 逆推求解（11—54）式可得 $P(k)$。由（11—46）及（11—48）式

$$U_k^* = -R^{-1}B^T\lambda_{k+1}$$

$$\lambda_k = P_k X_k = QX_k + A^T\lambda_{k+1}$$

消去 λ_{k+1}，可得

$$U_k^* = -R^{-1}B^T(A^T)^{-1}(P_k - Q)X_k = -F_k X_k \quad (11—56)$$

F_k 为反馈增益阵，F_k 的另一种表示方法可推导如下：

$$U_k^* = -R^{-1}B^T\lambda_{k+1} = -R^{-1}B^T P_{k+1}X_{k+1}$$

由（11—52）式，　$X_{k+1} = [I + BR^{-1}B^T P_{k+1}]^{-1}AX_k$

消去 X_{k+1}，可得

$$U_k^* = -R^{-1}B^T[P_{k+1}^{-1} + BR^{-1}B^T]^{-1}AX_k$$

$$= -F_k X_k \quad (11—57)$$

$$F_k = R^{-1}B^T[P_{k+1}^{-1} + BR^{-1}B^T]^{-1}A$$

反馈增益阵的计算是离线进行的，事先存储在计算机的存储器中，以便对物理系统进行实时控制，称为离线计算、实时控制。图11—11 为离散线性调节器最优控制框图。

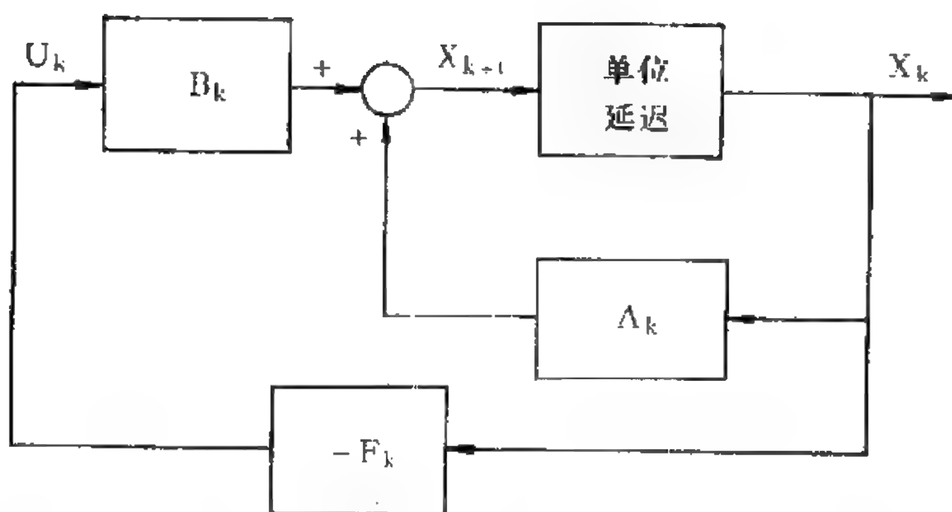


图 **11—11** 离散线性调节器最优控制框图

[例] $\min\ J=\sum_{k=0}^{2}(x_k^2+u_k^2)$

$$x_{k+1}=x_k+u_k$$

解：本例中 $A=1,\ B=1,\ Q=R=1,\ S=0,\ N=3$

由（11—55）式 $P(3)=0$，$P(k)$ **是一维的。**

由（11—54）式 $P_k=1+\dfrac{P_{k+1}}{1+P_{k+1}}$

用迭代法求解，可得

$$P_2=1$$

$$P_1=1+\frac{P_2}{1+P_2}=\frac{3}{2},$$

$$P_0=1+\frac{P_1}{1+P_1}=\frac{8}{5}.$$

由（11—57）式 $F_k=\dfrac{P_{k+1}}{1+P_{k+1}}$，$u_k^*=-F_kx_k$

$$\therefore \qquad u_0^* = -\frac{3}{5}x_0$$

$$u_1^* = -\frac{1}{2}x_1$$

$$u_2^* = 0$$

$$J^* = \min J = \min \sum_{k=0}^{2}(x_k^2 + u_k^2) = \min[x_0^2 + u_0^2 + x_1^2 + u_1^2 + x_2^2$$

$$+ u_2^2] = x_0^2\left(1 + \frac{9}{25}\right) + x_1^2\left(1 + \frac{1}{4}\right) + x_2^2$$

由状态方程 $x_1 = \frac{2}{5}x_0$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{5}x_0$$

代入得 $J^* = \frac{8}{5}x_0^2$

由 $J^* = X^T{}_0 P_0 X_0 = \frac{8}{5}x_0^2$，可见计算结果是一致的。

§ 11-6 离散极大值原理与连续极大值原理的比较

求离散系统的最优控制序列是一个多步决策过程，如图 11—12。在时间上分成 N 段（$k=1, 2, \cdots, N$），系统的状态一步一步地转移（从 X_k 转移到 X_{k+1}），每一步有一个控制变量作用，在最优控制序列 $U^*(k)$ 作用下，状态转移轨线是最优的。

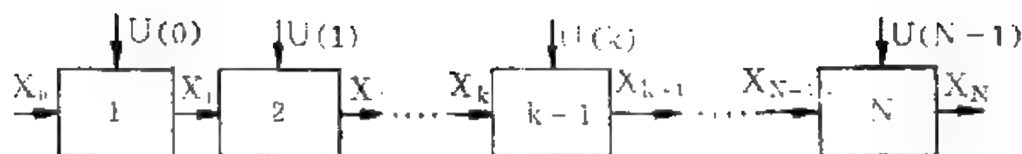
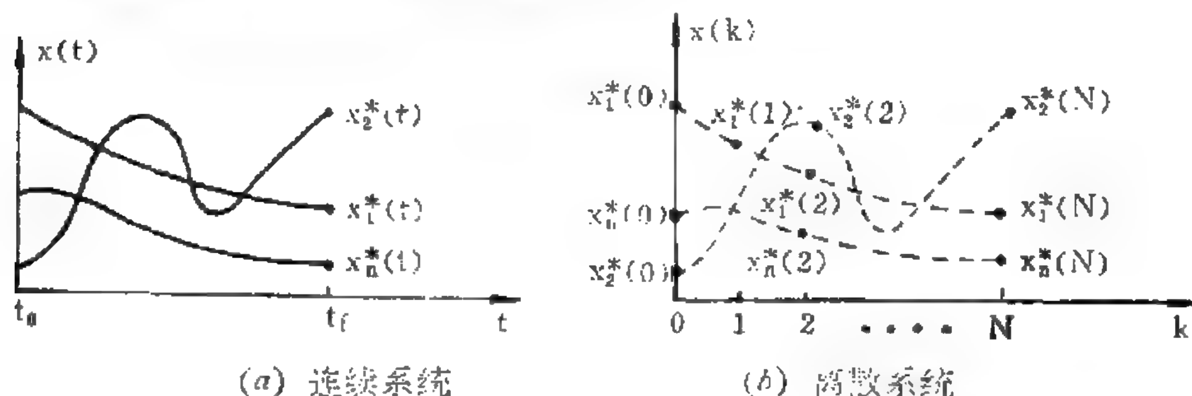


图 11—12 离散系统状态转移图

离散系统的状态转移轨线是在离散时刻取值，图 11—13 表示连续系统和离散系统的最优轨线比较。



(a) 连续系统　　　　(b) 离散系统

图 11—13 最优轨线

应用离散极大值原理和连续极大值原理求解同一个最优控制问题，可以得到非常相似甚至是相同的结果。

设我们要求解的连续极值问题的数学模型为：

$$\min\ J=\int_{t_0}^{t_f} L(X,\ U,\ t)dt$$

$$\dot{X}=f(X,\ U,\ t)$$

$$X(t_0)=X_1$$

对这个问题的求解有两种办法。

1． 直接用连续极大值原理，求得连续的正则方程，然后将正则方程离散化，求解离散的两点边值问题。

2． 将连续系统离散化，用离散极大值原理求最优控制序列。如果采样周期选取得合适，则两种方法求解结果应该是很相近的。

应用连续极大值原理，正则方程为

$$\dot{X}=\mathbf{f}(X,\ U,\ t)$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial X}=-\left[\frac{\partial L(X,\ U,\ t)}{\partial X}+\frac{\partial \mathbf{f}^{T}(X,\ U,\ t)}{\partial X}\lambda(t)\right]$$

$$X(t_0)=X_0$$

$$\lambda(t_f)=0$$

用数字机求解这一非线性微分方程组，取一阶差分，令 T 为采样周期，得：

$$\dot{X}\big|_{t=kT}=\frac{X_{k+1}-X_k}{T}=\frac{X[(k+1)T]-X[kT]}{T}$$

$$\dot{\lambda}\big|_{t=kT}=\frac{\lambda_{k+1}-\lambda_k}{T}=\frac{\lambda[(k+1)T]-\lambda[kT]}{T}$$

代入正则方程组，将正则方程离散化：

$$X_{k+1}=X_k+T\mathbf{f}(X_k,\ U_k,\ k) \tag{11—58}$$

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k-T\frac{\partial L(X_k,\ U_k,\ k)}{\partial X_k}-T\frac{\partial \mathbf{f}^{T}(X_k,\ U_k,\ k)}{\partial X_k}\lambda_k \tag{11—59}$$

边界条件　$X(0)=X_0$，$\lambda(N)=0$

又由控制方程　$\dfrac{\partial H_k}{\partial U_k}=0$，因而有

$$\frac{\partial L(X_k,\ U_k,\ k)}{\partial U_k}+\frac{\partial \mathbf{f}^{T}(X_k,\ U_k,\ k)}{\partial U_k}\lambda_k=0 \tag{11—60}$$

如果用离散极大值原理求解，则先对状态方程和指标泛函作一次差分近似：

$$X_{k+1}=X_k+T\mathbf{f}(X_k,\ U_k,\ k)$$

$$X(0)=X_0$$

$$J = T\sum_{k=0}^{N-1} L(X_k, U_k, k)$$

离散的哈密顿函数为

$$H_k = H(X_k, U_k, \lambda_{k+1}, k) = TL(X_k, U_k, k) + \lambda^T{}_{k+1}[X_k + + T\mathbf{f}(X_k, U_k, k)] \tag{11—61}$$

由 $\frac{\partial H_k}{\partial U_k} = 0$，得

$$T\frac{\partial L(X_k, U_k, k)}{\partial U_k} + T\left[\frac{\partial \mathbf{f}^T(X_k, U_k, k)}{\partial U_k}\right]\lambda_{k+1} = 0 \tag{11—62}$$

而两点边值问题为

$$X_{k+1} = X_k + T\mathbf{f}(X_k, U_k, k) \tag{11—63}$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial X_k} = T\frac{\partial L(X_k, U_k, k)}{\partial X_k} + \left[I + T\frac{\partial \mathbf{f}^T(X_k, U_k, k)}{\partial X_{k+1}}\right]\lambda_{k+1} \tag{11—64}$$

$$X(0) = X_0$$

$$\lambda(N) = 0$$

比较（11—59）及（11—64）两式显见将连续正则方程离散化与离散的正则方程是有差别的。比较（11—60）及（11—62）两式，可见控制方程也略有不同。为了便于比较，将它们列在一起。

(11—60) $$\frac{\partial L}{\partial U_k} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial U_k}\lambda_k = 0$$

(11—62) $$\frac{\partial L}{\partial U_k} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial U_k}\lambda_{k+1} = 0$$

当采样周期足够小时，λ_k 与 λ_{k+1} 很接近，因此（11—60）和（11—62）两式表示的控制方程就没有什么不同了。

由（11—59）式，$\lambda_{k+1}=-T\frac{\partial L}{\partial X_k}+\left(I-T\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)\lambda_k$

由（11—64）式，$\lambda_k=T\frac{\partial L}{\partial X_k}+\left(I+T\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)\lambda_{k+1}$

或 $\lambda_{k+1}=\left(I+T\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)^{-1}\left(\lambda_k-T\frac{\partial L}{\partial X_k}\right)$

将$\left(I+T\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)^{-1}$展成级数，近似取前两项，则（11—64）式变为$\lambda_{k+1}=\left(I-T\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)\left(\lambda_k-T\frac{\partial L}{\partial X_k}\right)$

当采样周期很小时 T^2 项可忽略，于是得（11—59）式

$$\lambda_{k+1}=\left(I-T\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)\lambda_k-T\frac{\partial L}{\partial X_k}$$

即（11—64）式和（11—59）式在 T 很小时近似相同。

连续极大值原理与离散极大值原理的对比如下表。

连续极大值原理	离散极大值原理
1. $\dot{X}(t)=f[X(t),U(t),t]$	1. $X_{k+1}=f(X_k,U_k,k)$, $k=0,1,\cdots,N-1$
2. $X(t_0)=X_0$	2. $X(k=0)=X_0$
3. $J=\theta(X_f,t_f)+\int_{t_0}^{t_f}L(X,U,t)dt$	3. $J=\theta(X_N,N)+\sum_{k=0}^{N-1}L(X_k,U_k,k)$
4. 求 $U^*(t)$使 J 为极值	4. 求 $U^*(k)$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 使 J 为极值

续表

连续极大值原理	离散极大值原理
5. 引入伴随函数 $\lambda(t)$	5. 引入伴随向量序列 λ_k $k=1, 2, \cdots, N$
6. 定义 $H(X,\lambda,U,t)=L(X,U,t)+\lambda^T f$	6. $H_k=L(X_k,U_k,k)+\lambda^T_{k+1}f \quad k=0,1,\cdots,N-1$
7. 正则微分方程 $\dot{X}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f(X,U,t)$ $\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial X}$	7. 正则差分方程 $X_{k+1}=f(X_k,U_k,k)$ $\lambda_k=\frac{\partial H_k}{\partial X_k}$, $\lambda_{k+1}=\left(\frac{\partial f^T}{\partial X_k}\right)^{-1}\left(\lambda_k-\frac{\partial L}{\partial X_k}\right)$
8. 最优控制方程 $\frac{\partial H}{\partial U}=0$	8. $\frac{\partial H_k}{\partial U_k}=0$ 或 $\frac{\partial L}{\partial U_k}+\frac{\partial f^T}{\partial U_k}\lambda_{k+1}=0$
9. 当控制有约束时 $H(X^*,\lambda^*,U^*,t)=\min\limits_{U}H(X^*,\lambda^*,U,t)$	9. 当控制有约束时 $H(X_k^*,\lambda^*_{k+1}U_k^*,k)=\min\limits_{U_k}H(X_k^*,\lambda^*_{k+1},U_k,k)$
10. 终端自由时边界条件 $\lambda(t_f)=\frac{\partial \theta}{\partial X}\Big\vert_{t=t_f}$ $\theta=0$ 时，$\lambda(t_f)=0$	10. 终端自由时边界条件 $\lambda(N)=\frac{\partial \theta}{\partial X_k}\Big\vert_{k=N}$ $\theta=0$ 时，$\lambda(N)=0$

§ 11-7 离散系统的最小时间控制

一个 n 维线性离散系统，设其状态是完全可控的，控制变量不受约束，则该系统最小时间控制的特点是：最多在 n 个采样周期内可使任意初始状态转移到规定的终端状态。

先举一个简单的例子说明上述结论。

[例] $X[k+1)=AX(k)+Bu(k)$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(0)=\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}，\ u(k)\ \text{不受约束}$$

要求该系统在一个采样周期内到达状态空间原点，即 $X(1)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X(1)=AX(0)+Bu(0)=0 \tag{11—65}$$

$$X(0)=-A^{-1}Bu(0)=g_0u(0) \tag{11—66}$$

由上式可解出 $u(0)$。

本例中， $A^{-1}=2\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & ½ \end{bmatrix}$

$$g_0=-A^{-1}B=-2\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & ½ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$X(0)=\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}u(0)$$

$x_{10}=2u(0)$， $x_{20}=-u(0)$

$$X(1)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(0)=0$$

即 $\frac{1}{2}x_{10}+x_{20}=0$ （见图 11—14）

$$u(0)=x_{10}+x_{20}$$

$$=\frac{1}{2}x_{10}=-x_{20}$$

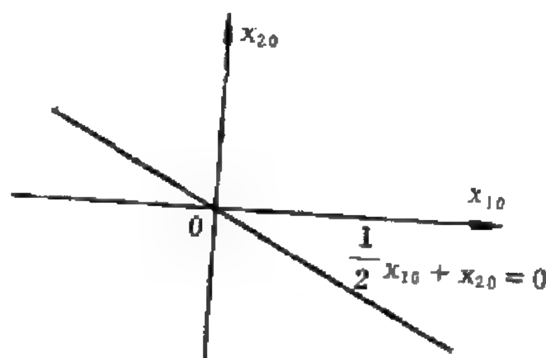


图 11—14 离散线性二阶系统最小时间控制

因此，只要 x_{10}、x_{20} 位于相平面内 $\frac{1}{2}x_{10}+x_{20}=0$ 这一直线上，则在 $u(0)$ 作用下，经过一个采样周期，可使系统由初始状态 $[x_{10},\ x_{20}]^T$ 转移到 $X(1)=[0,\ 0]^T$。

如果要求在两个采样周期内由 $X(0)$ 转移到状态空间原点，即令 $X(2)=[0,\ 0]^T$

则 $$X(2)=AX(1)+Bu(1)=0$$

或 $$A^2X(0)+ABu(0)+Bu(1)=0$$

$$X(0)=-A^{-1}Bu(0)-A^{-2}Bu(1)$$

$$=g_0u(0)+g_1u(1) \qquad (11—67)$$

$$g_0=-A^{-1}B,\quad g_1=-A^{-2}B$$

$$X(0)=[g_0,\ g_1]\begin{bmatrix}u(0)\\ u(1)\end{bmatrix} \qquad (11—68)$$

由上式可确定 $u(0)$，$u(1)$。

本例中 $$g_0=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix},\qquad g_1=\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$X(0)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u(0)\\ u(1)\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}u(0)\\ u(1)\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}X(0)$$

$$\therefore \quad u(0)=\frac{3}{4}x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}, \quad u(1)=\frac{1}{4}x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}$$

对于 n 维线性系统，如果要求在 n 个采样周期时，使系统由任意初始状态 $X(0)$转移到状态空间原点，即 $X(n)=0$，并且 U 不受约束，即 $\|U(k)\|<\infty$。则最优控制序列可如下决定：

由状态方程

$$X(k+1)=AX(k)+BU(k)$$

则

$$X(1)=AX(0)+BU(0)$$

$$X(2)=AX(1)+BU(1)$$

$$=A^2X(0)+ABU(0)+BU(1)$$

$$\cdots\cdots$$

$$X(n)=AX(n-1)+BU(n-1)$$

$$=A^nX(0)+\sum_{k=0}^{n-1}A^{n-k-1}BU(k)$$

令 $X(n)=0$，则

$$X(0)=-A^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}A^{n-k-1}BU(k)$$

$$=-A^{-1}BU(0)-A^{-2}BU(1)\cdots-A^{-n}BU(n-1)$$

$$=g_0U(0)+g_1U(1)+g_2U(2)+\cdots+g_{n-1}U(n-1)$$

$$=GU \tag{11—69}$$

式中

$$G=[g_0,\ g_1,\ \cdots g_{n-1}] \tag{11—70}$$

$$U=[U(0),\ U(1),\ \cdots,U(n-1)]^T \tag{11—71}$$

G 是已知的，故可由上式解出 $U(0),U(1),\cdots U(n-1)$。

［例］ 已知二阶系统 $X(k+1)=AX(k)+Bu(k)$

$u(k)$ 为一维控制变量，$-\infty\leqslant u(k)\leqslant\infty$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-T}\\ 0 & e^{-T}\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}e^{-T}+T-1\\ 1-e^{-T}\end{bmatrix}$$

求最优控制序列，使系统在 2 个采样周期内由初始状态 $X(0)$ 转移到状态空间原点。

［解］：已知 $X(0)=g_0u(0)+g_1u(1)=-A^{-1}Bu(0)-A^{-2}Bu(1)$

而 $X(1)=AX(0)+Bu(0)=-A^{-1}Bu(1)$

$$=g_0u(1)$$

$$g_0=-A^{-1}B=-\begin{bmatrix}1 & 1-e^{T}\\ 0 & e^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-T}+T-1\\ 1-e^{-T}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}T-e^{T}+1\\ e^{T}-1\end{bmatrix}$$

$$g_1=-A^{-2}B=-\begin{bmatrix}1 & 1-e^{2T}\\ 0 & e^{2T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-T}+T-1\\ 1-e^{-T}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}T+e^{T}-e^{2T}\\ e^{2T}-e^{T}\end{bmatrix}$$

$T=1$ 时，
$$g_0=\begin{bmatrix}-2+e\\ 1-e\end{bmatrix}$$

$$g_1=\begin{bmatrix}-1-e+e^2\\ -e^2+e\end{bmatrix}$$

$$[X(0)\ \ X(1)]=[g_0\ \ g_1]\begin{bmatrix}u(0) & u(1)\\ u(1) & 0\end{bmatrix}$$

$$G=[g_0\ \ g_1]=\begin{bmatrix}-2+e & -1-e+e^2\\ 1-e & -e^2+e\end{bmatrix}$$满秩，其逆存在。

于是
$$\begin{bmatrix}u(0) & u(1)\\ u(1) & 0\end{bmatrix}=G^{-1}\begin{bmatrix}x_1(0) & x_1(1)\\ x_2(0) & x_2(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1.58 & -1.24\\ 0.59 & 0.24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0) & x_1(1)\\ x_2(0) & x_2(1)\end{bmatrix}$$

由此可得最优控制规律为

$$u(k)=-1.58x_1(k)-1.24x_2(k),\quad k=0,\ 1$$

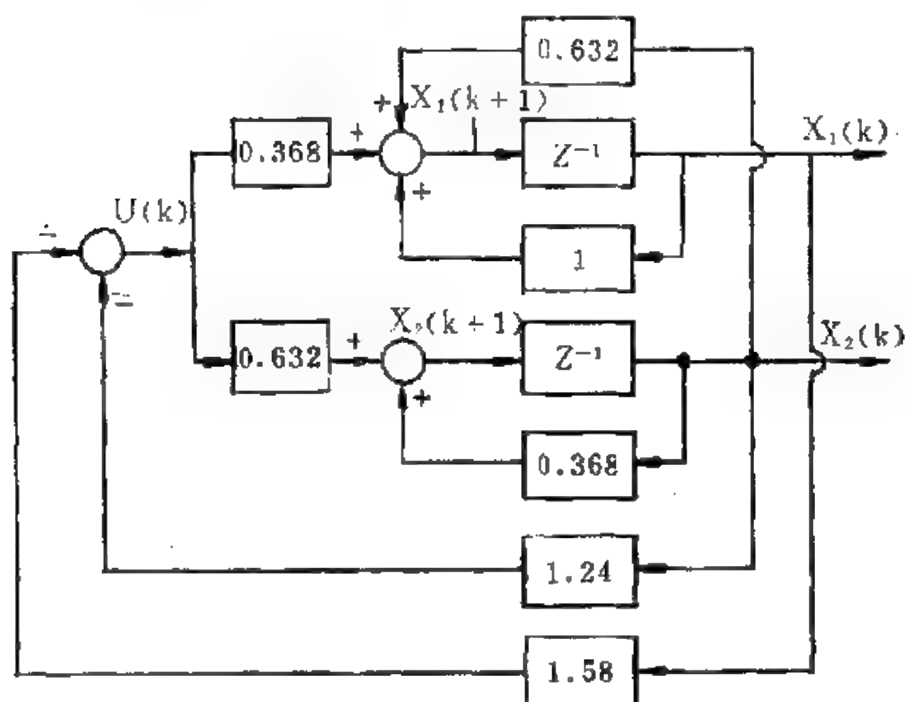


图 11—15　离散系统最优时间控制框图（Z^{-1} 代表单位延迟）

图 11—15 为离散系统的最优时间控制框图。

由状态方程应有如下关系：

$$X(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-1}\\ 0 & e^{-1}\end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix}e^{-1}\\ 1-e^{-1}\end{bmatrix}u(k)$$

$$\therefore\quad x_1(k+1)=x_1(k)+0.632x_2(k)+0.368u(k)$$

$$x_2(k+1)=0.368x_2(k)+0.632u(k)$$

§ 11-8 离散系统最优控制问题的数值计算

设最优控制问题为

$$\min J = \sum_{k=0}^{N-1} L(X_k, U_k, k) + \theta(X_N)$$

$$X_{k+1} = \mathbf{f}(X_k, U_k, k)$$

U 是m维向量，$J = J[U_0, U_1, \cdots, U_{N-1}]$ 是 mN 个变量的函数。

应用伴随向量 λ_{k+1} 构造增广泛函

$$J' = \theta(X_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \{L(X_k, U_k, k) + \lambda^T{}_{k+1}[\mathbf{f}(X_k, U_k, k) - X_{k+1}]\}$$

定义 $H_k = L(X_k, U_k, k) + \lambda^T{}_{k+1}\mathbf{f}(X_k, U_k, k)$

则上式可写作

$$J' = \theta(X_N) + H_0 + \sum_{k=1}^{N-1} (H_k - \lambda^T{}_k X_k) - \lambda_N{}^T X_N$$

取一阶变分

$$\delta J' = \left[\frac{\partial \theta(X_N)}{\partial X_N} - \lambda_N\right]^T \delta X_N + \frac{\partial H_0{}^T}{\partial X_0}\delta X_0 + \frac{\partial H_0{}^T}{\partial U_0}\delta U_0 + \sum_{k=1}^{N-1}\left\{\left[\frac{\partial H_k}{\partial X_k} - \lambda_k\right]^T \delta X_k + \frac{\partial H_k{}^T}{\partial U_k}\delta U_k\right\}$$

已知 U_k 为最优时，

$$\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial X_k} = \frac{\partial L_k}{\partial X_k} + \lambda^T{}_{k+1}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial X_k}$$

$$\delta X_0 = 0$$

$$\lambda_N = \frac{\partial \theta(X_N)}{\partial X_N}$$

$$\therefore \qquad \delta J' = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial H_k^T}{\partial U_k} \delta U_k$$

于是，增广泛函 J' 的梯度即为哈密顿函数的梯度

$$\frac{\partial J'}{\partial U_k} = \frac{\partial H_k}{\partial U_k} \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$\frac{\partial H_k}{\partial U_k}$ 也就是在状态方程约束下原泛函 J 的梯度。

因此离散系统的最优控制可以用梯度法为基础的各种非线性规划算法进行迭代计算。

计算程序为

1. 先估计初始控制值 U_k^0，$k = 0,1,\cdots,N-1$
2. 由状态方程计算 X_k^0，$k = 1, 2\cdots, N$
3. 求 λ_k，　$\lambda_k = \frac{\partial L_k}{\partial X_k} + \lambda^T_{k+1} \frac{\partial f}{\partial X_k}$，$k = N-1,\cdots 2,1,$
4. 计算$\frac{\partial H_k}{\partial U_k}$，$k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$
5. $U_k^1 = U_k^0 + \alpha P_0$，$\alpha$ 为步长参数。

   $P^0 = -\frac{\partial H_k}{\partial U_k}$，$P^0$ 为搜索方向。
6. 计算 J
7. 再计算 X_k^1

………

[例]　$x_1(k+1) = x_1(k) + 0.1x_2(k)$

$x_2(k+1) = 1.14x_2(k) + 0.1[4u(k) - x_1(k) - 0.14x_2(k)^3]$

$$\min J = \frac{1}{11}\left\{\sum_{k=0}^{9}[x_1(k)^2+u(k)^2]+x_1(10)^2\right\}$$

求最优控制序列 $u(0)$，$u(1)$，…，$u(9)$

用上述方法可以求得

$$\lambda_1(k)=\frac{1}{11}2x_1(k)+\lambda_1(k+1)-0.1\lambda_2(k+1)$$

$$\lambda_2(k)=0.1\lambda_1(k+1)+[1.14-0.042x_2(k)^2]\lambda_2(k+1)$$

$$\lambda_1(N)=\frac{2}{11}x_1(0)$$

$$\lambda_2(N)=0$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k}=\frac{2}{11}u_k+0.4\lambda_2(k+1)$$

用变尺度法迭代计算结果

迭代次数 / $u(k)$及 J	1	3	9	12
$u(0)$	1.5522	1.8244	1.8940	1.8941
$u(1)$	1.7176	2.0587	2.0870	2.0871
$u(2)$	1.6993	1.8623	1.8444	1.8444
$u(3)$	1.5504	1.4616	1.4376	1.4375
$u(4)$	1.3053	1.0229	1.0204	1.0203
$u(5)$	0.9994	0.6413	0.6608	0.6608
$u(6)$	0.6728	0.3533	0.3808	0.3808
$u(7)$	0.3693	0.1602	0.1818	0.1818
$u(8)$	0.1324	0.0482	0.0577	0.0577
$u(9)$	0	0	0	0
J	2.8359	2.7893	2.7886	2.7886

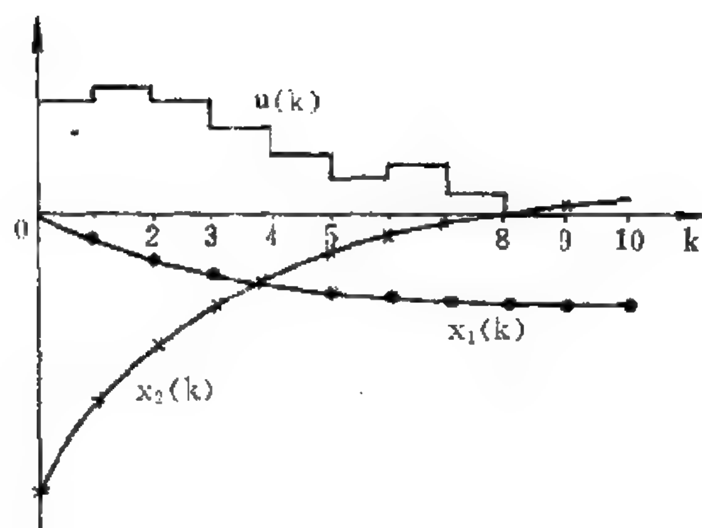


图 11—16 变尺度法迭代结果

图 11—16 为数值计算结果。

习 题

1． 设有差分方程为

$$x(k+2)=x(k+1)+x(k)$$

式中 $x(0)=0$，$x(1)=1$。求通解 $x(k)$。并证明当 k 趋于无穷大时 $\dfrac{x(k+1)}{x(k)}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

2． 求 $x(k+1)-4x(k)+3x(k-1)=0$ 的解，已知 $x(0)=0$，$x(1)=1$。

3． 三维系统 $X(k+1)=AX(k)+BU(k)$，设从初始状态 $X(0)$ 到达状态空间原点的时间分别为 $3T$，$2T$，T，求最优控制规律，T 为采样周期，对 $U(k)$ 没有约束。

4． 使二阶系统 $X(k+1)=AX(k)+BU(k)$ 在一个采样周期内从 $X(0)$ 转移到原点，求控制规律。

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1-e^{-1}\\ 0 & e^{-1}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}e^{-1}\\ 1-e^{-1}\end{bmatrix}$

5. 已知 $X(k+1)=AX(k)+Bu(k)$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}$$

$x_1(0)=1$，$x_2(0)=0$

$x_1(10)=x_2(10)=0$

用离散极大值原理求 $\min\limits_{u(k)} J=0.05\sum\limits_{k=0}^{9}u_k^2$

6. $\min J=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(x_k^2+u_k^2)$

$x_{k+1}=x_k+\alpha x_k^2+\beta u_k$

$x(0)=x_0$，$x(N)=0$

写出离散正则方程。

7. $\min J=\sum\limits_{k=0}^{2}[x_1^2(k+1)+u^2(k)]$

$X_{k+1}=AX_k+Bu_k$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$X(0)=[1,\ 1]^T$，$x_1(3)$ 未规定，$x_2(3)=0$

求最优控制序列 $u(0)$，$u(1)$，$u(2)$

8. 设有一无穷梯型电阻网络如图 11—17。证明

1) 该网络可用下述二阶齐次差分方程描述：

$U_{n+2}-3U_{n+1}+U_n=0$

2) 该方程的解近似为

$U_n=U_0(0.382)^n$

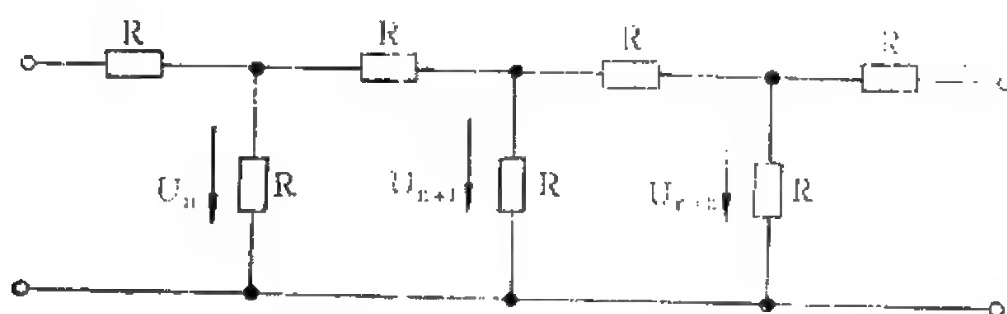


图 11—17

3. 输入电阻 $R_i = 1.618R$。设已知边界条件为输入电压 U_0，输出电压 $U_\infty = 0$。

第十二章　动 态 规 划

§ 12-1　概　　述

动态规划是一种分步最优化方法，既可用以求解约束条件下的函数极值问题，也可用以求解约束条件下的泛函极值问题。在多段决策过程的寻优问题中，动态规划是一种很有效的方法。

所谓多段决策过程是指这样一个过程，即按时间或空间顺序可以将过程分解为若干段（或步），如图 12—1，对于中间的任意一段，例如第 $k+1$ 段必须作出相应的决策（或求出控制 u_k），才能确定这一段输入状态和输出状态的关系，即从 x_k 变化到 x_{k+1} 的状态转移规律。在选择好每一段的决策（或控制）u_k 以后，整个过程的状态转移规律从 x_0 经过 x_k 一直到 x_N（其中 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$）也就完全确定。

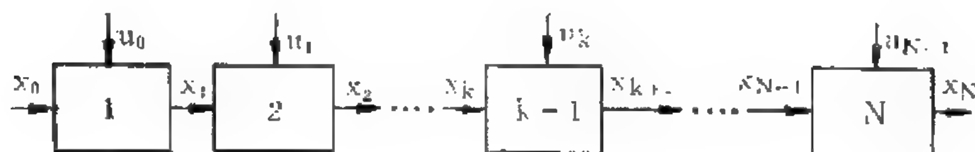


图 12—1　多段决策过程

显然，离散系统的动态过程是一个多段决策过程，线性离散系统的状态方程是：

$$X_{k+1}=AX_k+BU_k$$

式中　$X_k=X(k)$ 是 n 维向量，

$U_k=U(k)$ 是 m 维向量。

A 为 $n\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵。

可见第 k 段的初始状态若为 X_k，则在这一段的控制向量 U_k 作用下，状态将转移到 X_{k+1}，X_{k+1} 仅仅和 X_k 及 U_k 有关，而与以前各段的控制及状态转移规律无关。这种性质称为无后效性。

我们总可以找到一个最优控制（或决策）序列 $\{U_k^*\}$，使系统的某个指标泛函为最优。如果指标泛函为费用泛函数，则

$$J^* = \min J = \min_{U_k} \sum_{k=0}^{N-1} L(X_k,\ U_k,\ k)$$

如果指标泛函为效益泛函数，则

$$J^* = \max J = \max_{U_k} \sum_{k=0}^{N-1} L(X_k,\ U_k,\ k)$$

L 表示一个标量函数，与第 $k+1$ 段的向量 X_k 及 U_k 有关。也可简写为 $L_k = L(X_k,\ U_k,\ k)$。

将最优控制序列 $\{U_k^*\}$ 代入状态方程，可得最优轨线 $\{X_k^*\}$，即最优状态转移规律。

[例] 最优路线问题

假设从 A 点到 E 点有几条路线可走，途中可以经过 B_1、B_2、C_1、C_2、D_1、D_2 各点。我们要寻找一条从 A 到 E 的最优路线，使总的距离为最短（或时间最省、或费用最小等等）。显然这是一个网络最优化问题，我们可以用动态规划方法来寻优。图12—2 表示所要求解的路线网络。线段所标数字为这一段所需时间或费用或代表这一段的距离。

我们可以将网络从 A 到 E 划分为四段，求最优路线问题变成求解四段决策问题，即在每一段做一个最优决策，使某一指标(如距离)为最优。

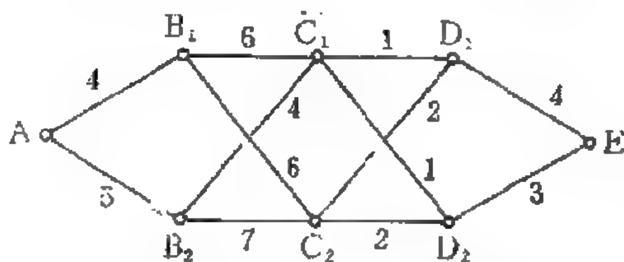


图 12—2 最优路线问题

如果将所有可能的走法都考虑在内，则从 A 到 E 共有 8 条路线，如果将每条路线的距离都计算出来，取最短的一个，则共要做 $3\times 2^3=24$ 次加法。又如果决策过程一共分成 N 段，则这种寻优方法共需做 $(N-1)2^{N-1}$ 次加法。

应用动态规划方法，可以使计算工作量减少许多。动态规划所应用的基本原理是最优化原理：最优路线的后部子路线一定也是最优的。例如，如果图 12—2 中 $AB_2C_1D_2E$ 为最优路线，则这条路线中的后面一段 C_1D_2E 也应当是最优的路线，否则 $AB_2C_1D_2E$ 就不是最优路线了。

根据最优化原理，求解最优路线问题时，我们可以从 E 点开始逐段向前推算（称为逆推）。如图 12—3 中最后一段（第 4 段）从 D_1 到 E 和从 D_2 到 E 的距离分别为 4、3。标明在图 12—3 中的 D_1 和 D_2 旁。再向前推，从 C_2 到 E 有两条路线：C_2D_2E，距离为 5；C_2D_1E，距离为 6，取最短的距离 5，标注在 C_2 点旁。同理，从 C_1 到 E 也有两条路线：C_1D_1E 距离为 5，C_1D_2E 距离为 4，最短距离为 4，标注在 C_1 点旁。

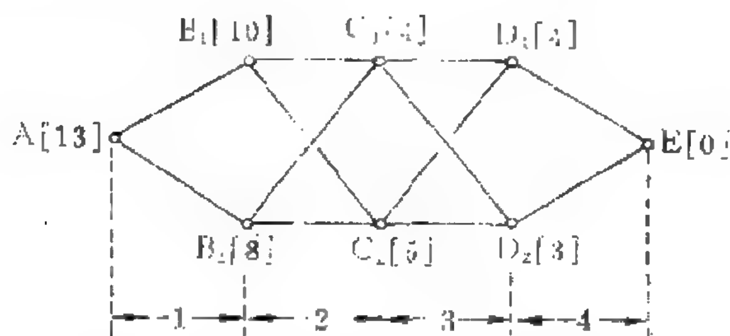


图 12—3 用动态规划法求最优路线

再向前推，从 B_1 到 E 最短距离为 10，从 B_2 到 E 最短距离为 8。而从 A 点出发的最优路线为 $AB_2C_1D_2E$，距离为 13。因此，从 E 向前逆推，每一段作出最优决策（选择一条最优路线）如下：

	最 优 决 策
第 4 段	路线 D_2E
第 3 段	路线 C_1D_2E
第 2 段	路线 $B_2C_1D_2E$
第 1 段	路线 $AB_2C_1D_2E$

用动态规划方法对这一例题做最优路线的选择，共要做 10 次加法及 6 次比较。如果整个过程分成 N 段，则共需做 $4(N-2)+2$ 次加法，$N=10$ 时只需做 34 次加法计算。

§ 12-2 最优化原理

最优化原理是动态规划方法的理论基础。

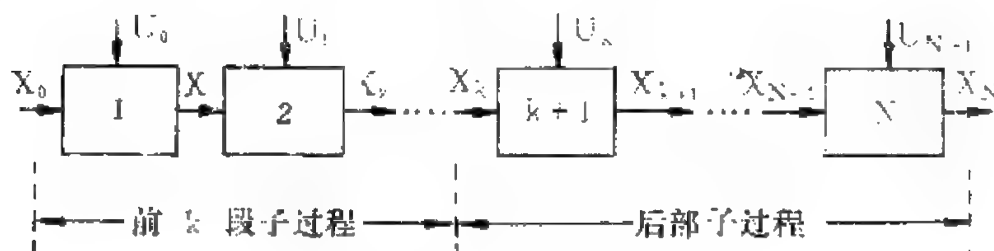


图 12—4 离散系统状态转移

图 12—4 所示的 N 段决策过程，对于第 $k+1$ 段说，X_k 是初始状态，是由前面 k 段的控制规律 U_0，U_1，…，U_{k-1} 所产生的结果。从第 $k+1$ 段起到第 N 段这 $N-k$ 段是 N 段决策过程的后部子过程。后部子过程的初始状态即为 X_k。

最优化原理 最优控制的性质是：无论 X_k 及前 k 段控制规律如何，后部子过程的控制规律 U_k，U_{k+1}，…，U_{N-1} 对 X_k 说必定也是一个最优控制。

对于一个连续系统，最优化原理也是同样成立的。如图 12—5

所示的二维状态变量的轨线，从已知初始状态 $X(t_0)$ 转移到 $X(t_f)$。

假设这一条轨线是最优的，则一定使下述指标泛函为极小：

$$J_0=\int_{t_0}^{t_f} L(X,\ U)dt$$

设 $t=t_1$ 时，状态为 $X(t_1)$，$t_0<t_1<t_f$，则后部子过程（$t_1\leqslant t\leqslant t_f$）的指标泛函也为极小，即

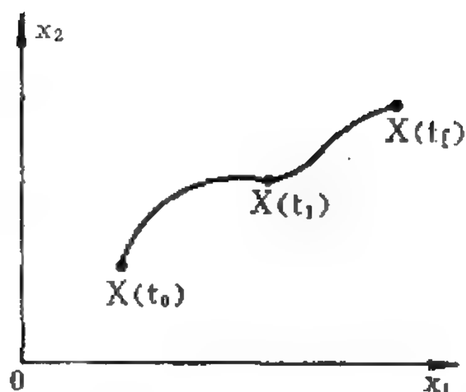


图 12—5　连续系统状态转移

$$J_1=\int_{t_1}^{t_f} L(X,\ U)dt \quad \text{为极小。}$$

最优化原理说明，如果从 t_0 到 t_f 的控制是最优的，即 J_0 为极小，则不管 $t=t_1$ 时系统是怎样转移到状态 $X(t_1)$ 的，一旦 $X(t_1)$ 为已知，（$X(t_1)$ 为后段轨线的初始状态），从 t_1 到 t_f 控制也是最优的，即 J_1 一定为极小。换句话说，最优轨线的最后一段轨线也应该是最优的。

最优化原理可用反证法两句话即可证明。如果最优路线的后一段从 $X(t_1)$ 到 $X(t_f)$ 还有另一条路线为最优，则原来从 $X(t_0)$ 到 $X(t_f)$ 的路线显然不是最优，这是矛盾的。因此最优化原理成立。

最优化原理为解决多段决策过程的寻优问题提供了有效方法。不管系统是线性的还是非线性的，不管它是否为连续系统或是否为定常系统，最优化原理总是成立的。应用最优化原理，可减少求解最优决策问题的计算量，将一个 N 段最优决策问题化为 N 个一段的最优决策问题。

§ 12-3　用动态规划方法求解最优分配问题

根据最优化原理，动态规划是将 N 段最优决策问题化为 N 个一段最优决策问题。在每一段求目标函数的极值，实际上是一个简

单的线性或非线性规划的寻优，这一段的状态方程就是等式约束，允许决策的范围是不等式约束。

静态最优化问题可以用线性或非线性规划求解，也可以用本章所讨论的动态规划方法求解。例如最优分配问题是一个静态最优化问题，它的变量与时间无关，用动态规划方法求解也是十分方便的。

下面我们通过几个具体例子研究如何用动态规划方法求解最优分配问题。

[例 1] 并联电路的电流分配问题

设有 n 个电阻 R_1，R_2，…，R_n 并联的分流电路，总电流为 I，各电阻电流分别为 x_1，x_2，…，x_n 如图 12—6。求电流分配使电路总的消耗功率为最小。

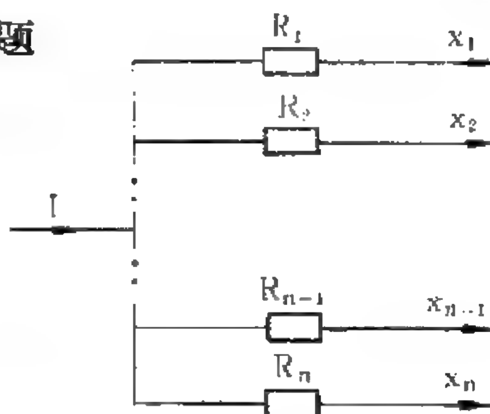


图12—6 n 个电阻並联

这个电流分配问题的数学模型为

$$\min_{x_i} f(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 R_i,\quad f(X)=f(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n) \qquad (12\text{—}1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = I$$

$$x_i \geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

这是一个非线性规划问题，现在用动态规划来求解。(12—1)式所表示的数学模型也可以表示为：

$$\min\ f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n) \qquad (12\text{—}2)$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=I$$

$$x_i \geqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

定义 $F_n=\min[f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)]$，$f_i(x_i)=x_i^2R_i$。上式表示以总电流 I 分配给 n 个并联电阻时最小功率消耗。显见 F_n 及 x_1，x_2，…，x_n 均为 I 的函数。如果以总电流 x 分配给前 k 个并联电阻，则这 k 个电阻的最小功率消耗为：

$$F_k=\min[f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_k(x_k)]$$

式中 F_k，x_1，x_2，…x_k 均为 x 的函数。

现在若以电流 I 分配给 $k+1$ 个并联电阻，则分配给前 k 个电阻的电流为 $x=I-x_{k+1}$。根据最优化原理应有：

$$F_{k+1}=\min[f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_k(x_k)+f_{k+1}(x_{k+1})]$$

$$=\min[F_k(I-x_{k+1})+f_{k+1}(x_{k+1})] \qquad (12\text{—}3)$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=I$$

例如 $k=0$，则 $F_1=\min f_1(x_1)=f_1(x_1)=I^2R_1$

$k=1$，　　$F_2=\min[f_1(x_1)+f_2(x_2)]$

$$=\min_{x_2}[F_1(I-x_2)+f_2(x_2)]$$

$$=\min_{x_2}[(I-x_2)^2R_1+x_2^2R_2]$$

这是一个较简单的函数关系，可以用求导方法求解最优的必要条件为

$$\frac{d[(I-x_2)^2R_1+x_2^2R_2]}{dx_2}=0$$

$x_2=\dfrac{IR_1}{R_1+R_2}=\dfrac{IG_2}{G_1+G_2}$，式中 $G_1=\dfrac{1}{R_1}$，$G_2=\dfrac{1}{R_2}$

$x_1=\dfrac{IR_2}{R_1+R_2}=\dfrac{IG_1}{G_1+G_2}$。

最小功率

$$F_2 = x_1^2 R_1 + x_2^2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I^2 = \frac{I^2}{G_1 + G_2}$$

由上面计算结果，可见两个电阻并联，电流按电导值分配，就是总功率为最小的条件。

同理 $k=2$，$F_3 = \min\limits_{x_3}[f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)]$

$$= \min_{x_3}[F_2(I - x_3) + f_3(x_3)]$$

由计算可得

$$x_1 = \frac{IG_1}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$x_2 = \frac{IG_2}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$x_3 = \frac{IG_3}{G_1 + G_2 + G_3}。$$

$$F_3 = \frac{I^2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$k = n-1$，即有 n 个电阻并联时

$$F_n = \min[F_{n-1}(I - x_n) + f_n(x_n)]$$

最优解为

$$x_i = \frac{IG_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} G_j} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{12—4}$$

$$F_n = \frac{I^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} G_j} \tag{12—5}$$

(12—4）式所得电流分配的最优方案，实际上是唯一的分配方案，因为由电路定律决定的电流，按并联元件电导大小分配，就是电路总功率的极小的方案。我们从这个简单例子看到，用动态规划方法求解分配问题，基本公式是（12—3）式表示的递推公式，这里包含了最优化原理的应用，即如果 n 个并联电阻的电流分配方案是最优的，则前 $n-1$ 个并联电阻的电流分配也一定是最优的。同时在递推公式（12—3）式中应用了嵌套的原则，即为了求 n 个并联电阻的最优电流分配，必须先求前 $n-1$ 个并联电阻的最优电流分配。

[例 2] 并联电动机的功率分配问题

设某一抽水站有 n 台电动机并联于电网，抽水量与电动机的输出功率成正比。设第 i 台电动机的输入功率为 x_i，输出功率为 $g_i(x_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$。又设电网提供的功率总数为 P_c，求各电动机的输入功率 x_i 的分配（$i=1, 2, \cdots, n$），使 n 台电动机总的输出功率为最大（抽水站的抽水量最多）。

这是一个非线性规划问题，数学模型可表示如下：

$$\max \quad g_1(x_1)+g_2(x_2)+\cdots+g_n(x_n)$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=P_c$$

$$x_i \leqslant P_{im}$$

P_{im} 为第 i 台电动机的允许最大输入功率。

由公式（12—3）可知这个最优化问题的迭代公式应为：

$$F_1=g_1(x_1)$$

$$F_{k+1}=\max_{x_{k+1}}\left[F_k(P_c-x_{k+1})+g_{k+1}(x_{k+1})\right]$$

当 $g_i(x_i)$ 函数关系比较复杂时，可用数值计算方法在计算机上计算。令 $P_c=m\Delta$，Δ 的大小应根据最优解所要求的精确度、

计算机的容量、计算时间要求等确定。

令 $x=0, \Delta, 2\Delta, \cdots, m\Delta$; x 表示提供给前 $k+1$ 台电动机的总功率。

$$F_1(x)=g_1(x)$$

$$F_{k+1}(x)=\max_{0\leqslant j\Delta\leqslant P_c}[F_k(x-j\Delta)+g_{k+1}(j\Delta)]$$

然后令 $k=0, 1, \cdots, n-1$, 在所有这些点上计算出 $F_{k+1}(x)$。由递推关系式求出 $F_1(x)$, $x=0, \Delta, \cdots, m\Delta$。然后递推出 $F_2(x)$, $F_3(x)$, …直到 $F_n(x)$。从 $F_n(P_c)(P_c=m\Delta)$ 中确定最优决策 x_n^*, 从 $F_{n-1}(P_c-x_n^*)$ 确定 x^*_{n-1}, … 依次可得 x_n^*, x^*_{n-1}, …, x_k^*, …, x_2^*, x_1^*。这就是最优分配方案, $F_n(P_c)$ 是相应的最大总输出功率。

[例 3] 发电厂并联发电机组的经济负荷分配

电厂发电机组间的经济负荷分配问题是电力系统经济运行中的一个问题。设有 n 台发电机组, 当第 k 台机组出力为 x_k (兆瓦) 时, 单位时间的燃料费用为 $f_k(x_k)$ 元。设 L 为用户所需的负荷 (兆瓦), 求各机组的负荷分配, 使单位时间总的燃料费用最省。

这个问题的数学模型为

$$\min \quad f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=L$$

$$x_i\geqslant 0 \quad i=1, 2, \cdots, n$$

用动态规划求解时, 递推公式为

$$F_{k+1}=\min_{x_{k+1}}[F_k(L-x_{k+1})+f_{k+1}(x_{k+1})]$$

[例 4] 串联部件间的可靠性分配问题。

某个电子系统共有 N 个串联部件。为了保证可靠性, 每个部件由若干个元件并联, 元件并联数越大, 可靠性越高, 但系统的成

本及重量都要增大。在成本和重量有一定限制条件下，为使整个系统可靠性最高，则各串联部件应由多少个元件并联组成？

设第 i 个部件由 x_i 个元件并联，其可靠性概率为 $p_i(x_i)$，$i=1, 2, \cdots, N$。并且 $p_i(x_i)\leqslant 1$。

整个系统的可靠性概率 R 为各个串联部件可靠性概率的乘积：

$$R=\prod_{i=1}^{N} p_i(x_i)$$

设第 i 个部件中一个并联元件的成本为 c_i，重量为 w_i，则上述可靠性分配问题的数学模型为：

$$\max \quad R=\prod_{i=1}^{N} p_i(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i x_i \leqslant C$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \leqslant W$$

$x_i \geqslant 0$，x_i 应为整数。

C 及 W 为系统总成本及总重量。

这是非线性整数规划，用动态规划方法求解，迭代公式为

$$F_N(C, W)=\max \prod_{i=1}^{N} p_i(x_i)$$

$$\begin{aligned}F_k(C, W)&=\max_{x_k}[F_{k-1}(C-c_k x_k, W-w_k x_k) p_k(x_k)]\\&=\max[p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_{k-1}(x_{k-1})p_k(x_k)]\end{aligned}$$

例如 $k=2$ 时

$$F_2(C, W)=\max \quad p_1(x_1)p_2(x_2)$$

$$= \max_{x_2} [F_1(C - c_2 x_2,\ W - w_2 x_2) p_2(x_2)]$$

§ 12-4　离散系统的动态规划方程

设离散系统的状态方程为（系统共分成 N 段）：

$$X_{k+1} = f(X_k,\ U_k) \tag{12—6}$$

f——n 维向量函数

$X_{k+1} = X(k+1)$——n 维状态向量在 $(k+1)T$ 时刻的值，$k=0,\ 1,\ \cdots N-1$。

$U_k = U(k)$——在 kT 时刻的 m 维控制向量。

状态初始值 $X(0) = X_0$

离散系统最优控制问题的数学模型为：

$$\min \quad J_N = \theta(X_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(X_k,\ U_k) \tag{12—7}$$

$$\text{约束} \quad g(X_k,\ U_k) \leqslant 0$$

$$X_{k+1} = f(X_k,\ U_k)$$

(12—7) 式中 $\theta(X_N)$ 表示对终端状态 $X_N = X(N)$ 的要求。

我们要确定的是最优控制序列 $\{U_k^*\}$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$，代入（12—6）式可求出最优状态转移规律或称最优轨线 $\{X_k^*\}$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。将所求得的 $\{U_k^*\}$、$\{X_k^*\}$ 代入（12—7）式得：

$$J_N^*(X_0) = \min \quad J_N$$

它只与初始状态 X_0 有关。

求解离散系统的最优控制，可以用离散极大值原理的方法，也可以用动态规划方法。根据最优化原理我们可以建立离散系统的动

态规划基本方程。

我们已知离散系统最优问题是一个多段最优决策问题，我们要分别对每一段做出决策，选择最优控制。例如第一段决策是要选择 U_0^* 使状态由 X_0 转移到 X_1^*，$X_1^*=f(X_0, U_0^*)$。第二段决策是要选择 U_1^* 使状态由 X_1^* 转移到 X_2^*，$X_2^*=f(X_1^*, U_1^*)$，…，直到第 N 段决策，选择 U^*_{N-1} 使状态由 X^*_{N-1} 转移到 X_N^*，$X_N^*=f(X_{N-1}^*, U_{N-1}^*)$

根据最优化原理，如果一个离散控制系统对某个指标泛函说，是最优的，则不论这个系统第一段的 X_0 和 U_0 如何选取，第二段以后的控制序列 $\{U_k\}(k=1, 2, \cdots, N-1)$ 一定是 $N-1$ 段的最优控制序列，或（11—7）式中指标泛函后 $N-1$ 项与 $\theta(X_N)$ 之和应为最小，即：

$$J^*_{N-1}(X_1)=\min_{U_1}\cdots\min_{U_{N-1}}[\theta(X_N)+\sum_{k=1}^{N-1}L(X_k, U_k)] \qquad (12—8)$$

以上所述最优控制的基本性质是建立在嵌套原则的基础上，即在求解离散系统的最优控制时，在原来 N 段的指标泛函中嵌入后部子过程的最优指标泛函，使最优控制问题比较容易求解，实际上就是把 N 段最优决策过程变化成 N 个一段最优决策过程来求解。

动态规划的基本方程也称为贝尔曼泛函方程，这是一个递推方程，可以如下求得：

1. 已知初始状态 X_0，

$$J_N^*(X_0)=\min_{U_0}[L(X_0, U_0)+J_{N-1}^*(X_1)] \qquad (12—9)$$

$$X_1=f(X_0, U_0) \qquad (12—10)$$

$J_N^*(X_0)$ 表示 N 段决策过程的最优指标泛函，这 N 段过程的初始状态为 X_0，$J^*_{N-1}(X_1)$ 表示后面 $N-1$ 段子过程的最优指标泛函，由（12—8）式决定，$N-1$ 段后部子过程的初始状态

为 X_1，由第一段的 X_0 和 U_0 决定。(12—9) 式为确定 U_0^* 时必须满足的条件。由上式可见，为了求出第一段的最优控制 U_0^*，必须要知道 $J_{N-1}^*(X_1)$。

2． 根据最优化原理，可写出

$$J_{N-1}^*(X_1)=\min_{U_1}[L(X_1,\ U_1)+J_{N-2}^*(X_2)] \qquad (12—11)$$

$$X_2=f(X_1,\ U_1) \qquad (12—12)$$

(12—11) 式中 $J_{N-2}^*(X_2)$ 是后部 $N-2$ 段子过程的最优指标泛函，其初始状态为 X_2，由 (12—12) 式决定。(12—11) 式为确定 U_1^* 必须满足的条件。为了求 U_1^*，必须要知道 $J^*_{N-2}(X_2)$。

………………………

3． 同理，可以写出更一般的动态规划方程

$$J_{N-k}^*(X_k)=\min_{U_k}[L(X_k,\ U_k)+J^*_{N-(k+1)}(X_{k+1})] \qquad (12—13)$$

$$X_{k+1}=f(X_k,\ U_k) \qquad (12—14)$$

$J^*_{N-k}(X_k)$ 为以 X_k 为初始状态的后部 $N-k$ 段子过程的最优指标泛函，X_k 由 X_0 及前 k 段控制 $\{U_k\}$ 决定。$k=0,1,\cdots,k-1$。由 (12—13) 式可决定 U_k。

………………………

4． 依次类推，可得：

$$J_2^*(X_{N-2})=\min_{U_{N-2}}[L(X_{N-2},\ U_{N-2})+J_1^*(X_{N-1})] \qquad (12—15)$$

$$X_{N-1}=f(X_{N-2},\ U_{N-2}) \qquad (12—16)$$

5． $$J_1^*(X_{N-1})=\min_{U_{N-1}}[L(X_{N-1},\ U_{N-1})+\theta(X_N)] \qquad (12—17)$$

$$X_N=f(X_{N-1},\ U_{N-1}) \qquad (12—18)$$

6. **为了书写统一，定义**

$$J_0^*(X_N)=\theta(X_N) \tag{12—19}$$

则（12—17）式也可写成

$$J_1^*(X_{N-1})=\min_{U_{N-1}}[L(X_{N-1},\ U_{N-1})+J_0^*(X_N)]$$

当 $\theta(X_N)=0$ 时，$J_0^*(X_N)=0$

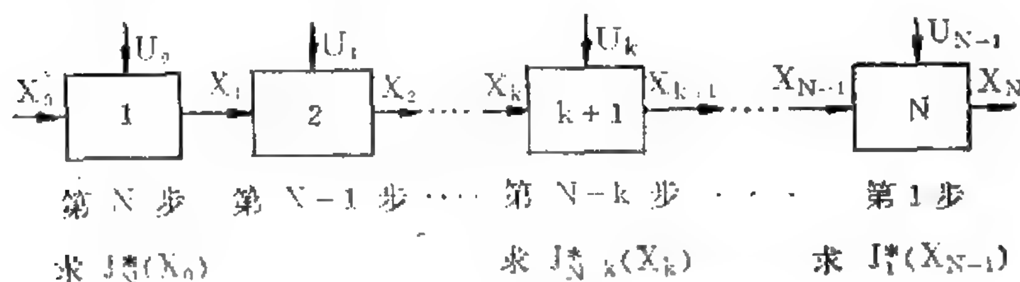


图 12—7 动态规划求解步骤

图 12—7 说明了应用动态规划基本方程（12—13）式求解最优控制序列 $\{U_k^*\}$ 的过程。求解方法是从后往前逆推。第一步，根据（12—17）式求第 N 段的最优控制 U_{N-1}^*，这时 $J_0^*(X_N)=\theta(X_N)$ 是已知的。从而求得 $J_1^*(X_{N-1})$。第二步，根据（12—15）式求第 $N-1$ 段的最优控制 U_{N-2}^*，从而求得 $J_2^*(X_{N-2})$。依次类推，第 $N-1$ 步可求出 U_1^* 及 $J_{N-1}^*(X_1)$，最后第 N 步可求出 U_0^* 及 $J_N^*(X_0)$。总之，用动态规划方法求最优控制序列的过程是从最后一段开始，依次向前逆推，解 N 个函数方程，每次可求出最优解 $U^*(N-k)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。

［例］ 一维线性系统，设对变量无约束，最优控制问题的数学模型为：

$$\min \quad J=\sum_{k=0}^{2}(qx_k^2+ru_k^2)T \tag{12—20}$$

$$x_{k+1}=ax_k+bu_k$$

初始状态 x_0 为已知。

式中 a、b、q、r 为常数，$r>0$，设 $T=1$，本例规定 $N=3$，显见指标泛函为离散二次型，这是离散的一维线性二次型问题。

这个问题是三段决策问题（如图 12—8），用动态规划方法求解，分三步，由后向前逆推。

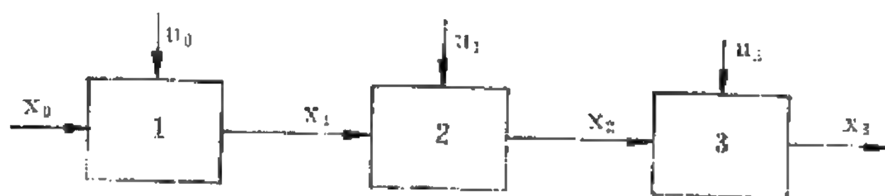


图 12—8 三段决策问题

1．第一步。

因为指标泛函（12—20）式中没有对终端状态提出要求，

∴ $J_0^*(x_3)=\theta(x_3)=0$。

求 u_2^*，使 $J_1^*(x_2)=\min\limits_{u_2}L(x_2, u_2)=\min\limits_{u_2}(qx_2^2+ru_2^2)$

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(qx_2^2+ru_2^2)=0$$

$$2ru_2=0, \qquad u_2^*=0 \tag{12—21}$$

$$J_1^*(x_2)=qx_2^2 \tag{12—22}$$

2．第二步

求 u_1^*，使 $J_2^*(x_1)=\min\limits_{u_1}[L(x_1, u_1)+J_1^*(x_2)]$

将（12—22）式代入可得

$$J_2^*(x_1)=\min_{u_1}(qx_1^2+ru_1^2+qx_2^2)$$

$$=\min_{u_1}[qx_1^2+ru_1^2+q(ax_1+bu_1)^2]$$

$$\frac{\partial[qx_1^2+ru_1^2+q(ax_1+bu_1)^2]}{\partial u_1}=0$$

$$u_1^* = -\frac{abq x_1}{r+b^2 q} = -f_1 x_1 \tag{12—23}$$

代入上式可得

$$J_2^*(x_1) = \left(1 + \frac{ra^2}{r+b^2 q}\right) q x_1^2 \tag{12—24}$$

3． 第三步

求 u_0^*，使 $J_3^*(x_0) = \min\limits_{u_0}[L(x_0, u_0) + J_2^*(x_1)] = \min J_3$

将（12—24）式代入，取 $\frac{\partial J_3}{\partial u_0} = 0$，得

$$u_0^* = -\frac{abq(r+b^2 q + ra^2)}{(r+b^2 q)^2 + ra^2 b^2 q} x_0 = -f_0 x_0 \tag{12—25}$$

并可求得最优指标泛函为：

$$J_3^*(x_0) = \left[q + r f_0^2 + \left(1 + \frac{ra^2}{r+b^2 q}\right) q (a - b f_0)^2\right] x_0^2 \tag{12—26}$$

由（12—21），（12—23），（12—25）式可见，离散线性二次型问题中最优控制是状态的线性负反馈：

$$u_k^* = -f_k x_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2 \tag{12—27}$$

本例中 $f_2 = 0$，$f_1 = \frac{abq}{r+b^2 q}$，$f_0 = \frac{abq(r+b^2 q+ra^2)}{(r+b^2 q)^2 + ra^2 b^2 q}$

后 $N-k$ 段最优指标泛函与初始状态 x_k^2 成正比（$k = 0,\ 1,\ 2$）

$$J^*_{N-k}(x_k) = p_k x_k^2 \tag{12—28}$$

由（12—22），（12—24），（12—26）式可见，本例中

$$p_2 = q, \quad p_1 = \left(1 + \frac{ra^2}{r+b^2 q}\right) q, \quad p_0 = q + r f_0^2 + p_1 (a - b f_0)^2$$

由本例可见，应用动态规划基本方程（12—13）式，可将一个求三段最优决策问题，化为求三个一段最优决策问题，从而简化了计算。由于这是一个无约束的线性二次型问题，因此可以用解析法求得最优控制序列。

§12-5 用动态规划求解离散系统最优控制问题的数值计算方法

如果离散系统是线性的，而控制变量或状态变量有不等式约束的情况，则用动态规划求解最优控制问题时，要用数值计算方法。或者，即使对控制变量或状态变量没有约束，但系统是非线性的，也要用数值计算方法求解。

［例 1］ 为了说明问题，我们先看一个单变量线性离散系统，一共分成十段，对控制变量有约束 $|u|\leqslant 1$。这个最优控制问题的数学模型为：

$$\min \quad J_{10}(x_0)=\sum_{k=0}^{9}(q x_k^2+r u_k^2)T$$

$$x_{k+1}=a x_k+b u_k$$

初始状态 x_0 为已知。

$$|u_k|\leqslant 1。$$

设 $T=0.03$，$a=0.9704$，$b=0.0296$，$r=0.01$，$q=1$。

x_k 的变化范围为 $-0.2\leqslant x_k\leqslant 0.2$。

对于每一段都有 $u=+1$，$u=-1$ 或 $|u|<1$ 三种可能的结果。数值计算是由计算机进行的，具体方法如下：

在 $-0.2\leqslant x_9\leqslant 0.2$ 范围内，以 0.02 为间隔，即每隔 0.02

取一点，计算 $J_1^*(x_9)$，已知 $J_0^*(x_{10})=0$，列出计算表格，存入计算机。

$$J_1^*(x_9)=\min_{u_9}(qx_9^2+ru_9^2)T$$

可见只有当 $u_9=0$，才能使 $(qx_9^2+ru_9^2)T$ 为最小，因此 $J_1^*(x_9)=qx_9^2T$。在规定的 x_9 范围内，给定 x_9 的一个值就可从表中查出 $J_1^*(x_9)$ 或用内插法计算出 $J_1^*(x_9)$。

在允许控制域 $-1\leqslant u_k\leqslant 1$ 内，取 100 或 200 个 u_8 的数值，对某个 x_8 值，搜索计算最优泛函 $J_2^*(x_8)$，并得相应的 u_8，列入表格中。

$$J_2^*(x_8)=\min_{u_8}[qx_8^2+ru_8^2+q(ax_8+bu_8)^2]T$$

再取另一个 u_8 值，搜索计算相应的 $J_2^*(x_8)$ 及 u_8…，从而求得在 $-0.2\leqslant x_8\leqslant 0.2$ 范围内每隔 0.02 计算的 $J^*(x_8)$ 及相应的 u_8，列入计算表格内。依次类推，每一段都用上述方法寻优，共重复计算十段，得到 $k=9$，8，…，1，0 时不同 x_k 的 $J^*_{N-k}(x_k)$ 及相应的 u_k 数值表。

由于对称，可以只列出计算结果的一半，即 x_k 为正的计算结果（如下页的表），它们是针对 10 个 x_k，$0\leqslant x_k\leqslant 0.2$，及 100 个 u_k 值进行搜索求出的。

根据这个表，可由给定的 x_0，查出 u_0^*，然后由状态方程计算 x_1，再查表，必要时用内插法求 u_1^*，再由状态方程计算 x_2……，依次类推。

u_0^* 随 x_0 变化曲线如图 12—9，虚线段表示控制变量不受任何约束限制的情况，当有约束 $|u|<1$ 的情况下，控制特性是非线性的。

本例只是一个简单的一阶线性二次型问题。对于指标泛函是非二次型或系统是非线性的高阶问题也可以按上述方法用数值计算法

动态规划数值计算表（例 1）

k \ x_k	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
9	0.012	0.048	0.108	0.192	0.300	0.432	0.588	0.768	0.972	1.20
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0.021	0.09	0.201	0.357	0.561	0.807	1.098	1.434	1.815	2.238
	0.05	0.11	0.16	0.21	0.26	0.32	0.37	0.42	0.48	0.53
7	0.03	0.12	0.27	0.483	0.753	1.083	1.476	1.929	2.439	3.012
	0.09	0.18	0.28	0.37	0.46	0.55	0.64	0.74	0.83	0.92
6	0.036	0.141	0.318	0.564	0.882	1.269	1.728	2.256	2.856	3.537
	0.12	0.24	0.35	0.47	0.59	0.71	0.83	0.95	1.0	1.0
5	0.039	0.153	0.345	0.615	0.96	1.383	1.881	2.46	3.126	3.885
	0.13	0.27	0.40	0.54	0.67	0.81	0.94	1.0	1.0	1.0

续 上 表

k \ x_k	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
4	0.04	0.162	0.363	0.645	1.005	1.449	1.971	2.583	3.291	4.101
	0.14	0.29	0.43	0.57	0.72	0.86	1.0	1.0	1.0	1.0
3	0.041	0.165	0.372	0.66	1.032	1.485	2.025	2.655	3.39	4.233
	0.15	0.3	0.45	0.6	0.74	0.89	1.0	1.0	1.0	1.0
2	0.042	0.167	0.378	0.669	1.047	1.509	2.052	2.697	3.447	4.311
	0.15	0.3	0.46	0.61	0.76	0.91	1.0	1.0	1.0	1.0
1	0.042	0.169	0.38	0.675	1.056	1.518	2.07	2.721	3.48	4.356
	0.15	0.31	0.46	0.61	0.77	0.92	1.0	1.0	1.0	1.0
0	0.042	0.171	0.381	0.678	1.059	1.527	2.079	2.733	3.498	4.38
	0.15	0.31	0.46	0.62	0.77	0.93	1.0	1.0	1.0	1.0

表中对应每个 k 值有两行数据，第一行为 $1000J(x_k)$，第二行为 $-u_k$。

处理。如果对状态变量 x_k 还有不等式约束，则在计算 $J(x_k)$ 时所取的 u_k 应当根据 x_k 的允许范围来取，并且在搜索极小值的过程中所得到的 x_{k+1} 也应当受到约束边界的限制。

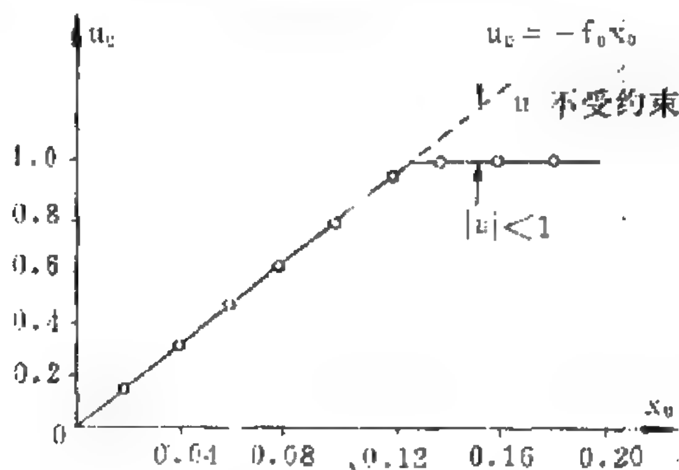


图 12—9 用动态规划求解一阶线性二次型问题的结果

但是随着系统阶次的增高，动态规划的弱点就表现出来了，计算时间与存储量的大小取决于求值的次数。例如一个多段决策过程共有 N 段，n 维的状态变量在每个元素取 p 个值，m 维控制变量每个元素取 q 个值，则计算指标泛函的求值次数为 Np^nq^m，存储量为 $2p^n$ 个字。

当 $N=10$，$p=q=20$，$n=3$，$m=1$ 时，如果用计算机计算，一次求值时间为 10 微秒，则存储量为 16000 字，计算时间为 16 秒。$n=6$，$m=2$，其它数不变时，存储量为 1.28 亿字，计算次数为 2560 亿次，要三昼夜才能计算完。

［例 2］ 一阶非线性系统

$$\min \qquad J=\sum_{k=0}^{1}|x_k-u_k^3|T$$

$$x_{k+1}=x_k+(x_k^2+u_k)T$$

$$|u_k|\leqslant 2$$

$$-5 \leqslant x_k \leqslant 5$$

$$x_0 = 3, \quad T = 0.1$$

解：本例是两段决策过程，分两步计算。

1. 第一步。

给定 $\theta = 0$，$J_0^*(x_2) = 0$

$$J_1^*(x_1) = \min_{|u_1| \leqslant 2} |x_1 - u_1^3| T$$

在 x_1 允许范围 $[-5, 5]$ 内取 11 个数，间隔为1。u_1 的允许范围为 $[-2, 2]$，取 5 个数，间隔为 1，计算 $|x_1 - u_1^3| T$。

例如 $x_1 = -5$ 时，得下表

u_1	-2	-1	0	1	2
$\lvert x_1 - u_1^3 \rvert T$	0.3	0.4	0.5	0.6	1.3

显见 $x_1 = -5$，$u_1 = -2$ 时，$J_1(x_1) = 0.3$ 为最小值。对其它 x_1 值计算求得最小的 $J_1(x_1)$ 及相应的 u_1，列成下述的计算表格（一）。

x_1	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$J_1(x_1)$	0.3	0.3	0.2	0.1	0	0	0	0.1	0.2	0.3	0.3
u_1	-2	-1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	2

表中哪个 u_1 为最优还要在第二步计算以后由给定的 x_0 确定。

2. 第二步

$$J_2^*(x_0) = \min_{|u_0| \leqslant 2} [|x_0 - u_0^3| T + J_1^*(x_1)]$$

$$= \min_{|u_0| \leqslant 2} [|x_0 - u_0^3| T + J_1^*\{x_0 + (x_0^2 + u_0)T\}]$$

$x_0=3$ 时，$J_2=|3-u_0^2|0.1+J_1^*\{3+(9+u_0)0.1\}$

对不同的 u_0 值（在 u_0 允许范围内）计算结果如下表。

u_0	-2	-1	0	1	2
J_2	0.76	0.58	0.59	0.5	0.8

显见，当 $u_0=1$ 时，J_2 为最小，上表的计算结果是这样得到的，设 $u_0=1$，$J_1^*\{3+(9+u_0)0.1\}=J_1^*(4)$，查计算表格（一），$J_1^*(4)=0.3$，于是 $J_2=|3-1|0.1+0.3=0.5$。当 x_0 为其它数（在允许范围内）时也可计算出最小的 J_2 及相应的 u_0，列成计算表格（二），其格式和计算表格（一）一样，此处略。

给定 $x_0=3$ 时，查得 $u_0^*=1$，代入状态方程，$x_1=x_0+(x_0^2+u_0^*)0.1$，求得 $x_1=4$，查表格（一），可知 $u_1^*=1$。由 $x_2=x_1+(x_1^2+u_1^*)0.1$ 可得 $x_2=5.7$。

因此本例的计算结果为：

最优控制序列 $u_0^*=1$，$u_1^*=1$。

最优轨线，即状态序列 $x_0=3$，$x_1=4$，$x_2=5.7$。

最优指标泛函 $J_2^*(x_0)=0.5$。

§ 12-6 动态规划法解离散线性二次型问题

离散线性二次型问题的数学模型为：

$$\min \qquad J_N=X_N^TSX_N+\sum_{k=0}^{N-1}(X_k^TQX_k+U_k^TRU_k) \tag{12—29}$$

$$X_{k+1}=AX_k+BU_k$$

$$X(0)=X_0$$

式中权矩阵 S，Q 为对称半正定常阵，R 为对称正定常阵。

用动态规划方法求解离散线性二次型问题，也和用离散极大值原理求解这个问题一样，推导出离散的 Riccati 方程，从而将问题变为求解离散 Riccati 方程。

由单变量离散线性二次型问题我们已求得有如下关系存在（见(12—27）及（12—28）式）：

$$u_k^* = -f_k x_k$$

$$J^*(x_k) = p_k x_k^2$$

对多变量离散线性二次型问题中以向量形式表示的上述关系也同样成立。

我们从后面向前逆推，第 N 段的初始状态为 X_{N-1}，求这一段的最优控制 U^*_{N-1}，使 $J_1(X_{N-1})$ 为极小。

$$J_1^*(X_{N-1}) = \min_{U_{N-1}}[X_N^T S X_N + X^T_{N-1} Q X_{N-1} + U^T_{N-1} R U_{N-1}]$$

$$= \min_{U_{N-1}}[J_0^*(X_N) + X^T_{N-1} Q X_{N-1} + U^T_{N-1} R U_{N-1}] \qquad (12—30)$$

令 $P_N = S$，即 $\qquad J_0^*(X_N) = X_N^T P_N X_N \qquad$ (12—31)

由状态方程 $X_N = AX_{N-1} + BU_{N-1}$，代入（12—31）式得

$$J_0^*(X_N) = (AX_{N-1} + BU_{N-1})^T P_N (AX_{N-1} + BU_{N-1}) \qquad (12—32)$$

代入（12—30）式求 $J_1^*(X_{N-1})$，取

$$\frac{\partial J_1(X_{N-1})}{\partial U_{N-1}} = 0$$

又已知

$$\frac{\partial(U^T{}_{N-1}B^TP_NAX_{N-1})}{\partial U_{N-1}}=B^TP_NAX_{N-1}$$

$$\frac{\partial(X^T{}_{N-1}A^TP_NBU_{N-1})}{\partial U_{N-1}}=B^TP_NAX_{N-1}$$

$$\therefore\quad 2RU_{N-1}+2B^TP_NBU_{N-1}+2B^TP_NAX_{N-1}=0 \qquad (12—33)$$

上式中 R 为正定，$P_N=S$ 为半正定，$\therefore$ $[R+B^TP_NB]$ 为正定，因此

$$U^*{}_{N-1}=-[R+B^TP_NB]^{-1}B^TP_NAX_{N-1}$$

$$=-F_{N-1}X_{N-1} \qquad (12—34)$$

(12—34) 式中 F_{N-1} 为反馈增益阵

$$F_{N-1}=[R+B^TP_NB]^{-1}B^TP_NA \qquad (12—35)$$

将 (12—35)、(12—32) 式代入 (12—30) 式得

$$J_1^*(X_{N-1})=X^T{}_{N-1}(A-BF_{N-1})^TP_N(A-BF_{N-1})X_{N-1}$$

$$+X^T{}_{N-1}QX_{N-1}+X^T{}_{N-1}F^T{}_{N-1}RF_{N-1}X_{N-1}$$

$$=X^T{}_{N-1}P_{N-1}X_{N-1} \qquad (12—36)$$

$$P_{N-1}=Q+F^T{}_{N-1}RF_{N-1}+(A-BF_{N-1})^TP_N(A-BF_{N-1}) \qquad (12—37)$$

由此类推，可得任意段的最优控制序列 U_k^*，$k=0, 1, 2, \cdots, N-1$ 的迭代公式：

$$U_k^*=-F_kX_k \qquad (12—38)$$

$$F_k=[R+B^TP_{k+1}B]^{-1}B^TP_{k+1}A \qquad (12—39)$$

$$P_k=Q+F_k{}^TRF_k+(A-BF_k)^TP_{k+1}(A-BF_k)$$

$$=Q+A^TM_kA \qquad (12—40)$$

$$M_k = P_{k+1} - P_{k+1}B[R + B^T P_{k+1} B]^{-1} B^T P_{k+1} \qquad (12\text{—}41)$$

(12—40) 式就是离散 Riccati 方程。其边界条件为

$$P_N = S$$

逆向求解 (12—40) 式可得 P_k，因而反馈增益阵及最优控制序列均可求得。

可以证明，(12—40) 式离散 Riccati 方程与第十一章用离散极大值原理所得矩阵 Riccati 差分方程 (11—54) 式是一致的。

为了迭代计算方便，可令：

$$Z_1 = Q + A^T P_{k+1} A$$

$$Z_2 = B^T P_{k+1} A$$

$$Z_3 = R + B^T P_{k+1} B$$

则 $F_k = Z_3^{-1} Z_2$

$P_k = Z_1 - Z_2^T Z_3^{-1} Z_2$

计算步骤如下：

1. 令 $P_N = S$
2. 计算 $k = N - 1$ 时 Z_1，Z_2，Z_3
3. 计算 $F_k = Z_3^{-1} Z_2$
4. 计算 P_k
5. 计算 $U_k^* = -F_k X_k$
6. $k = N - 2$，重复计算 F_k，P_k，U_k^*，……

[例] $\min J = \sum_{k=0}^{2} (x_k^2 + r u_k^2) T$

$$T = 1,\ Q = 1,\ R = r$$

$$x_{k+1} = a x_k + b u_k$$

$$A = a,\ B = b$$

1. $P_N = P_3 = 0$

2. $k = N - 1 = 2$ 时

$$Z_1 = Q + A^T P_{k+1} A = Q + A^T P_3 A = 1$$

$$Z_2 = B^T P_{k+1} A = 0$$

$$Z_3 = R + B^T P_{k+1} B = r$$

3. $F_2 = Z_3^{-1} Z_2 = 0$

4. $P_2 = Z_1 - Z_2^T Z_3^{-1} Z_2 = 1$

5. $k = N - 2 = 1$ 时

$$Z_1 = Q + A^T P_2 A = 1 + a^2$$

$$Z_2 = B^T P_2 A = ab$$

$$Z_3 = R + B^T P_2 B = r + b^2$$

6. $F_1 = Z_3^{-1} Z_2 = \frac{ab}{r + b^2}$

7. $P_1 = Z_1 - Z_2^T Z_3^{-1} Z_2 = 1 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r + b^2}$

8. $k = N - 3 = 0$ 时

$$Z_1 = Q + A^T P_1 A = 1 + a^2 P_1 = 1 + a^2\left(1 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r + b^2}\right)$$

$$Z_2 = B^T P_1 A = abP_1 = ab\left(1 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r + b^2}\right)$$

$$Z_3 = R + B^T P_1 B = r + b^2 P_1 = r + b^2\left(1 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r + b^2}\right)$$

9. $F_0 = Z_3^{-1} Z_2 = \frac{abP_1}{r + b^2 P_1}$

10. $u_0^* = -F_0 x_0 = -\frac{abP_1}{r + b^2 P_1} x_0 = -\frac{ab(r + b^2 + ra^2)}{(r + b^2)^2 + ra^2 b^2} x_0$

$u_1^* = -F_1 x_1 = -\frac{ab}{r + b^2} x_1$

$u_2^* = -F_2 x_2 = 0$

当 $N \to \infty$ 时，$P_k = P$ 为定常阵，则反馈增益阵也是常阵

$$F = [R + B^T P B]^{-1} B^T P A \qquad (12\text{—}42)$$

P 可由求解下述非线性方程得出：

$$P = Q + A^T P A - A^T P B[R + B^T P B]^{-1} B^T P A \qquad (12\text{—}43)$$

或用迭代公式计算（见 12—40 式），直到 $|P_k - P_{k+1}| < \varepsilon$，则可认为 P 已趋于稳定。

§ 12-7 连续动态规划

动态规划可用以求解连续系统的最优控制问题。这种情况下，可以推导出一个最优指标泛函的偏微分方程，称为哈密顿-雅可比方程，即动态规划的连续形式。现在我们来推导这一方程。

连续系统的最优控制问题，共数学模型可表述如下：

$$\min \quad J = \int_{t_0}^{t_f} L(X, U, t) dt \qquad (12\text{—}44)$$

$$\dot{X} = f[X(t), U(t), t] \qquad (12\text{—}45)$$

$$X(t_0) = X_0$$

下面为了书写简便用 X 表示 $X(t)$，用 U 表示 $U(t)$。

$$J^*(X_0) = \min_U J = \min_U \int_{t_0}^{t_f} L(X, U, t) dt \qquad (12\text{—}46)$$

当 $t = t_f$ 时 $X(t_f) = X_f$

则 $$J^*(X_f)=\min_U\int_{t_f}^{t_f}L(X,U,t)dt=0 \qquad (12-47)$$

上式代表在终端的指标泛函为零。$J^*(X_f)$ 表示以终端状态 X_f 为初始值的最优指标泛函。因为（12—44）式中 $\theta(X_f)=0$，所以（12—47）式结果应为零。

任意时刻 t 的状态 $X(t)=X$，从 t 到 t_f 这一段时间可分成两段，即从 t 到 $t+\triangle t$ 及从 $t+\triangle t$ 到 t_f。$t+\triangle t$ 时状态设为 $X_{t+\Delta t}$ 如图 12—10。

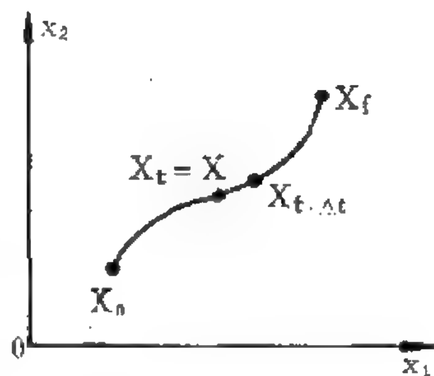


图 12—10 连续系统状态转移

从 t 到 t_f 这一段过程的初始状态为 X，最优指标泛函为：

$$J^*(X)=\min_U\int_t^{t_f}L(X,U,t)dt$$

$$=\min_U\left[\int_t^{t+\Delta t}L(X,U,t)dt+\int_{t+\triangle t}^{t_f}L(X,U,t)dt\right] \qquad (12-48)$$

根据最优化原理，如果从 t_0 到 t_f 的过程是最优控制，那么从 t 到 $t_f(t_f>t>t_0)$ 这个子过程也应是最优控制。又如果从 t 到 t_f 的过程是最优的，则从 $t+\triangle t$ 到 t_f 的后部子过程也是最优的，其中 $t_f>t+\triangle t>t$。

因此可以写作

$$J^*(X_{t+\Delta t})=\min_U\int_{t+\Delta t}^{t_f}L(X,U,t)dt \qquad (12-49)$$

根据最优化原理，（12—48）式可写成：

$$J^*(X)=\min_U\left[\int_t^{t+\Delta t}L(X,U,t)dt+J^*(X_{t+\Delta t})\right] \qquad (12-50)$$

[illegible] 上式可以表示为

$$J^*(X) \approx \min_U [L(X, U, t)\triangle t + J^*(X_{t+\triangle t})] \tag{12—51}$$

将 $X_{t+\triangle t} = X(t+\triangle t)$ 展开成泰勒级数，取一次近似，则：

$$X_{t+\triangle t} = X + \frac{dX}{dt}\triangle t + \cdots \approx X + h(t) \tag{12—52}$$

$$J^*(X_{t+\triangle t}) = J^*[X + h(t)],$$

$$h(t) = \frac{dX}{dt}\triangle t = f(X, U, t)\triangle t$$

将上式展开成泰勒级数，考虑 $J^*(X)$ 既是 X 的函数，也与 t 有关，所以

$$J^*(X_{t+\triangle t}) \approx J^*(X) + \left[\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}\right]^T h(t) + \frac{\partial J^*(X)}{\partial t}\triangle t$$

$$= J^*(X) + \frac{\partial J^*(X)}{\partial t}\triangle t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J^*(X)}{\partial x_i} f_i(X, U, t)\triangle t \tag{12—53}$$

式中 $f_i(X, U, t)$ 是向量 $f(X, U, t)$ 的第 i 个分量。

将（12—53）式代入（12—51）式得：

$$J^*(X) = \min_U \Bigg[L(X, U, t)\triangle t + J^*(X) + \frac{\partial J^*(X)}{\partial t}\triangle t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J^*(X)}{\partial x_i} f_i(X, U, t)\triangle t \Bigg] \tag{12—54}$$

上式中 $\frac{\partial J^*(X)}{\partial t}$ 与 U 无关，故整理后可得

$$-\frac{\partial J^*(X)}{\partial t} = \min_U \left[L(X, U, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial J^*(X)}{\partial x_i} f_i(X, U, t) \right] \tag{12—55}$$

（12—55）式称为连续动态规划基本方程（贝尔曼方程）。

令 $H(X, U, \lambda, t)=L(X, U, t)$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J^{*}(X)}{\partial x_{i}}f_{i}(X, U, t) \quad (12\text{—}56)$$

$$\lambda_{i}=\frac{\partial J^{*}(X)}{\partial x_{i}} \quad (12\text{—}57)$$

（12—55）式可写成：

$$-\frac{\partial J^{*}(X)}{\partial t}=\min_{U}H(X, U, \lambda, t)$$

求最优控制的必要条件如下，

1. 如果对 U 没有约束，

则 $$\frac{\partial H(X, U, \lambda, t)}{\partial U}=0$$

2. 如果对 U 有约束，则应有

$$H(X^{*}, U^{*}, \lambda^{*}, t)\leqslant H(X^{*}, U, \lambda^{*}, t)$$

这和连续极大值原理所得结果一致。

求得最优控制 $U^{*}(t)$ 和最优轨线 $X^{*}(t)$，代入（12—55）式可得哈密顿-雅可比方程[注]：

$$\frac{\partial J^{*}(X^{*})}{\partial t}+L(X^{*}, U^{*}, t)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial J^{*}(X^{*})}{\partial x_{i}^{*}}f_{i}(X^{*}, U^{*}, t)=0 \quad (12\text{—}58)$$

这是一个非线性偏微分方程，其边界条件为

[注] 也可将（12—55），（12—58）式合称为贝尔曼—哈密顿—雅可比方程。

1. $\theta(X_f)=0$ 时，$J^*(X_f)=0$

2. $\theta(X_f)\neq 0$ 时，$J^*(X_f)=\theta(X_f)$ (12—59)

如果（12—58）式能解，则可求出最优控制，所以（12—58）式是最优控制的充分条件，可惜的是，这个方程一般不容易解出。

值得注意的是，当 $t_f\to\infty$ 时，在 t 时刻附近变化一点，可认为 $X(t)$ 基本不变，于是 $J^*(X)$ 与 t 无关，因此（12—58）式中$\dfrac{\partial J^*(X)}{\partial t}=0$

［例 1］

$$\min\ J=\int_0^\infty x^2dt$$

$$\dot{x}=ax+bu$$

$$x(0)=x_0$$

$$-1\leqslant u\leqslant 1$$

本例中 $t_f=\infty$，　$\therefore\ \dfrac{\partial J^*(x)}{\partial t}=0$

（12—55）式可写作

$$\min_u\left[x^2+\frac{\partial J^*(x)}{\partial x}(ax+bu)\right]=0$$

当 $\dfrac{\partial J^*(x)}{\partial x}b<0$ 时，取 $u^*=+1$

$\dfrac{\partial J^*(x)}{\partial x}b>0$ 时，取 $u^*=-1$

$$\therefore\quad u^*=-sgn\left(b\frac{\partial J^*(x)}{\partial x}\right)$$

代入（12—55）式，可得

$$x^2+\frac{\partial J^*(x)}{\partial x}\left[ax-bsgn\left(b\frac{\partial J^*(x)}{\partial x}\right)\right]=0$$

或 $$x^2+ax\frac{\partial J^*(x)}{\partial x}-\left|b\frac{\partial J^*(x)}{\partial x}\right|=0$$

边界条件为 $J^*(x_f)=0$

求解这个非线性偏微分方程要借助于电子计算机，求得 $J^*(x)$ 以后，即可得最优控制。

用连续极大值原理求解本例题时，先构造哈密顿函数 $H=x^2+\lambda(ax+bu)$

显见，当 $u^*=-sgn\, b\lambda$ 时，H 为最小，代人正则方程组：

$$\dot{x}=ax+bu=ax-bsgn(b\lambda)$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-a\lambda-2x$$

求解正则方程组，可得最优轨线 x^*，显然，求解两个非线性常微分方程较求解一个非线性偏微分方程（即哈密顿-雅可比方程）要容易些。

[例 2] $$\min\ J=\int_0^{t_f}dt$$

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-x_1-4x_2+u$$

$$-1\leqslant u\leqslant 1$$

解：如果 t_f 很大，则可近似认为 $\frac{\partial J^*}{\partial t}=0$

哈密顿-雅可比方程为

$$\min\left[\frac{\partial J^*}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial J^*}{\partial x_2}\dot{x}_2+1\right]=0$$

或 $$\min\left[\frac{\partial J^*}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial J^*}{\partial \dot{x}_1}(-x_1-4\dot{x}_1+u)+1\right]=0$$

可求得　　$u^* = -sgn\dfrac{\partial J^*}{\partial \dot{x}_1}$　代入上式得

$$\dot{x}_1\left[\frac{\partial J^*}{\partial x_1}-4\frac{\partial J^*}{\partial \dot{x}_1}\right]-x_1\left(\frac{\partial J^*}{\partial \dot{x}_1}\right)-\left(\left|\frac{\partial J^*}{\partial \dot{x}_1}\right|-1\right)=0$$

借助数字计算机可求解这一非线性偏微分方程。

由哈密顿-雅可比方程也可推导出正则方程，将 U^* 代入（12—55）式可得：

$$\frac{\partial J^*(X)}{\partial t}+L(X,\ U^*,\ t)+\left[\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}\right]^T f(X,\ U^*,\ t)=0$$

对 X 求偏导数，得：

$$\frac{\partial^2 J^*(X)}{\partial X\partial t}+\frac{\partial L(X,\ U^*,\ t)}{\partial X}+\frac{\partial^2 J^*(X)}{\partial X^2}f(X,\ U^*,\ t)$$

$$+\left[\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}\right]^T\frac{\partial f(X,\ U^*,\ t)}{\partial X}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}=\frac{\partial^2 J^*(X)}{\partial X\partial t}+\frac{\partial^2 J^*(X)}{\partial X^2}\frac{dX}{dt}$$

代入上式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}+\frac{\partial L(X,\ U^*,\ t)}{\partial X}+$$

$$+\left[\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}\right]^T\frac{\partial f(X,\ U^*,\ t)}{\partial X}=0$$

令 $X=X^*$，　$\lambda(t)=\dfrac{\partial J^*(X)}{\partial X}$，代入可得

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)=-\frac{\partial L(X^*,\ U^*,\ t)}{\partial X}-\lambda^T\frac{\partial f(X^*,\ U^*,\ t)}{\partial X}=-\frac{\partial H}{\partial X}$$

这是正则方程组中的伴随方程，最初由欧拉方程导得，现在由哈密顿-雅可比方程推导出同样结论。可见，用动态规划方法，古典变分法及极大值原理求解同一个连续系统最优控制问题时，所得结果是一致的。

[例]
$$\min \quad J=\int_0^{t_f}\left(x^2+\tfrac{1}{2}x^4+u^2\right)dt$$

$$\frac{dx}{dt}=u$$

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t}=\min_u\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+u^2+\frac{\partial J^*}{\partial x}u\right)$$

$$\frac{\partial\left(x^2+\frac{1}{2}x^4+u^2+\frac{\partial J^*}{\partial x}u\right)}{\partial u}=0$$

$$2u+\frac{\partial J^*}{\partial x}=0$$

$$u^*=-\frac{1}{2}\frac{\partial J^*}{\partial x}$$

$$\therefore\quad -\frac{\partial J^*}{\partial t}=x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^2$$

$$=x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial J^*}{\partial x}\right)^2$$

边界条件 $J^*(x_f)=0$

如果令 $\lambda=\dfrac{\partial J^*}{\partial x}$，

则 $u^*=-\frac{1}{2}\lambda$ 这是应用极大值原理所得结果。与动态规划求解结果一致。

§ 12-8 用连续动态规划解线性二次型问题

我们以线性二次型问题为例说明哈密顿-雅可比方程的应用。问题的数学模型为：

$$\min \quad J=\frac{1}{2}X_f{}^T SX_f+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(X^TQX+U^TRU)dt \tag{12—60}$$

$$\dot{X}=AX+BU$$

$$X(t_0)=X_0$$

由（12—55）式，有如下方程

$$-\frac{\partial J^*(X)}{\partial t}=\min_U\left[\frac{1}{2}X^TQX+\frac{1}{2}U^TRU+(AX+BU)^T\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}\right]$$

令 $\frac{\partial}{\partial U}\left[\frac{1}{2}X^TQX+\frac{1}{2}U^TRU+(AX+BU)^T\frac{\partial J^*(X)}{\partial X}\right]=0$

则
$$U^*(t)=-R^{-1}B^T\frac{\partial J^*(X)}{\partial X} \tag{12—61}$$

将 $U^*(t)$ 代入哈密顿-雅可比方程，经过整理，得

$$-\frac{\partial J^*(X^*)}{\partial t}=\frac{1}{2}X^{*T}QX^*-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial J^*(X^*)}{\partial X}\right]^T BR^{-1}B^T\frac{\partial J^*(X^*)}{\partial X}+X^{*T}A^T\frac{\partial J^*(X^*)}{\partial X} \tag{12—62}$$

已知 $J^*(X^*)$ 为二次型，令

$$J^*(X^*)=\frac{1}{2}X^{*T}P(t)X^* \quad (12\text{—}63)$$

$P(t)$ 为 $n\times n$ 对称阵。

$\frac{\partial J^*}{\partial X}=P(t)X^*$，代入（12—61）式得：

$$U^*(t)=-R^{-1}B^TP(t)X^* \quad (12\text{—}64)$$

又
$$\frac{\partial J^*}{\partial t}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}(XPX)=\frac{1}{2}X^T\dot{P}X \quad (12\text{—}65)$$

上式可证明如下：

$$\frac{d}{dt}(X^TPX)=\left[\frac{\partial X^TPX}{\partial X}\right]^T\frac{dX}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}X^TPX$$

$$=2(PX)^T\frac{dX}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}X^TPX$$

$$\dot{X}^TPX+X^TP\dot{X}+X^T\dot{P}X=2(PX)^T\dot{X}+\frac{\partial}{\partial t}X^TPX$$

可以证明 $X^TP\dot{X}=\dot{X}^TPX$

$$\therefore \qquad \frac{\partial}{\partial t}X^TPX=X^T\dot{P}X$$

将（12—64）、（12—65）两式代入（12—62）式，可得

$$-\frac{1}{2}X^{*T}\dot{P}X^*=\frac{1}{2}X^{*T}QX^*-\frac{1}{2}X^{*T}P(t)BR^{-1}B^TP(t)X^*$$
$$+X^{*T}A^TP(t)X^*$$

因为 $P(t)$ 是对称的，所以 $A^TP=\frac{1}{2}(A^TP+PA)$，代入上式可得

$$-\frac{dP(t)}{dt}=Q+A^TP(t)+P(t)A-P(t)BR^{-1}B^TP(t) \quad (12\text{—}66)$$

这是以前由极大值原理推导出的微分 Riccati 方程，现在用动态规划方法导出。

小　　结

1. 用动态规划求解多段决策过程的寻优问题是很简单的。这种方法的实质是，以最优化原理为基础，将一个 N 段最优决策问题转化为 N 个一段最优决策问题。

2. 动态规划的基本方程是

$$J_{N-k}^*(X_k)=\min_{U_k}[L(X_k,\ U_k)+J_{N-k-1}^*(X_{k+1})]$$

$$X_{k+1}=f(X_k,\ U_k)$$

3. 线性二次型无约束最优控制问题在用动态规划求解时可用解析法。有约束的最优控制问题或非线性系统寻优问题用动态规划求解时要用数值计算方法。计算工作量大是动态规划的主要弱点，一般只适用于低维情况。

4. 动态规划的主要优点是原理简明，适用性较广。可应用于离散系统和连续系统的最优控制以及随机最优控制问题。

5. 连续动态规划的基本方程为哈密顿-雅可比方程，这是最优控制必须满足的必要条件。从这个方程出发可以推导得到伴随方程以及微分矩阵 Riccati 方程，与古典变分法、极大值原理所得结果完全相同。哈密顿-雅可比方程是非线性偏微分方程，实际上较难求解。

习　　题

1. 设将某量 c 分成 n 份 ($c>0$)，使这 n 份的乘积为最大，用动态规划求这个最优分配问题。

2. 设离散系统最优控制问题为

$$\min \quad J=\sum_{k=0}^{N-1}(qx_k^2+ru_k^2)T$$

$$x_{k+1}=ax_k+bu_k$$

$$x(0)=x_0$$

证明

$$u_k^*=-f_kx_k$$

$$J^*(x_k)=p_kx_k^2.$$

$$f_k=\frac{p_{k+1}ab}{rT+b^2p_{k+1}}$$

$$p_k=(q+rf_k^2)T+p_{k+1}(a-bf_k)^2$$

[提示] 设 $N=10$，分别求 $J_0^*(x_{10})$， $J_1^*(x_9)$， $J_2^*(x_8)$ 及 u_9^* u_8^*，推广得到上述一般关系。

3． 设离散系统的最优控制问题为

$$\min \quad J=\sum_{k=0}^{2}\{|x_k|+3|u_{k-1}+1|\}+|x_3|$$

$$x_{k+1}=x_ku_k+u_k$$

$$x(0)=1$$

控制变量 u_k 取值为 $+1$， -1， 或 0

用动态规划法求 u_0^*， u_1^*， u_2^*。

4． 设最优控制问题为

$$\min \int_0^{t_1} x^2dt$$

$$\dot{x}=-ax+bu$$

$$|u|\leqslant U$$

a 及 b 为正的常数。

用动态规划法求最优控制。

5. 已知线性二次型问题为

$$\min \int_0^{t_f} (qx^2 + ru^2) dt$$

$$\dot{x} = Ku$$

$$t = t_f \text{ 时 } x(t_f) = x_f$$

设 $$J^*(x) = \lambda_1(t) + 2\lambda_2(t)x + \lambda_3(t)x^2$$

用动态规划法求该问题的微分 Riccati 方程。

参 考 文 献

[1] 最优化方法 中国科学院数学研究所运筹室 科学出版社 1980

[2] 最优化方法 南京大学数学系 科学出版社 1978

[3] 优选法 中国科学院数学研究所运筹室 科学出版社 1978

[4] Foundations of Optimization (Second edition) C. S. Beightler, D. T. Phillips, D. J. Wilde 1979

[5] Introduction to Nonlinear Optimization (A problem solving approach) D. A. Wismer, R. Chattergy 1978

[6] Nonlinear programming (Analysis and Methods) M. Avirel 1976

[7] 电力系统专题讲义（西安交大）関根泰次，高桥一弘 1979

[8] Systems, Networks, and Computation (Multivariable methods) M. Athans, M. L. Dertouzos 1974

[9] Computer-aided Network Design (Revised edition) 1972

[10] Optimization and probability in Systems Engineering J. G. Rau 1970

[11] 最优化技术基础 清华大学自动化系 1980

[12] 数学手册 人民教育出版社 1979

[13] 网络图论简介 邱关源 人民教育出版社 1978

[14] 工程控制论（修订版）上册 钱学森、宋健 科学出版社 1980

[15] 计算机控制技术 南京工学院 国防工业出版社 1979

[16] 最优控制问题的计算方法 宫锡芳 科学出版社 1979

[17] 极值控制与极大值原理 中国科学院系统科学研究所 科学出版社 1980

[18] 最优控制设计基础 王永初 科学出版社 1980

[19] Optimum Systems Control A. P. Sage, C. C. White 1977
[20] Automatic Control Systems B. C. Kuo 1976
[21] Modern Control Engineering M. Noton 1972
[22] Modern Control Theory J. T. Tou 1964
[23] Modern Control System, Theory and Application S. M. Shinners 1978
[24] Control theory Identification and Optimal Control C. B. Speedy, R. F. Brown, G. C. Goodwin 1970
[25] An Introduction to Linear Control System T. E. Fortmann/and K. L. Hitz 1977
[26] A new approach to variable metric algorithms R. Fletcher Comput. Jour. 1970, 13.
[27] Introduction to Operations Research (A Computer-oriented algorithmic approach) Billy E. Gillett 1976
[28] Design and Planning of Engineering systems Dale D. Meredith, K. W. Wong, R. W. Woodhead, R. H. Wortman. 1973
[29] Applied Nonlinear Programming D.M.Himmelblan 1972
[30] Optimization inelectrical-magnetic system design R. Shinzinger. Recent Advances in Optimization Techniques. Edited by A. Lavi, T. P. Vogl 1965
[31] 现代控制工程 K. Ogata, 1970, 中译本。
[32] Optimization Theory with Applications Donald A. Pierre 1969
[33] 等相移网络的最优化设计方法 计量学报 Vol. 1No. 1, 1980., 张仲华
[34] 电磁铁优化设计 A. Г. 尼基钦科 沈阳机电学院译 1982年

[35] 电荷模拟法计算静电场时最优化算方法研究　熊汉亮　清华大学电机系研究生论文　1982 年
[36] 直流螺管电磁铁最佳设计的方法与程序　陈德桂　低压电器技术情报　1981 第1期
[37] 电机的优化设计　张德怡　中小型电机技术情报，1979 No. 1.
[38] An Augmented Lagrangian Function For A Class of Quadratic Programming Problems. Dong Ming-Chui (董名垂) 1981 Istituto di Analisi dei Sistemied Informatica del CNR, Roma.
[39] 现代控制理论入门　马植衡编译　国防出版社　1982
[40] 现代控制理论基础　谢绪恺　辽宁人民出版社　1980 年
[41] SWIFT-A New Constrained optimization Tecenique, Computer methods in appeied mechanics and Engineering 6 (1975), B. V. Sheela, P. Ramamoorthy.
[42] Optimization theory and applications S. S. Rao (Indian Institute of Technology, Kanpur), 1978.
[43] 最优设计的数学方法　程极泰　国防工业出版社，1981
[44] 最优化方法在电器设计中的应用　蔡宣三　低压电器　1983
[45] 三相磁放大器的优化设计　田秋生　清华大学电机系研究生论文　1983 年

附录　非线性规划的几个计算机程序 (FORTRAN)

（在 RD—11 小型机上通过）

Ⅰ. TYPE AS1　　梯度法
Ⅱ. TYPE AS7　　共轭梯度 (Fletcher-Reeves) 法
Ⅲ. TYPE AS8　　变尺度 (DFP) 法
Ⅳ. TYPE AQ1　　单纯形法
Ⅴ. TYPE AQS1　 SWIFT 法（计算有约束的优化问题）。

关于 CONVRG 子程序的说明

CONVRG 是收敛判据子程序。其中：

XE——X 的每一分量允许误差 ε，

FE——$f(X)$ 的允许误差 ε，

GE——$\nabla f(X)$ 的每一分量的允许误差 ε

现就此子程序说明如下：

1. 关于 $f(X)$ 的判别

在计算过程中，因 $f(X^k)(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ 可取不同的值，所以程序中就下列两种情况作了不同的处理：

① $|f(X^k)|<0+\delta$

这里 δ 是一个很小的正数，程序中取 $\delta=FX$。对于这种情况，若采用相对误差

$$\left|\frac{f(X^k)-f(X^{k+1})}{f(X^k)}\right|<FE=\varepsilon$$

进行判别，因 $f(X^k)\to 0$ 而出现溢出的现象，以致条件无法满足，因此采用绝对误差进行判别

$$|f(X^k)-f(X^{k+1})|<FE=\varepsilon$$

② $|f(X^k)|\geqslant 0+\delta$

这时因 $f(X^k)\nrightarrow 0$，所以采用相对误差

$$\left|\frac{f(X^k)-f(X^{k+1})}{f(X^k)}\right|<FE=\varepsilon$$

进行判别。

2. 当 $f(X)$ 在 X^* 附近变化较平缓时，若仅判 $f(X)$ 则容易产生过早停机现象，而 X^k 距 X^* 还有一段距离。因此当 $f(X)$ 收敛条件满足时接着判 X、$\nabla f(X)$ 是否满足收敛条件。

考虑到 $X^k=[x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k]^T$ 也可能取不同的值，所以采用与 $f(X)$ 相类似的判别方法

① $x_i^k<0+\delta \quad i=1, 2, \cdots, n$

用绝对误差进行判别：

$$|x_i^k-x_i^{k+1}|<XE=\varepsilon \quad i=1, 2, \cdots, n$$

② $x_i^k>0+\delta \quad i=1, 2, \cdots, n$

用相对误差进行判别：

$$\left|\frac{x_i^k-x_i^{k+1}}{x_i^k}\right|<XE=\varepsilon \quad i=1, 2, \cdots, n$$

对 X 的每一分量都区分其不同情况，用上述两方法之一作出判别，当所有分量都满足时，再检查 $\nabla f(X)$ 是否满足给定的收敛条件。

对于 $\nabla f(X)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$，因在接近极值点

时各分量都趋于 0，所以可判别每一分量的绝对值是否小于给定的允许误差，也可判别每个分量的绝对误差是否满足收敛条件。本程序中采用后一种方法，即：

$$\left|\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X=X^k}-\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X=X^{k+1}}\right|<GE=e$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

当 $f(X)$、X、$\nabla f(X)$ 都满足给定的收敛条件时，打印结果并停机，否则继续迭代，直到所有的条件都满足为止。

Ⅰ. TYPE AS1. 梯度法

```
C       GRADIENT METHOD
        DIMENSION X(10), Y(10), GX(10), GY(10), S(10)
        WRITE (5,2000)
2000    FORMAT(1X, 3HN=, 4HMK=, 4HX1=, 4HX2=, 4HX3=, 4HX4=)
        READ (5,2010) N, MK, X(1), X(2), X(3), X(4)
2010    FORMAT (2I4, 4F10. 5)
        K=0
        CALL FUNG(X, GX, N, FX)
        WRITE(5, 2015) FX, X(1), X(2), X(3), X(4)
2015    FORMAT  (1H0, 14HSTARTING  VALUE,  /1X, 3HFX=, E15. 6, /
                                                1X, 3HX= , 4E15. 6)
10      A=0.
        DO 20 I=1, N
20      A=A+GX(I) * * 2
        A=SQRT(A)
        DO 30 I=1, N
30      S(I)=-GX(I)/A
        CALL SEARCH(X, S, N, MK, H)
        DO 40 I=1,N
40      Y(I)=X(I)+H * S(I)
        CALL FUNG(Y, GY, N, FY)
        CALL CONVRG(X, Y, GX, FX, FY, N, IP)
        IF (IP. EQ. 1) GO TO 200
        IF(MK. EQ. 0) GO TO 42
        WRITE (5,2020) K
2020    FORMAT(1X, 2HK=, I3)
        WRITE (5,2030) FX, X(1), X(2), X(3), X(4), GX(1), GX(2),
        GX(3), GX(4)
2030    FORMAT (1X, 3HFX=, E15.6, /1X, 3HX= ,4E15.6, /1X, 3HGX= ,
                                                         4E15.6)
42      IF (K. EQ. 100) GO TO 60
45      DO 50 I=1, N
        X(I)=Y(I)
50      GX(I)=GY(I)
        FX=FY
        K=K+1
```

```
      GO TO 10
60    WRITE(5,2035)  FX,  X(1), X(2), X(3), X(4), GX(1), GX(2),
                                                 GX(3), GX(4)
2035  FORMAT(1H0, 3HFX=, E15.6, /1X, 3HX= , 4E15.6, /1X, 3HGX=,
                                                      4E15.6)
      WRITE(5,2040)
2040  FORMAT(1X, 27HIF MA=1 CONTINUE MA=0 STOP)
      READ(5,2050) MA
2050  FORMAT(I1)
      IF(MA. EQ. 0) GO TO 70
      K=0
      GO TO 45
70    WRITE(5,2060)
2060  FORMAT(1H0, 28HNOT REACH OPTIMIZATION POINT)
      WRITE (5,2065)  FX,  X(1), X(2), X(3), X(4), GX(1), GX(2),
                                                 GX(3), GX(4)
2065  FORMAT (1X, 3HFX=, E15.6, /1X, 3HX=, 4E15.6, /1X, 3HGX= ,
                                                      4E15.6)
      STOP
200   WRITE(5,2070)
2070  FORMAT(1H0, 18HOPTIMIZATION POINT)
      WRITE(5,2090) K
2090  FORMAT(1X, 2HK= ,I4)
      WRITE (5,2080)  FX,  X(1), X(2), X(3), X(4), GX(1), GX(2),
                                                 GX(3), GX(4)
2080  FORMAT(1X, 3HFX=, E15.6, /1X, 3HX= ,4E15.6, /1X, 3HGX= ,
                                                      4E15.6)
1000  STOP 1000
      END
```

. TYPE. AS2. FOR

```
      SUBROUTINE FUNG (X, GX, N, FX)
      DIMENSION X(N), GX(N)
      A=X(1)+10. *X(2)
      B=X(3)-X(4)
      C=X(2)-2. *X(3)
      D=X(1)-X(4)
```

```
      FX=A ** 2+5. *B ** 2+C ** 4+10. *D ** 4
      GX(1)=2. *A+40. *D ** 3
      GX(2)=20. *A+4. *C ** 3
      GX(3)=10. *B-8. *C ** 3
      GX(4)=-10. *B-40. *D ** 3
10    RETURN
      END
```

. TYPE AS3. FOR

```
      SUBROUTINE SEARCH(X, S, N, MK, H)
      DIMENSION X(N), S(N), U(10), G(10)
      E=0.000001
      MD=0
      A=0.0
      B=1.0
10    ST=B-A
      IF(ST. LE. E) GO TO 80
      TA=0.382 * ST+A
      TB=0.618 * ST+A
      DO 20 I=1, N
20    U(I)=X(I)+TA * S(I)
      CALL FUNG(U, G, N, FA)
      DO 30 I=1, N
30    U(I)=X(I)+TB * S(I)
      CALL FUNG (U, G, N, FB)
40    IF(FB. GT. FA) GO TO 50
      A=TA
      GO TO 60
50    B=TB
60    MD=MD+1
      GO TO 10
80    H=(A+B)/2.0
      IF(MK. EQ. 0) GO TO 100
      WRITE(5,2000) MD, H
2000  FORMAT(1H0, 3HMD=, I3, /1X, 3HH= , E15.6)
100   RETURN
      END
```

. TYPE AS4. FOR

```
      SUBROUTINE CONVRG(X, Y, G, FX, FY, N, IP)
      DIMENSION X(N), Y(N), G(N)
      XE=0.0005
      FE=0.00001
      GE=0.0005
      IF(ABS(FX). LT. FE) GO TO 10
      IF(ABS((FX-FY)/FX). GT. FE) GO TO 60
      GO TO 20
10    IF (ABS (FX-FY). GT. FE) GO TO 60
20    DO 40 I=1, N
      IF(ABS(X(I)). LE. XE) GO TO 30
      IF(ABS((X(I)-Y(I))/X(I)). GT. XE) GO TO 60
      GO TO 40
30    IF(ABS(X(I)-Y(I)). GT. XE) GO TO 60
40    CONTINUE
      DO 50 I=1, N
50    IF(ABS(G(I)). GT. GE) GO TO 60
      IP=1
      RETURN
60    IP=2
      RETURN
      END
```

I. TYPE AS7. 共轭梯度法。

```
C     FLETCHER REEVES MEHTOD
      DIMENSION X(10), Y(10), GX(10), GY(10), S(10), S1(10)
      WRITE(5,2000)
2000  FORMAT(1X, 4HN=   , 5HMK=   , 5HX1=   , 5HX2=  , 5HX3=  ,
                                                        5HX4=  )
      READ (5,2010) N, MK, X(1), X(2), X(3), X(4)
2010  FORMAT (2I4, 4F10. 5)
      M=0
10    K=1
      CALL FUNG (X, GX, N, FX)
      IF(M. NE. 0) GO TO 20
      WRITE(5,2020)
2020  FORMAT(1H0, 14HSTARTING VALUE)
      WRITE(5,2030) FX, X(1), X(2), X(3), X(4)
2030  FORMAT(1X, 3HFX= , E15.6, /1X, 3HX=  , 4E15.6)
20    DO 30 I=1, N
30    S(I)=-GX(I)
40    SUM=0.0
      DO 50 I=1, N
50    SUM=SUM+S(I) ** 2
      SUM=SQRT(SUM)
      DO 60 I=1, N
60    S1(I)=S(I)/SUM
70    CALL SEARCH(X, S1, N, MK, H)
      DO 80 I=1, N
80    Y(I)=X(I)+H * S1(I)
      CALL FUNG(Y, GY, N, FY)
      IF(MK. EQ. 0) GO TO 90
      WRITE(5,2040) M
2040  FORMAT(1X, 2HM= , I3)
      WRITE (5,2050)  FY,  Y(1),  Y(2),  Y(3),  Y(4),  GY(1),  GY(2),
                                                     GY(3), GY(4)
2050  FORMAT(1X, 3HFX=  , E15.6, /1X, 3HX=  , 4E15.6, /1X,  3HGX
                                                       = , 4E15.6)
90    IF(M. NE. 0) GO TO 100
      CALL CONVRG(X, Y, GX, FX, FY, N, IF)
```

```
      IF(IP. EQ. 1) GO TO 170
100   CALL CONVRG(X, Y, GY, FX, FY, N, IP)
      IF(IP. EQ. 1) GO TO 170
      IF(K. LT. N) GO TO 120
      DO 110 I=1, N
110   X(I)=Y(I)
      GO TO 10
120   IF(M. LT. 100) GO TO 130
      WRITE (5,2055)  FX,  X(1),  X(2),  X(3),  X(4),  GX(1),  GX(2),
                                                    GX(3),  GX(4)
2055  FORMAT(1H0, 3HFX=  , E15.6, / 1X, 3HX=  , 4E15.6, /1X, 3HGX
                                                      =  , 4E15.6)
      WRITE(5,2060)
2060  FORMAT(1X, 27HIF MA=1 CONTINUE MA=0 STOP)
      READ(5,2070) MA
2070  FORMAT(I4)
      IF(MA. EQ. 0) GO TO 160
      M=0
130   A=0.0
      B=0.0
      C=0.0
      DO 140 I=1, N
      A=A+GY(I) ** 2
      B=B+GY(I) * GX(I)
140   C=C+GX(I) ** 2
      V=(A-B)/C
      DO 150 I=1, N
      S(I)=-GY(I)+V * S(I)
      GX(I)=GY(I)
150   X(I)=Y(I)
      FX=FY
      M=M+1
      K=K+1
      GO TO 40
160   WRITE(5,2080)
2080  FORMAT(1X, 28HNOT REACH OPTIMIZATION POINT)
      WRITE(5,2090) FY, Y(1), Y(2), Y(3), Y(4), GY(1), GY(2), GY(3),
                                                            GY(4)
```

```
2090  FORMAT(1X, 3HFX=  , E15.6, / 1X, 3HX=  , 4E15.6,/ 1X, 3HGX
                                                        =  , 4E15.6)
1     STOP 1
170   WRITE(5,2100)
2100  FORMAT(1X, 18HOPTIMIZATION POINT)
      WRITE(5,2120) M
2120  FORMAT(1X, 2HM= , I4)
      WRITE (5,2110)  FX, X(1), X(2), X(3), X(4), GX(1), GX(2),
                                                   GX(3), GX(4)
2110  FORMAT(1X, 3HFX= , E15.6, / 1X, 3HX=, 4E15.6, /1X 3HGX=,
      4E15.6)
1000  STOP 1000
      END
```

```
. TYPE AS2. FOR

      SUBROUTINE FUNG(X, GX, N, FX)
      DIMENSION X(N) , GX(N)
      A=X(1)+10. * X(2)
      B=X(3)-X(4)
      C=X(2)-2.  * X(3)
      D=X(1)-X(4)
      FX=A ** 2+5. * B ** 2+C ** 4+10. * D ** 4
      GX(1)=2. * A+40. * D ** 3
      GX(2)=20. * A+4. * C ** 3
      GX(3)=10. * B-8. * C ** 3
      GX(4)=-10. * B-40. * D ** 3
10    RETURN
      END
```

```
. TYPE AS3. FOR
      SUBROUTINE SEARCH(X, S, N, MK, H)
      DIMENSION X(N), S(N), U(10), G(10)
      E=0.000001
      MD=0
      A=0.0
      B=1.0
10    ST=B-A
```

```
      IF(ST. LE. E) GO TO 80
      TA=0.382 * ST+A
      TB=0.618 * ST+A
      DO 20 I=1, N
20    U(I)=X(I)+TA * S(I)
      CALL FUNG(U, G, N, FA)
      DO 30 I=1, N
30    U(I)=X(I)+TB * S(I)
      CALL FUNG(U, G, N, FB)
40    IF(FB. GT. FA) GO TO 50
      A=TA
      GO TO 60
50    B=TB
60    MD=MD+1
      GO TO 10
80    H=(A+B)/2. 0
      IF(MK. EQ. O) GO TO 100
      WRITE(5,2000) MD, H
2000  FORMAT(1H0, 3HMD= , I3, /1X, 3HH=  , E15.6)
100   RETURN
      END
```

. TYPE AS4. FOR

```
      SUBROUTINE CONVRG(X, Y, G, FX, FY, N, IP)
      DIMENSION X(N), Y(N), G(N)
      XE=0.0005
      FE=0.00001
      GE=0.0005
      IF(ABS(FX). LT. FE) GO TO 10
      IF(ABS((FX-FY)/FX). GT. FE) GO TO 60
      GO TO 20
10    IF(ABS(FX-FY). GT. FE) GO TO 60
20    DO 40 I=1, N
      IF(ABS(X(I)). LE. XE) GO TO 30
      IF(ABS((X(I)-Y(I))/X(I)). GT. XE) GO TO 60
      GO TO 40
30    IF(ABS(X(I)-Y(I)). GT. XE) GO TO 60
```

```
40      CONTINUE
        DO 50 I=1, N
50      IF(ABS(G(I)). GT. GE) GO TO 60
        IP=1
        RETURN
60      IP=2
        RETURN
        END
```

Ⅱ. TYPE ASB. 变尺度 (DFP) 法。

```
C       DAVIDON FLETCHER POWELL METHOD
        DIMENSION  X(10), Y(10), GX(10), GY(10), S(10), Z(10), S1(10),
                                                                DX(10),
    1   DG(10), A(10, 10), B(10, 10), H(10, 10)
        WRITE(5,2000)
2000    FORMAT(1X, 3HN=  , 4HMK =, 4HX1= , 4HX2  = , 4HX3  = ,
        4HX4=  ) READ(5,2010) N, MK, X(1), X(2), X(3), X(4) .
2010    FORMAT(2I4, 4F10. 5)
        M=0
        K=1
        DO 5 I=1, N
        DO 5 J=1, N
        IF(I. EQ. J) GO TO 2
        H(I, J)=0.0
        GO TO 5
2       H(I, J)=1.
5       CONTINUE
        CALL FUNG(X, GX, N, FX)
        WRITE(5,2020)
2020    FORMAT(1H0, 14HSTARTING VALUE)
        WRITE(5,2030) FX, X(1), X(2), X(3), X(4)
2030    FORMAT(1X, 3HFX= , E15.6, /1X, 3HX=  , 4E15.6)
10      DO 20 I=1, N
        S(I)=0.0
        DO 20 J=1, N
        S(I)=S(I)-H(I, J) * GX(J)
20      CONTINUE
        SUM=0.0
        DO 30 I=1, N
30      SUM=SUM+S(I) ** 2
        SUM=SQRT(SUM)
        DO 40 I=1, N
40      S1(I)=S(I)/SUM
        CALL SEARCH(X, S1, N, MK, STEP)
        DO 50 I=1, N
50      Y(I)=X(I)+STEP * S1(I)
```

```
      CALL FUNG(Y, GY, N, FY)
      IF(MK. EQ. 0) GO TO 60
      WRITE(5,2040) M
2040  FORMAT(1X, 2HM= , I4)
      WRITE (5,2050)  FY, Y(1), Y(2), Y(3), Y(4), GY(1), GY(2),
                                                     GY(3), GY(4)
2050  FORMAT(1X, 3HFX=  , E15.6, / 1X, 3HX=  , 4E15.6, /1X, 3HGX
                                                      =  , 4E15.6)
60    IF(M. NE. 0) GO TO 70
      CALL CONVRG(X, Y, GX, FX, FY, N, IP)
      IF(IP. EQ. 1) GO TO 220
70    CALL CONVRG(X, Y, GY, FX,FY, N, IP)
      IF(IP. EQ. 1) GO TO 220
      IF(K. EQ. N) GO TO 170
      DO 80 I=1, N
      DG(I)=GY(I)-GX(I)
80    DX(I)=Y(I)-X(I)
      C=0.0
      DO 90 I=1, N
90    C=C+DX(I) * DG(I)
      DO 100 I=1, N
      DO 100 J=1, N
      A(I, J)=(DX(I) * DX(J))/C
100   CONTINUE
      DO 110 I=1, N
      Z(I)=0.
      DO 110 J=1, N
110   Z(I)=Z(I)+H(I,J) * DG(J)
      DA=0.
      DO 120 I=1, N
      DA=DA+DG(I) * Z(I)
120   CONTINUE
      DO 130 I=1, N
      DO 130 J=1, N
      B(I, J)=Z(I) * Z(J))/DA
130   CONTINUE
      DO 140 I=1, N
```

```
      DO 140 J=1, N
      H(I, J)=H(I, J)+A(I, J)-B(I, J)
140   CONTINUE
      K=K+1
145   IF(M. EQ. 100) GO TO 200
150   M=M+1
      FX=FY
      DO 160 I=1, N
      GX(I)=GY(I)
160   X(I)=Y(I)
      GO TO 10
170   K=1
      DO 190 I=1, N
      DO 190 J=1, N
      IF(I. EQ. J) GO TO 180
      H(I, J)=0.
      GO TO 190
180   H(I, J)=1.
190   CONTINUE
      GO TO 145
200   WRITE(5,2060)
2060  FORMAT(1X, 27HIF MA=1 CONTINUE MA=0 STOP)
      READ(5,2070) MA
2070  FORMAT(I2)
      IF(MA. EQ. 0) GO TO 210
      M=0
      GO TO 150
210   WRITE (5,2080)  FX,  X(1),  X(2),  X(3),  X(4),  GX(1),  GX(2)
                                                     GX(3),  GX(4),
2080  FORMAT(1H0, 3HFX= , E15.6, / 1X, 3HX= , 4E15.6, / 1X, 3HGX
                                                        =  , 4E15.6)
      WRITE(5,2090)
2090  FORMAT(1X, 28HNOT REACH OPTIMIZATION POINT)
      STOP
220   WRITE(5,2100)
2100  FORMAT(1H0, 18HOPTIMIZATION POINT)
      WRITE(5,2110) M
```

```
2110  FORMAT(1X, 2HM=, I3)
      WRITE (5,2200)  FX, X(1), X(2), X(3), X(4), GX(1), GX(2),
                                                    GX(3), GX(4)
2200  FORMAT (1X, 3HFX=  , E15.6, /1X, 3HX=  , 4E15.6, /1X, 3HGX
                                                     =  , 4E15.6)
1000  STOP 1000
      END
```

. TYPE AS2. FOR

```
      SUBROUTINE FUNG(X, GX, N, FX)
      DIMENSION X(N), GX(N)
      A=X(1)+10. * X(2)
      B=X(3)-X(4)
      C=X(2)-2. * X(3)
      D=X(1)-X(4)
      FX=A ** 2+5. * B ** 2+C ** 4+10. * D ** 4
      GX(1)=2. * A+40. * D ** 3
      GX(2)=20. * A+4. * C ** 3
      GX(3)=10. * B-8. * C ** 3
      GX(4)=-10. * B-40. * D ** 3
10    RETURN
      END
```

. TYPE AS3. FOR

```
      SUBROUTINE SEARCH(X, S, N, MK, H)
      DIMENSION X(N), S(N), U(10), G(10)
      E=0.000001
      MD=0
      A=0.0
      B=1.0
10    ST=B-A
      IF(ST. LE.E) GO TO 80
      TA=0.382 * ST+A
      TB=0.618 * ST+A
      DO 20 I=1, N
20    U(I)=X(I)+TA * S(I)
```

```
      CALL FUNG(U, G, N, FA)
      DO 30 I=1, N
30    U(I)=X(I)+TB * S(I)
      CALL FUNG(U, G, N, FB)
40    IF(FB. GT. FA) GO TO 50
      A=TA
      GO TO 60
50    B=TB
60    MD=MD+1
      GO TO 10
80    H=(A+B) /2.0
      IF(MK. EQ. 0) GO TO 100
      WRITE(5,2000) MD, H
2000  FORMAT(1H0, 3HMD=, I3, /1X, 3HH=  , E15.6)
100   RETURN
      END
```

. TYPE AS4. FOR

```
      SUBROUTINE CONVRG(X. Y, G, FX, FY, N, IP)
      DIMENSION X(N), Y(N), G(N)
      XE=0.0005
      FE=0.00001
      GE=0.0005
      IF(ABS(FX). LT. FE) GO TO 10
      IF (ABS((FX—FY)/FX). GT. FE) GO TO 60
      GO TO 20
10    IF(ABS(FX-FY). GT.FE)GO TO 60
20    DO 40 I=1, N
      IF(ABS(X(I)). LE. XE) GO TO 30
      IF(ABS((X(I)-Y(I))/X(I)). GT. XE) GO TO 60
      GO TO 40
30    IF(ABS(X(I)-Y(I)). GT. XE) GO TO 60
40    CONTINUE
      DO 50 I=1, N
50    IF(ABS(G(I)). GT. GE) GO TO 60
      IP=1
```

```
RETURN
IP=2
RETURN
END
```

Ⅳ. TYPE AQ1. 单纯形法

```
C     SIMPLEX METHOD
      DIMENSION XA(20, 20), X(20), FX(20)
      COMMON /ONE/ X, XA, N, XN, STEP, K1, FX, M
      WRITE(5.2000)
2000  FORMAT(1X, 4HN=   , 5HMK=   , 5HXN=   , 7HSTEP=, 2HE=)
      READ(5,2010) N, MK, XN, STEP, E
2010  FORMAT(2I5, 3F10.5)
      WRITE(5,2020)
2020  FORMAT(1X, 3HX1=, 5X, 3HX2=, 5X, 3HX3=, 5X, 3HX4=)
      READ(5,2030) X(1), X(2), X(3), X(4)
2030  FORMAT(4F10.5)
      K=1
      M=1
      CALL FUN
      WRITE(5,2035)
2035  FORMAT(1H0, 14HSTARTING VALUE)
      WRITE(5,2040) FX(1), X(1), X(2), X(3), X(4)
2040  FORMAT(1X, 3HFX=, E15.6, / 1X, 3HX=, 4E15.6)
      WRITE(5,2050) STEP
2050  FORMAT(1X, 5HSTEP=, F6.2)
      K1=N+1
      KF=N+2
      KR=N+3
      KE=N+4
      KS=N+5
      CALL START
      DO 40 I=1, K1
      DO 30 J=1, N
30    X(J)=XA(I, J)
      M=I
      WRITE(5,4000) X(1), X(2), X(3), X(4)
4000  FORMAT(1X, 3HX=   , 4E15.6)
      CALL FUN
      WRITE(5,4100) FX(I)
4100  FORMAT(1X, 3HFX=  , E15.6)
40    CONTINUE
```

```
45    FXH=FX(1)
      KH=1
      DO 50 I=2, K1
      IF(FX(I). LE. FXH) GO TO 50
      FXH=FX(I)
      KH=I
50    CONTINUE
      FXL=FX(1)
      KL=1
      DO 60 I=2, K1
      IF(FXL. LE. FX(I)) GO TO 60
      FXL=FX(I)
      KL=I
60    CONTINUE
      IF(KH. EQ. 1) GO TO 70
      FXG=FX(1)
      GO TO 80
70    FXG=FX(2)
80    DO 90 I=1, K1
      IF((KH-I). EQ. 0) GO TO 90
      IF(FX(I). LE. FXG) GO TO 90
      FXG=FX(I)
90    CONTINUE
      DO 110 J=1, N
      SUM=0.0
      DO 100 I=1,K1
100   SUM=SUM+XA(I,J)
      XA(KF, J)=1. /XN * (SUM-XA(KH, J))
      XA(KR, J)=2. * XA(KF,J)-XA(KH, J)
110   X(J)=XA(KR, J)
      M=KR
      CALL FUN
      IF(FX(KR). LT. FXL) GO TO 120
      IF(FX(KR). GT. FXG) GO TO 180
      GO TO 140
120   DO 130 J=1, N
      XA(KE, J)=3. * XA(KF, J)-2. * XA(KH, J)
```

```
130   X(J)=XA(KE, J)
      M=KE
      CALL FUN
      IF(FX(KE). LT. FX(KR)) GO TO 160
140   DO 150 J=1, N
      XA(KH. J)=XA(KR, J)
150   X(J)=XA(KH, J)
      M=KH
      CALL FUN
      GO TO 300
160   DO 170 J=1, N
      XA(KH, J)=XA(KE, J)
170   X(J)=XA(KH, J)
      M=KH
      CALL FUN
      GO TO 300

180   IF(FX(KR). LT. FXH) GO TO 200
      DO 190 J=1, N
190   XA(KR, J)=XA(KH, J)
200   CONTINUE
210   DO 220 J=1, N
      XA(KS, J)=XA(KF, J)+0.5 *(XA(KR, J)-XA(KF, J))
220   X(J)=XA(KS, J)
      M=KS
      CALL FUN

      IF(FX(KS). GT. FXH) GO TO 240
      DO 230 J=1, N
      XA(KH, J)=XA(KS, J)
230   X(J)=XA(KH, J)
      M=KH
      CALL FUN

      GO TO 300
240   DO 250 J=1, N
      DO 250 I=1, K1
250   XA(I, J)=0.5 *(XA(I, J)+XA(KL, J))
      DO 270 I=1, K1
```

```
      DO 260 J=1, N
260   X(J)=XA(I, J)
      M=I
      CALL FUN
270   CONTINUE
300   DO 310 J=1, N
310   X(J)=XA(KF, J)
      M=KF
      CALL FUN
      DF=0.0
      DO 320 I=1, K1
320   DF=DF+(FX(I)-FX(KF)) ** 2
      DF=1.0/XN * SQRT(DF)
      IF(MK. EQ. 0) GO TO 325
      WRITE(5,2100) K, DF
2100  FORMAT(1H0, 3HK=  , I4, / 1X, 3HDF=, E15.6)
      WRITE (5,2090) FXL, XA(KL, 1), XA(KL, 2), XA(KL, 3), XA
                                                      (KL, 4)
2090  FORMAT(1X, 4HFXL=, E15.6, / 1X, 4HXL=  , 4E15.6)
325   K=K+1
      IF(K. GT. 200) GO TO 350
330   IF(DF. GE. E) GO TO 45
      WRITE(5,2085)
2085  FORMAT(1H0, 18HOPTIMIZATION POINT)
      WRITE(5,2101) K, DF
2101  FORMAT(1X, 3HK=  , I4, /1X, 3HDF= , E15.6)
      WRITE (5,2091) FXL, XA(KL, 1), XA(KL, 2), XA(KL, 3), XA
                                                      (KL, 4)
2091  FORMAT(1X, 4HFXL= , E15.6, / 1X, 4HXL=  , 4E15.6)
340   STOP 340
350   WRITE(5,2110)
2110  FORMAT(1X, 27HIF MA=1 CONTINUE MA=0 STOP)
      READ(5,2120) MA
2120  FORMAT(I1)
      IF(MA. EQ. 0) GO TO 1000
      K=1
      GO TO 330
```

```
1000  WRITE(5,2130)
2130  FORMAT(1H0, 28HNOT REACH OPTIMIZATION POINT)
      WRITE (5,2140) FXL, XA(KL, 1), XA(KL, 2), XA(KL, 3), XA
                                                        (KL, 4)
2140  FORMAT(1X, 4HFXL= , E15.6, / 1X, 4HXL=  , 4E15.6)
      STOP
      END
      EX
```

```
. TYPE AQ2. FOR
      SUBROUTINE FUN
      COMMON/ONE/ X, XA, N, XN STEP, K1, FX, M
      DIMENSION XA(20, 20), X(20), FX(20)
      A=X(1)+10. * X(2)
      B=X(3)-X(4)
      C=X(2)-2. *X(3)
      D=X(1)-X(4)
      FX(M)=A ** 2+5. *B ** 2+C ** 4+10. *D ** 4
      RETURN
      END
```

```
. TYPE AQ3. FOR

      SUBROUTINE START
      DIMENSION A(20, 20), XA(20, 20), X(20), FX(20)
      COMMON /ONE/ X, XA, N, XN, STEP, K1, FX, M
      STEP1=STEP/(XN * SQRT(2. )) *(SQRT(XN+1. )+XN-1.)
      STEP2=STEP/(XN * SQRT(2. )) * (SQRT(XNN+1. )-1. )
      DO 10 J=1, N
10    A(1, J)=0.0
      DO 20 I=2, K1
      DO 20 J=1, N
      A(I, J)=STEP2
      L=I-1
      A(I, L)=STEP1
20    CONTINUE
```

```
      DO 30 I=1, K1
      DO 30 J=1, N
30    XA(I, J)=X(J)+A(I, J)
      RETURN
      END
```

V. TYPE AQS1. 序贯加权因子 (SWIFT) 法。

```
C     SWIFT METHOD
      DIMENSION X(20), FX(20), FXW(20), GS(20), XA(20, 20)
      DIMENSION G(20, 20), V1(20), V2(20)
      COMMON / ONE / N, XN, M, K1, ST, W, X, FX, FXW, GS, XA, K,
                                                        XK1, XK2
      COMMON /TWO/ IC, G, V1, V2, MK, KL, E, C1, C2
      CALL INP
      IC=1
      GO TO 15
      K=1
      CALL FUN
      KL=1
      DO 10 I=1, N
10    XA(KL, I)=X(I)
      WRITE(5.2060)
2060  FORMAT(1H0, 14HSTARTING VALUE)
      CALL PRT
15    K1=N+1
      KF=N+2
      KR=N+3
      KE=N+4
      KS=N+5
      KC=N+6
20    CALL START
      DO 40 I=1, K1
      DO 30 J=1, N
30    X(J)=XA(I, J)
      K=I
      CALL FUN
40    CONTINUE
50    FXWH=FXW(1)
      KH=1
      DO 60 I=2, K1
      IF(FXW(I). LE. FXWH) GO TO 60
      FXWH=FXW(I)
      KH=I
```

```
60      CONTINUE
        FXWL=FXW(1)
        KL=1
        DO 70 I=2, K1
        IF(FXWL. LE. FXW(I)) GO TO 70
        FXWL=FXW(I)
        KL=I
70      CONTINUE
        IF(KH. EQ. 1) GO TO 80
        FXWG=FXW(1)
        GO TO 90
80      FXWG=FXW(2)
90      DO 100 I=1, K1
        IF((KH-I). EQ. 0) GO TO 100
        IG(FXW(I). LE. FXWG) GO TO 100
        FXWG=FXW(I)
100     CONTINUE
        DO 120 J=1, N
        SUM=0.0
        DO 110 I=1, K1
110     SUM=SUM+XA(I, J)
        XA(KF, J)=1.0/XN* (SUM-XA(KH, J)
        XA(KR, J)=2. 0* XA(KF, J)-XA(KH, J)
120     X(J)=XA(KR, J)
        K=KR
        CALL FUN
        IF(FXW(KR). LT. FXWL) GO TO 130
        IF(FXW(KR). LT. FXWG) GO TO 150
        GO TO 190
130     DO 140 J=1, N
        XA(KE, J)=3.0* XA(KF, J)-2.0* XA(KH, J)
140     X(J)=XA(KE, J)
        K=KE
        CALL FUN
        IF(FXW(KE). LT. FXW(KR)) GO TO 170
150     DO 160 J=1, N
        XA(KH, J)=XA(KR, J)
```

```
160   X(J)=XA(KH, J)
      K=KH
      CALL FUN
      GO TO 280
170   DO 180 J=1, N
      XA(KH, J)=XA(KE, J)
180   X(J)=XA(KH, J)
      K=KH
      CALL FUN
      GO TO 280
190   IF(FXW(KR). LT. FXWH) GO TO 210
      DO 200 J=1, N
      XA(KR, J)=XA(KH, J)
200   CONTINUE
210   DO 220 J=1, N
      XA(KS, J)=XA(KF, J)+0.5* (XA(KR, J)-XA(KF, J)
220   X(J)=XA(KS, J)
      K=KS
      CALL FUN
      IF(FXW(KS). GT. FXWH) GO TO 240
      DO 230 J=1, N
      XA(KH, J)=XA(KS, J)
230   X(J)=XA(KH, J)
      K=KH
      CALL FUN
      GO TO 280
240   DO 250 J=1, N
      DO 250 I=1, K1
250   XA(I, J)=0.5 *(XA(I, J)+XA(KL, J)
      DO 270 I=1, K1
      DO 260 J=1, N
260   X(J)=XA(I, J)
      K=I
      CALL FUN
270   CONTINUE
280   DO 300 J=1, N
      X(J)=0.0
```

```
      DO 290 I=1, K1
290   X(J)=X(J)+XA(I, J)
      X(J)=X(J)/(XN+1.0)
300   CONTINUE
      K=KC
      CALL FUN
      R=0.0
      DO 320 I=1, K1
      RX=0.0
      DO 310 J=1, N
      RX=RX+(XA(I, J)-X(J))* * 2
310   RX=SQRT(RX)
320   R=R+RX
      R=R/(XN+1.0)
      DF=0.0
      DO 330 I=1, K1
330   DF=DF+(FXW(I)-FXW(KC))* * 2
      DF=1.0/(XN+1.0) * SQRT(DF)
      IF(DF. LT. E) GO TO 410
      IF(R. LT. 0.0001) GO TO 410
      XB=0.1 * FLOAT(IC)
      XC=FLOAT(IC/10)
      IF(XB. NE. XC) GO TO 350
      IF(MK. EQ. 0) GO TO 350
      CALL PRT
350   IF(IC. LT. 500) GO TO 390
      CALL PRT
      WRITE(5,2220)
2220  FORMAT(1H0, 28HNOT REACH OPTIMIZATION POINT)
      IC=1
      GO TO 420
390   R=1.0/R
      IF(W. GT. R) GO TO 400
      W=R
400   IC=IC+1
      GO TO 50
410   WRITE(5.2300)
```

```
2300  FORMAT(1H0, 18HOPTIMIZATION POINT)
      CALL PRT
      IC=1
      XNG=0.288290E+10/(0.82466 * XA(KL, 4)* * 2 * XA(KL, 3))
      XNK=1.1967 * XNG
      SG=61.95/XA(KL, 2)
      SK=39.82/XA(KL, 1)
      WRITE(5,2380) XNG, SG
2380  FORMAT(1H0, 4HXNG= , E15.6, 5X, 4HSG=  , E15.6)
      WRITE(5,2390) XNK, SK
2390  FORMAT(1H, 4HXNK=, E15.6, 5X, 4HSK=  , E15.6)
420   WRITE(5,2400)
2400  FORMAT(1H0, 48HIF  ST=0. STOP  ST=1000. CONTINUE  ST=
                                                   OTHER BEGIN)
      READ(5,2410) ST
2410  FORMAT(F10.5)
      IF(ST. EQ. 0.) GO TO 1000
      IF(ST. EQ. 1000.) GO TO 400
      DO 430 I=1, N
430   X(I)=XA(KL, I)
      GO TO 20
1000  STOP 1000
      END

      SUBROUTINE START
      DIMENSION  X(20),  FX(20),  FXW(20),  GS(20),  XA(20, 20),
                                                        A(20, 20)
      DIMENSION G(20, 20), V1(20), V2(20)
      COMMON  /ONE/  N, XN, M, K1, ST, W, X, FX, FXW, GS, XA, K,
                                                        XK1, XK2
      COMMON  /TWO/  IC, G, V1, V2, MK, KL, E, C1, C2
      ST1=ST/(XN * SQRT(2.0)) * (SQRT(XN+1.0)+XN-1.0)
      ST2=ST/(XN * SQRT(2.0)) * (SQRT(XN+1.0)-1.0)
      DO 10 J=1, N
10    A(1, J)=0.0
      DO 20 I=2, K1
      DO 20 J=1, N
```

```
      A(I, I)=ST2
      L=I-1
      A(I, L)=ST1
20    CONTINUE
      DO 30 I=1, K1
      DO 30 J=1, N
30    XA(I, J)=X(J)+A(I,J)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE FUN
      DIMENSION X(20), FX(20), FXW(20), GS(20), XA(20, 20)
      DIMENSION G(20, 20), V1(20), V2(20)
      COMMON /ONE/ N,XN,M,K1,ST,W,X,FX,FXW,GS,XA,K,XK1,XK2
      COMMON  /TWO/  IC, G, V1, V2, MK, KL, E, C1, C2
      V1(K)=9.896* X(4)* *2* (1.82467*X(4)+X(5)+X(6))
      B1=3.0*X(1)+2.44949* X(2)
      B2=3.0*X(1)*(2.0*X(4)+3.0*X(1)*X(5)/B1)
      B3=2.44949*X(2)*(2.0* X(4)+X(5)* (6.0* X(1)+2.44949*
                                                    X(2))/B1)
      V2(K)=9.42478*C1*X(5)*X(6)*(B2+B3)/B1
      V1(K)=0.001*V1(K)
      V2(K)=0.001*V2(K)
      FX(K)=XK1*V1(K)+XK2*V2(K)
      B4=X(1)*X(2)*X(3)*X(4)* *2*X(5)* X(6)/B1
      G(K, 1)=0.301438E-03*(1.0+C2)*C1*C4-0.375584E+06
      G(K, 2)=0.158328E-02*(1.0+C2)*B1*B4-0.176963E+07
      B5=X(1)*X(2)* *2*X(5)*X(6)/B1
      GA1=1.00939*C1*B5*(2.0*X(4)+3.0*X(1)*X(5)/B1)
      B6=X(1)* *2*X(2)*X(5)*X(6)/B1
      GA2 = 0.824167* C1* B6* (2.0* X(4)+ X(5)* (6.0* X(1) +
                                             2.44949*X(2))/B1)
      B7=X(3)*X(4)* *2*(1.82467*X(4)+X(5)+X(6))
      GA3=0.310378E-06*(1.0+C2)*B7
      G(K, 3)=45375.0-GA1-GA2-GA3
      G(K, 4)=7550.63-GA2
      G(K,5)=1000.0*(2.4-X(1))
      G(K, 6)=1000.0*(2.4-X(2))
```

```
      G(K, 7)=1000. * (17300.0-X(3))
      G(K, 8)=1000.0 * X(1)
      G(K, 9)=1000.0 * X(2)
      G(K, 10)=100.0 * X(3)
      G(K, 11)=X(4)
      G(K, 12)=X(5)
      G(K, 13)=X(6)
      GS(K)=0.0
      DO 10 I=1, M
      IF(G(K, I). GE. 0. 0) GO TO 10
      GS(K)=GS(K)+G(K, I) * * 2
10    CONTINUE
      FXW(K)=FX(K)+W * GS(K)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE INP
      DIMENSION X(20), FX(20), FXW(20), GS(20), XA(20, 20)
      DIMENSION G(20, 20), V1(20), V2(20)
      COMMON /ONE/ N,XN,M,K1,ST,W,X,FX,FXW,GS,XA,K,XK1,XK2
      COMMON  /TWO/  IC, G, V1, V2, MK, KL, E, C1, C2
      WRITE(5,2000)
2000  FORMAT(1H0, 4HN=, 4HM=, 5HMK=, 5HST=, 4HW= , 2HE=)
      READ(5,2010) N, M, MK, ST, W, E
2010  FORMAT(3I4, 3E10.5)
      WRITE(5,2020)
2020  FORMAT(1H0, 5HX1=  , 5HX2=  , 5HX3=  , 5HX4=  , 5HX5=  ,
                                                     5HX6=  )
      READ(5,2030)  (X(I), I=1, N)
2030  FORMAT(6F10.5)
      WRITE(5,2040)
2040  FORMAT(1H0, 6HXK1=  , 6HXK2=  , 5HC1=  , 5HC2=  )
      READ(5,2050)  XK1, XK2, C1, C2
2050  FORMAT(4F10.5)
      XN=FLOAT(N)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PRT
      DIMENSION X(20), FX(20), FXW(20), GS(20), XA(20, 20)
      DIMENSION G(20,20), V1(20), V2(20)
      COMMON /ONE/ N, XN, M, K1, ST, W, X, FX, FXW, GS, XA, K,
                                                          XK1, XK2
      COMMON /TWO/ IC, G, V1, V2, MK, KL, E, C1, C2
      X7=0.82467* XA(KL, 4)
      D1=V1(KL)/V2(KL)
      D2=7.1145* V1(KL)
      D3=22.7664* V1(KL)
      D4=2.7* V2(KL)
      D5=18.9* V2(KL)
      D6=XA(KL, 6)/XA(KL, 5)
      D7=D2/D4
      D8=D3/D5
      WRITE(5,2000) IC C1, C2
2000  FORMAT(1H0, 4HIC=  , I4, 16X, 4HC1=  , E15.6, 5X, 4HC2=  ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2010) ST, W, E
2010  FORMAT(1X, 4HST=  , E15.6, 5X, 4HW=  , E15.6, 5X, 4HE=  ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2020) XA(KL, 1), G(KL, 1), D1
2020  FORMAT(1X, 4HX1=  , E15.6, 5X, 4HG1= ,E15.6, 5X, 4HD1=  ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2030) XA(KL, 2),G(KL, 2), D2
2030  FORMAT(1X, 4HX2=  , E15.6, 5X, 4HG2=  , E15.6, 5X, 4HD2= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2040) XA(KL, 3), G(KL, 3), D3
2040  FORMAT(1X, 4HX3=  , E15.6, 5X, 4HG3=  , E15.6, 5X, 4HD3= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2050) XA(KL, 4), G(KL, 4), D4
2050  FORMAT(1X, 4HX4=  , E15.6, 5X, 4HG4=  , E15.6, 5X, 4HD4= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2060) XA(KL, 5), G(KL, 5), D5
2060  FORMAT(1X, 4HX5=  , E15.6, 5X, 4HG5=  , E15.6, 5X, 4HD5= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2070) XA(KL, 6), G(KL, 6), D6
```

```
2070  FORMAT(1X, 4HX6=  , E15.6, 5X, 4HG6=  , E15.6, 5X, 4HD6= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2080) X7, G(KL, 7), D7
2080  FORMAT(1X, 4HX7=  , E15.6, 5X, 4HG7=  , E15.6, 5X, 4HD7= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2090) V1(KL), V2(KL), D8
2090  FORMAT(1X, 4HV1=  , E15.6, 5X, 4HV2=  , E15.6, 5X, 4HD8= ,
                                                          E15.6)
      WRITE(5,2100) FX(KL), FXW(KL), GS(KL)
2100  FORMAT(1X, 4HFX=  , E15.6, 5X, 4HFXW=  , E15.6, 5X,  4HGS
                                                        =  , E15.6)
      RETURN
      END
```